

# יפה בר אור

## אלגברה

$$72a^5x^4 - 54a^3x^5 + 36a^2x^6$$

$$a^3 - ab - a^2b + a^2$$

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 4x + 3y$$

$$2x + y + y^2 - 4x^2$$

$$a^2 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$$

$$(2c+1)^3 - 2^7$$

$$(2b-3)^3 + 1$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$$

decay

$$y = 2(x+2)^2$$

Quadratic

$$(1+i)^{31} = (\sqrt{2})^{31} \left( \cos\left(\frac{31\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{31\pi}{4}\right) \right) = (\sqrt{2})^{31} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(\sqrt{3}-i)^{20} = 2^{20} \left( \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right) \right) = 2^{20} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\frac{(\sqrt{2})^{15} (\sqrt{2})^{31} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{3})^{20} 2^{20} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2^{27} (\sqrt{3})^{16} (-i)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{15} (\sqrt{2})^{32} 2^{18} (\sqrt{3})^{20} (1+i) (-1+i\sqrt{3})}{2^{27} (\sqrt{3})^{16} 2^{16} (-i)} =$$

$$= \sqrt{2} \frac{9}{4} (1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}))$$

$$\frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{15} (3 - i\sqrt{3})^{20}}{(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^{16} (2i)^{27}} =$$

$$= \sqrt{2} \frac{9}{4} (1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}))$$

$$\frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{15} (3 - i\sqrt{3})^{20}}{(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^{16} (2i)^{27}} =$$

$$b^3) (a+b)(a^2+b^2) - (a^3+b^3) + 9y^2) (10x-3y)(100x^2+30xy+9y^2) - a(a+3) 4c(c-2) - (c-4)^2 (6+m)(6+m) - (2m-b)^2$$

$$\frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{15} (3 - i\sqrt{3})^{20}}{(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^{16} (2i)^{27}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{15} (1+i)^{15} \sqrt{3}^{20} (\sqrt{3}-i)^{20}}{(\sqrt{3})^{16} (1-i)^{16} 2^{27} i^{27}} =$$

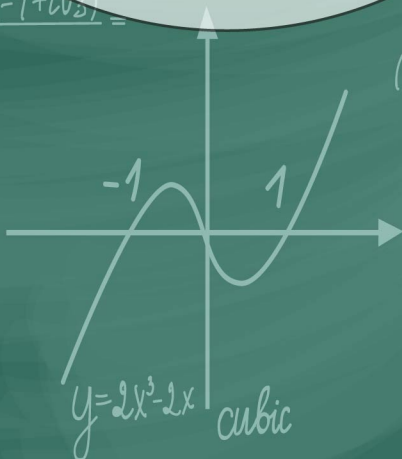
$$(i^{27} = (i^3)^9 = (-i)^9 = ((-i)^3)^3 = -i^3 = -(-i) = i)$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{15} (1+i)^{15} (1+i)^{16} (\sqrt{3})^{20} (\sqrt{3}-i)^{20}}{2^{27} (\sqrt{3})^{16} (1-i)^{16} (1+i)^{16} (-i)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{15} (1+i)^{31} (\sqrt{3})^{20} (\sqrt{3}-i)^{20}}{2^{27} (\sqrt{3})^{16} (1-i)(1+i)^{16} (-i)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{15} (1+i)^{31} (\sqrt{3})^{20} (\sqrt{3}-i)^{20}}{2^{27} (\sqrt{3})^{16} (1-i-i^2)^{16} (-i)} =$$

$$(1-i-i^2)^{16} = (1+1)^{16} = 2^{16}$$



יפה בר-אור

אלגברה

לחטי"ב ולחטיבה העליונה

עיצוב ועריכה  
**גלית ב.**

חידות  
**אבי ב.**

עיצוב העטיפה והבאה לדפוס  
**סטודיו אור**

איורים  
**דימקה אטנסוב**

הדפסה  
**דפוס אייל**

תודתי נתונה  
לעמיתותי לעבודה **ברנינג קלרה**, **קנטור סופיה**, **ואנה קוטליאר**  
על הערותיהן המועילות

© כל הזכויות שמורות למחברת  
1997

הוצאת בר-אור  
טל' 03-5050543

# תוכן העניינים

## פרק א'. המספרים הממשיים

עמוד		
1	.....	1. מספרים
1	.....	2. פעולות החשבון ותכונותיהן
4	.....	3. סדר פעולות החשבון
6	.....	4. קשרים בין מספרים ובין ביטויים אלגבריים
6	.....	5. המספרים הממשיים
8	.....	6. פעולות עם מספרים ממשיים
14	.....	תרגילים

## פרק ב'. תבנית מספר

24	.....	1. תבניות מספר ומאפייניהן
27	.....	2. חיבור וחיסור - כינוס אברים דומים
28	.....	3. כפל ביטויים אלגבריים
36	.....	4. חילוק ביטויים אלגבריים
40	.....	תרגילים

## פרק ג'. פרוק לגורמים

60	.....	1. הוצאת גורם משותף
61	.....	2. פרוק לגורמים לפי חלוקה לקבוצות
62	.....	3. פרוק לגורמים לפי נוסחות
63	.....	4. פרוק לגורמים של תלת-אבר ריבועי-טרינום
67	.....	תרגילים

## פרק ד'. פעולות בשברים אלגבריים

76	.....	1. תכונות השברים
76	.....	2. צמצום שברים אלגבריים
78	.....	3. כפל וחילוק שברים אלגבריים
80	.....	4. חיבור וחיסור של שברים אלגבריים
	.....	5. נספח-חישוב הכמ"מ של מספרים לצורך קביעת המכנה
86	.....	המשותף
88	.....	תרגילים

## פרק ה'. משוואה ממעלה ראשונה

עמוד		
99	.....	1. תבנית פסוק
99	.....	2. השוויון
101	.....	3. משוואות ממעלה ראשונה
106	.....	4. מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים
112	.....	5. חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה - מספר פתרונות
113	.....	6. מערכת של שלש משוואות עם שלושה נעלמים
116	.....	תרגילים

## פרק ו'. אי שוויון ממעלה ראשונה

134	.....	1. תכונות אי-שוויון
135	.....	2. פתרון של אי-שוויון
137	.....	3. מערכת אי-שוויונים
142	.....	תרגילים

## פרק ז'. השורש הריבועי

148	.....	1. השורש הריבועי
148	.....	2. פעולות בשורשים
150	.....	3. מספרים אי-רציונליים
152	.....	תרגילים

## פרק ח'. משוואה ממעלה שניה - משוואה ריבועית

157	.....	1. מיון משוואות
158	.....	2. פתרון משוואה ריבועית בעזרת פרוק לגורמים
160	.....	3. פתרון משוואה ריבועית בעזרת נוסחה
165	.....	4. משוואה אי-רציונלית
167	.....	5. משוואה דו-ריבועית
168	.....	6. מערכת משוואות ריבועית
172	.....	תרגילים

## פרק ט'. חקירת המשוואה הריבועית

184	.....	1. מספר הפתרונות
185	.....	2. נוסחאות ויאטה
186	.....	3. הרכבת משוואה על-פי שורשיה
188	.....	4. סימני השורשים של משוואה ריבועית
191	.....	תרגילים

## פרק י'. משוואות פרמטריות

עמוד		
198	פתרון משוואה פרמטרית ממעלה ראשונה עם נעלם אחד	.1
200	חקירת המשוואה	.2
200	מערכת משוואות פרמטריות ממעלה ראשונה	.3
202	משוואה פרמטרית ממעלה שניה	.4
204	תרגילים	

## פרק יא'. בעיות

214	פתרון בעיות	.1
215	בעיות כלליות	.2
219	תכונה כמותית, כלל הטבלה	.3
224	בעיות עם מספרים	.4
231	בעיות תערובת	.5
238	בעיות תנועה	.6
247	בעיות עבודה והספק	.7
255	תרגילים: סעיף 2 - בעיות כלליות	.8
263	סעיף 3 - בעיות כלל הטבלה	
275	סעיף 4 - בעיות מספרים	
282	סעיף 5 - בעיות תערובות	
293	סעיף 6 - בעיות תנועה	
308	סעיף 7 - בעיות עבודה והספק	
321	בעיות עם אותיות	

## פרק יב'. פונקציות וגרפים

329	פונקציות	.1
332	גרפים	.2
338	עליה וירידה של פונקציה	.3
339	פונקציה ממעלה ראשונה - פונקציה קווית	.4
345	פתרון מערכת משוואות בשני נעלמים בדרך גרפית	.5
348	פתרון אי-שוויון ממעלה ראשונה	.6
350	צורות נוספות לפונקציית הישר	.7
352	נושאים בגאומטריה אנליטית	.8
355	פתרון בעיות בדרך גרפית	.9
357	פונקציות בעלות תחום מפוצל	.10
362	הפרבולה, פונקציה ממעלה שניה	.11
365	פרבולה וישר	.12
371	עליה וירידה של פרבולה	.13
373	היפרבולה	.14
374	תרגילים	

# פרק א': המספרים הממשיים

האלגברה מאפשרת לפתור בעיות מתמטיות בצורה יעילה. היא מקבצת בעיות דומות לקבוצות ומציגה אותן בצורה כללית. ע"י כך היא מחדדת את דרך החשיבה המתמטית מפתחת שיטתיות ומקצרת תהליכי פתרון.

באלגברה משתמשים במספר סמלים, שכל אחד מציין נושא אחר:

1. מספרים וביטויים אלגבריים.
2. פעולות חשבון.
3. סדר פעולות החשבון.
4. קשרים (יחס, סדר גודל) בין מספרים וביטויים אלגבריים.

## 1. מספרים

במסגרת מקצוע זה, נהוג להשתמש נוסף למספרים גם באותיות לציון מספרים בצורה כללית.

למשל, במקום לומר:

"*אֶהֱרַכְבֶּת רִיבּוּעַ אֵאוּרֵקְלֵס 2 ס"מ, נְחוּץ חוּט תִּיף בְּאוּרֵקְלֵס 8 ס"מ, וְאֶהֱרַכְבֶּת רִיבּוּעַ אֵאוּרֵקְלֵס 2.5 ס"מ, נְחוּץ חוּט תִּיף בְּאוּרֵקְלֵס 10 ס"מ, וְכוּ'.*"  
אפשר לומר:

"*אֶהֱרַכְבֶּת רִיבּוּעַ אֵאוּרֵקְלֵס a ס"מ, נְחוּץ חוּט תִּיף בְּאוּרֵקְלֵס 4a ס"מ.*"  
4a - זו תבנית שלתוכה "יוצקים" למשל, את הערך 2 ס"מ (=אורך הצלע), כדי לקבל את אורך החוט - 8 ס"מ (=  $4 \cdot 2$ ), וכו'.  
השימוש באותיות לצורך הצגת מספרים יצר את המושג **תבנית מספר** או **ביטוי אלגברי**.

## 2. פעולות החשבון ותכונותיהן

### 2.1 פעולות החשבון

המספרים שבהם נתקלנו לראשונה אלה **המספרים הטבעיים** והם משמשים למנייה (לספירה): 0, 1, 2, 3, ...

למשל: 5 ספסלים, 12 שיח, שנת 1997, וכו'.  
בין כל שני מספרים טבעיים ניתן לבצע פעולת חשבון.  
למשל:

פעולת חיבור:  $2 + 5 = 7$

פעולת כפל:  $3 \cdot 4 = 12$

המספרים 2 ו-5 המופיעים בפעולת החיבור נקראים **מחברים** ותוצאת הפעולה נקראת **סכום**.

המספרים 3 ו-4 המופיעים בפעולת הכפל נקראים **גורמים** ותוצאת הפעולה נקראת **מכפלה**.

הכפל הוא בעצם צורה מקוצרת של חיבור, שכן במקום לכתוב  $4 + 4 + 4$  כותבים  $3 \cdot 4$ .

פעולת **ההעלאה בחזקה** היא צורה מקוצרת של כפל, כי במקום לכתוב  $2 \cdot 2 \cdot 2$  אפשר לכתוב  $2^3$ , כאשר 2 הוא **בסיס** החזקה ו-3 **המעריך**,  $2^3$  - **החזקה**.  
באותו אופן:  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$  או  $5 \cdot 5 = 5^2$

קבוצת מספרים נקראת **קבוצה סגורה** לפעולה מסוימת אם תוצאת הפעולה בין שני מספרים מהקבוצה, שייכת לאותה קבוצה.

הסכום של כל שני מספרים טבעיים הוא מספר טבעי.  
אנו אומרים שקבוצת **המספרים הטבעיים סגורה לפעולת החיבור**.  
לפי אותו שיקול, מתקבל שקבוצת **המספרים הטבעיים סגורה לפעולת הכפל ולפעולת ההעלאה בחזקה**.

## 2.2 פעולות הפוכות.

\* הפעולה ההפוכה לחיבור היא פעולת **החיסור**.

$$M+N=K \quad \text{אם}$$

$$K-M=N \quad \text{אז}$$

M נקרא **המחסר** K - **המחוסר**, N - **ההפרש**.

קבוצת המספרים הטבעיים אינה סגורה לפעולות החיסור:  $2 - 3 = ?$ .  
לפיכך, היא הורחבה לקבוצת **המספרים המכוונים** - בעלי כיוון.  
בקבוצה זו נדון בסעיף 5.

\* הפעולה ההפוכה לכפל היא פעולת **החילוק**.

$$A \cdot B = C \quad \text{אם} \quad \frac{C}{A} = B \quad \text{או} \quad C : A = B$$

C - נקרא **המחולק**, A - **המחלק**, B - **המנה**.

תוצאת החילוק של שני מספרים טבעיים איננה תמיד מספר טבעי:  $2 : 3 = ?$ .  
כלומר, קבוצת המספרים הטבעיים איננה סגורה לפעולת החילוק.

אם מוסיפים לקבוצה זו מספרים מהסוג  $\frac{4}{1}, \frac{8}{5}, \frac{2}{3}$  (מנות של מספרים שלמים),

מתקבלת קבוצת **המספרים הרציונליים**, המכילה בתוכה את קבוצת המספרים הטבעיים. אלה מספרים שאפשר לכתוב אותם בצורת שבר פשוט (מונה חלקי מכנה), או שבר עשרוני. קבוצה זו סגורה לפעולת החילוק.

\* הפעולה ההפוכה לפעולת ההעלאה בחזקה היא **הוצאת שורש**.  
 למשל, אם  $3^2 = 9$  אז  $\sqrt{9} = 3$ .  
 כלומר, אם 9 הוא הריבוע (חזקה שניה) של 3, אז 3 הוא השורש הריבועי של 9.

## 2.3 תכונות פעולות החשבון

א. **חוק החילוף (הקומוטטיבי) מתייחס לפעולת החיבור ולפעולת הכפל.**

\* **סכום שניים או יותר מספרים אינו משתנה, אם משנים את סדר המחברים.**

$$A + B = B + A$$

\* **מכפלת שניים או יותר מספרים אינה משתנה, אם משנים את סדר הגורמים:**

$$A \cdot B = B \cdot A$$

ב. **חוק הקיבוץ (האסוציאטיבי) - גם הוא מתייחס לפעולת החיבור ולפעולת הכפל.**

\* **בחיבור של שלושה מספרים, מחברים שני מספרים (לפי בחירתנו), ולתוצאה מוסיפים את המספר השלישי.**

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B$$

\* **בכפל של שלושה מספרים, מכפילים שני מספרים (לפי בחירתנו) ואת התוצאה מכפילים בשלישי.**

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot C) \cdot B$$

ג. **חוק הפילוג (הדיסטריבוטיבי) מתייחס לשילוב של פעולות חיבור וכפל, ושל פעולות חיסור וכפל.**

\* **מכפלת מספר בסכום של שניים או יותר מספרים שווה לסכום המכפלות של המספר בכל אחד מהמחברים.**

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

\* **מכפלת מספר בהפרש שני מספרים שווה להפרש המכפלות של המספר במחוסר ובמחסר.**

$$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$$

## ד. תכונות פעולות הכפל והחילוק

\* אם מכפילים או מחלקים את המונה ואת המכנה של שבר באותו מספר (שאיננו 0) המנה לא תשתנה.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A:C}{B:C} \quad C \neq 0$$

\* אין לחלק מספר ב-0; מנה זו אינה מוגדרת.

שימוש בתכונות הנ"ל מיעל פעולות חישוב.



- $12.75 + 15.8 + 2.25 = (12.75 + 2.25) + 15.8 = 15 + 15.8 = 30.8$
- $12.5 \cdot 8.7 + 1.3 \cdot 12.5 = 12.5 \cdot (8.7 + 1.3) = 12.5 \cdot 10 = 125$
- $\frac{0.63}{1.53} = \frac{0.63 \cdot 100}{1.53 \cdot 100} = \frac{63}{153} = \frac{63:9}{153:9} = \frac{7}{17}$

## 3. סדר פעולות החשבון.

פעולות חישוב נעשות לפי הנחיה נתונה.

למשל, את ההנחיה "כפול את 2 ב-3 וחבר לתוצאה את המספר 4"

נכתוב:  $2 \cdot 3 + 4$

לעומת זאת, את ההנחיה "כפול את המספר 2 בתוצאת החיבור 3 - 1"

נכתוב:  $2 \cdot (3 + 4)$

כללי סדר פעולות החשבון חוסכים מתן הנחיות כאלה.

### כלל א'

אם בתרגיל חישוב, מעורבות שתיים או יותר פעולות חשבון, מבצעים תחילה את פעולות ההעלאה בחזקה והוצאת השורש, אחר-כך את פעולות הכפל והחילוק, ובסוף את פעולות החיבור והחסור.

אם מופיעות פעולות חיבור וחסור בלבד (או פעולות כפל וחילוק בלבד), או פעולות ההעלאה בחזקה והוצאת שורש בלבד), מבצעים אותן לפי סדר הופעתן.

1.  $2 + 3 - 4 = 5 - 4 = 1$
2.  $3 \cdot 4 : 6 \cdot 5 = 12 : 6 \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$
3.  $2 \cdot 8 + 15 : 5 = 16 + 3 = 19$
4.  $3 \cdot 2^2 - 21 : 7 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$

במידה שהפעולות צריכות להתבצע בסדר שונה מזה שרשום בכלל א', משתמשים בסוגריים, ומבצעים את הפעולות לפי הכלל הבא:

### כלל ב'

בתרגיל חישוב המכיל סוגריים, יש לבצע תחילה את הפעולות שבתוך הסוגריים; אם מופיע סוג נוסף (או סוגים נוספים) של סוגריים, מבצעים תחילה את הפעולות שבתוך הסוגריים הפנימיים ביותר, אחר כך את הפעולות שבסוגריים המכילים אותם, וכו'; כל שלב בפתרון נעשה לפי כלל א'.

אם נחוץ רק סוג אחד של סוגריים, משתמשים בסוגריים עגולים: ( ). אם נחוצים סוגים נוספים, משתמשים בסוגריים מרובעים - [ ], ובסוגריים גדולים - { }, כאשר האחרונים מכילים את המרובעים, והמרובעים את העגולים: { ( ) }.

1.  $2 + 3 \cdot (4 \cdot 2 - 5) = 2 + 3 \cdot (8 - 5) = 2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$   
 החישוב נעשה בארבעה שלבים:  
 $4 \cdot 2 = 8$   
 $8 - 5 = 3$   
 $3 \cdot 3 = 9$   
 $2 + 9 = 11$
2.  $5 \cdot 3 + 4 \cdot (5 + 12 : 6) = 15 + 4 \cdot (5 + 2) = 15 + 4 \cdot 7 = 15 + 28 = 43$
3.  $6 \cdot 5 - [2 \cdot 3 + 4 \cdot (6 - 8 : 4)] = 30 - [6 + 4 \cdot (6 - 2)] = 30 - (6 + 4 \cdot 4) =$   
 $= 30 - (6 + 16) = 30 - 22 = 8$
4.  $2^2 + 2 \cdot \{5 + 2 \cdot 15 \cdot [12 : 4 - (3 \cdot 2 - 5)]\} = 4 + 2 \cdot \{5 + 3 \cdot [3 - (6 - 5)]\} =$   
 $= 4 + 2 \cdot [5 + 3 \cdot (3 - 1)] = 4 + 2 \cdot (5 + 3 \cdot 2) = 4 + 2 \cdot (5 + 6) = 4 + 2 \cdot 11 = 26$



**את הפעולות שאינן תלויות בתוצאת הסוגריים ניתן לבצע במקביל לפעולות שבתוך הסוגריים.**

**למשל, בדוגמה 2 הפעולה 5·3 נעשית במקביל לפעולות שבסוגריים; כנ"ל 6·5 בדוגמה 3, וגם  $2^2$  או  $2 \cdot 1.5$  או  $12:4$  בדוגמה 4.**

#### **4. קשרים בין מספרים ובין ביטויים אלגבריים.**

שני מספרים או שני ביטויים אלגבריים יכולים להיות שווים זה לזה או שונים זה מזה. למשל:  $3=3$ ,  $5 \neq 4$ ,  $8 > 7$ ,  $x > y$ ,  $a+b=c$

הסמלים  $>$ ,  $\neq$ ,  $=$ , וכו', מביעים קשרים בין מספרים או בין ביטויים אלגבריים. במקרה של קשר בין ביטויים אלגבריים, מכונה קשר כזה **תבנית פסוק** או **נוסחה**.

דוגמאות לתבניות פסוק:  $2a + b = c$ ,  $x - y < 5$ ,  $a^2 + 5 \geq b - 3$

#### **5. המספרים הממשיים**

עד עתה דנו במספרים אשר שימשו למניה (5 ימים, שנת 1996, וכו') או למדידת כמויות (3 מטר,  $4\frac{1}{2}$  ק"ג, וכו').

לעתים, מספר צריך להביע, לא רק כמות אלא גם כיוון. למטרה זו מגדירים את **המספרים המכוונים** - בעלי כיוון.

הקבוצה המורחבת המתקבלת שייכת לקבוצת **המספרים הממשיים** המסומנים באות R, מהמילה האנגלית Real - ממשי.

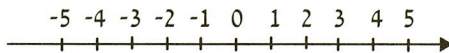
המספרים המכוונים הם מספרים שמוצמד להם סימן: (+) לכיוון שיוסכם כחיובי, (-) לכיוון שלילי.

שימוש במספרים הללו מיעל את השפה המתמטית: במקום לציין:  $10^\circ$  מתחת לאפס, אפשר לכתוב  $(-10^\circ)$ , במקום: 100 מטר מעל פני הים, ירשם  $(+100)$ , וכו'. מספר שמשמאלו רשום הסימן (+) יחשב למספר חיובי, ואם רשום (-), המספר שלילי. אם לא רשום סימן לפני המספר, הוא יחשב למספר חיובי. ולהפך: אם מספר הוא חיובי, לא כותבים סימן לפניו. למספר 0 אין סימן.

נתאר קשר בין מספרים מכוונים לנקודות על ישר. נשרטט קו ישר, ונקבע יחידת מידה. לכל נקודה על הישר אפשר להתאים מספר מכוון, שמהווה את שעור הנקודה, ולכל מספר מכוון אפשר להתאים נקודה על הישר:

### נקודה על הישר $\Leftrightarrow$ מספר מכוון

נסמן על ישר נקודה, שתציין את המספר 0. בצד הימני מציינות הנקודות את המספרים החיוביים, ובשמאלי את המספרים השליליים. ישר זה נקרא **ציר המספרים**.



מקובל לכתוב מספרים חיוביים גם ללא סימן +, כמו למשל המספרים 5, 6. החץ על ציר המספרים מצביע על כיוון "הגדילה" של המספרים - ימינה. לפיכך, אפשר לרשום:

$$\begin{aligned} +5 &> +2 && (+5 \text{ גדול מ- } +2) \\ -1 &> -3 && (-1 \text{ גדול מ- } -3) \\ +1 &> -2 && (+1 \text{ גדול מ- } -2) \end{aligned}$$

מספרים הנמצאים משני צידי המספר 0 ובמרחקים שווים ממנו נקראים מספרים נגדיים. למשל: (-1), (+1) או (+4), (-4).

אם לא מתיחסים לסימן שלפני המספר, אלא רק למספר עצמו, מתקבל **הערך המוחלט** של המספר. סימונו - שני קווים מקבילים משני צידי המספר:

$$\begin{aligned} |-1| &= 1 \\ |+2| &= 2 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

מבחינה אלגברית, הערך המוחלט של מספר:  
- הוא המספר עצמו, כאשר המספר חיובי או 0  
- הוא המספר הנגדי שלו, כאשר המספר שלילי:

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ כאשר } a > 0 \\ 0 & , \text{ כאשר } a = 0 \\ -a & , \text{ כאשר } a < 0 \end{cases}$$

### המספר הנגדי למספר הנגדי של מספר נתון, זהו המספר עצמו.

למשל, המספר הנגדי למספר (+3) הוא (-3), והנגדי לנגדי הוא +3, וזה מחזיר אותנו למספר עצמו:  $-[-(+3)] = +3$ , וכן:  $-[-(-5)] = -5$ .

הערכים המוחלטים של שני מספרים נגדיים שווים זה לזה

$$\begin{aligned} | +2 | &= 2 \\ | -2 | &= 2 \end{aligned} \Rightarrow | -2 | = | +2 | = 2$$

על ציר המספרים, מבטא הערך המוחלט את רוחק הנקודה מ-0. למשל  $| -2 | = 2$ , אומר שרוחק הנקודה -2 מ-0 הוא 2 יחידות אורך.

## 6. פעולות עם מספרים ממשיים

### 6.1 חיבור

כלל א'

בחיבור שני מספרים בעלי אותו סימן, מחברים את הערכים המוחלטים שלהם והתוצאה מקבלת את הסימן המשותף.

כלל ב'

בחיבור שני מספרים בעלי סימנים שונים, מחסירים מהערך המוחלט הגדול את הערך המוחלט הקטן של שני המחברים, והתוצאה מקבלת את הסימן של המספר בעל הערך המוחלט הגדול.

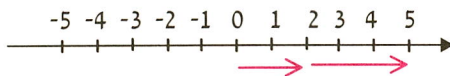
כלל ג'

בחיבור של שלושה או יותר מספרים בעלי סימנים שונים, מחברים את המספרים החיוביים לחוד, את מספרים השליליים לחוד (לפי כלל א'), ולגבי שתי התוצאות המתקבלות מפעילים את כלל ב'.

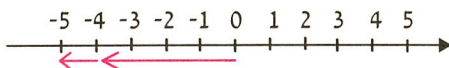
נדגים את הכללים הנ"ל בעזרת ציר המספרים.

$$\text{לפי הכלל הראשון: } (+2) + (+3) = +5$$

ועל ציר המספרים: אם נעים שני צעדים ימינה - (+2) ואחריהם שלושה צעדים ימינה - (+3) מגיעים לנקודה +5

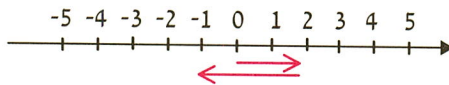


באותו אופן, אם נעים חמישה צעדים שמאלה - (-4) ואחר כך עוד צעד אחד שמאלה - (-1) מגיעים לנקודה -5.



$$(-4) + (-1) = -5$$

לעומת זאת, אם נעים שני צעדים ימינה - (+2) ואחריהם שלושה צעדים שמאלה - (-3) מגיעים לנקודה -1.



$$(+2) + (-3) = -1$$

ברור, שאם נעים מספר צעדים ימינה, למשל (+5) ואחר כך אותו מספר צעדים שמאלה - (-5) מגיעים בחזרה ל-0:

$$(+5) + (-5) = 0$$

$$(+a) + (-a) = 0$$

כלומר, **סכום של שני מספרים נגדיים שווה ל-0**:

 דוגמאות נוספות לכללים א' ו- ב':

$$(+5) + (+6) = +11$$

$$(-7) + (-8) = -15$$

$$(+8) + (-2) = +6$$

$$(+3) + (-9) = -6$$

 דוגמאות לכלל ג':

$$(+2) + (+3) + (+4) + (-5) + (-6) = (+9) + (-11) = -2$$

$$(+8) + (-4) + (-7) + (+5) + (-2) = (+13) + (-13) = 0$$

למעשה ניתן לכתוב את פעולות החיבור הללו בצורה יותר פשוטה, תוך השמטת הסוגריים והסימן (+) שביניהם (הסימן הרשום לפני מספר, צמוד למספר זה).  
למשל:

$$(+5) + (-6) + (-2) = +5 - 6 - 2 = 5 - 8 = -3$$

## הערות

- אם לפני המספר הראשון בתרגיל חישוב רשום הסימן (+) אפשר להשמיטו.
- בין לרשום שני סימנים רצופים ללא סוגריים.

## 6.2 חיסור

ראינו שהמספר הנגדי למספר (+3) הוא (-3) וגם +(-3). לפיכך, להחסיר מספר ממשי, פרושו לחבר את המספר הנגדי. ננסח זאת בכלל הבא:

## כלל ד'

**סימן (-) המופיע לפני סוגריים, הופך את סימן המספרים הרשומים בתוך הסוגריים. מתקבלת פעולה שמתבצעת לפי אחד מהכללים א - ג. למשל:**

$$(+5) - (+2) = (+5) + (-2) = 5 - 2 = 3$$

$$(-8) - (-5) = (-8) + (+5) = -8 + 5 = -3$$

## הערות

**א.** אפשר לדלג על שלב הביניים ולעבור ישירות לכתיבה ללא סוגריים, אחרי שנעשה שינוי הסימן של המספר שהוצא מהסוגריים. למשל:

$$-6 - (-4) = -6 + 4 = -2$$

$$3 - (+7) + (-4) - (-5) + (+1) = 3 - 7 - 4 + 5 + 1 = 9 - 11 = -2$$

**ב.** אם בין המחוברים, מופיעים שני מספרים נגדיים, כדאי "לבטל" אותם, שכן סכומם שווה ל-0. למשל:

$$-5 - (-4) - (+3) - (-5) = -5 + 4 - 3 + 5 = +1$$

**ג.** אם בין המחוברים מופיעים שברים פשוטים, יש לבצע את הפעולות הנחוצות (מכנה משותף, וכו') תוך הצמדת הסימן למונה. למשל:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \left(+2\frac{1}{4}\right) - \left(-1\frac{1}{6}\right) - (+4) &= -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{6} - 4 = \\ &= (2+1-4) + \left(-\frac{6/1}{2} + \frac{3/1}{4} + \frac{2/1}{6}\right) = -1 + \frac{-6+3+2}{12} = \\ &= -1 + \left(-\frac{1}{12}\right) = -1\frac{1}{12} \end{aligned}$$

פעולות החיבור והחיסור של מספרים ממשיים מופיעות יחד תחת הכותרת **חיבור אלגברי**. המאפיין אותן הוא, שבמהלך תרגיל חישוב, פעולת החיבור מחליפה את פעולת החיסור, תוך ציות לכללים שראינו בסעיף זה.

אם בתרגיל חישוב יש יותר מסוג אחד של סוגריים נוהגים לפי כלל ד', במספר שלבים: ראשית לגבי הסוגריים הפנימיים - העגולים - ואח"כ לגבי הסוגריים המכילים אותם, וכו'.



1.  $-7 - [(-3) - (-4) + (-5)] = -7 - (-3 + 4 - 5) = -7 - (-4) = -7 + 4 = -3$
2.  $1 - \{5 - [-3 - (-1) - (+2) + (-7)] - (-4)\} =$   
 $= 1 - [5 - (-3 + 1 - 2 - 7) + 4] = 1 - [5 - (-11) + 4] =$   
 $= 1 - (5 + 11 + 4) = 1 - 20 = -19$

### 6.3 כפל וחילוק

כלל ה'

- א. בכפל או בחילוק של שני מספרים ממשיים, בעלי אותו סימן, מבצעים את הפעולה בין הערכים המוחלטים של המספרים והתוצאה מקבלת את הסימן (+).
- ב. בכפל או בחילוק של שני מספרים ממשיים, בעלי סימנים שונים, מבצעים את הפעולה בין הערכים המוחלטים של המספרים והתוצאה מקבלת את הסימן (-).

דוגמאות:



$(+2) \cdot (+6) = +12$	$(+16) : (+8) = +2$
$(-5) \cdot (-4) = +20$	$(-21) : (-3) = +7$
$(-3) \cdot (+6) = -18$	$(-24) : (+4) = -6$
$(+4) \cdot (-7) = -28$	$(+15) : (-5) = -3$

כלל ו'

- בכפל או בחילוק של שלושה או יותר מספרים ממשיים, מבצעים את הפעולות הרשומות בין הערכים המוחלטים של המספרים ולתוצאה יהיה:
- א- סימן (+), אם מספר הסימנים (-), בתרגיל הוא זוגי.
  - ב- סימן (-), אם מספר הסימנים (-), בתרגיל הוא אי-זוגי.
- אין חשיבות למספר הסימנים (+) בתרגיל.

הסבר:

אם מספר הסימנים (-) הוא זוגי, הרי כל זוג סימנים כאלה נותן סימן (+), ומכפלת מספרים חיוביים היא חיובית. אם מספר הסימנים השליליים אי-זוגי, סימן אחד נשאר ללא "בן זוג", ולכן הופך את סימן הגורמים האחרים - שמכפלתם חיובית - לשלילי.

מספר זוגי של סימנים (-):  $(+2) \cdot (-3) \cdot (-1) = +6$

מספר אי-זוגי של סימנים (-):  $(-5) \cdot (-2) \cdot (-3) : (-6) = +5$

$(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) : (-2) = -3$

**שים לב** 

אם בין הגורמים בפעולת כפל מופיעים שברים פשוטים, כדאי לרשום את סימן המכפלה לפי כלל ו' ולהעתיק מחדש את גורמיה, (ללא הסימנים); עיי כד מתאפשרת פעולת צמצום.

למשל

$$(-8) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = -2$$

## 6.4 העלאה בחזקה

כלל ז'

- א. חזקה כלשהי של מספר חיובי הוא מספר חיובי.
- ב. חזקה של מספר שלילי היא:
  - חיובית, אם המעריך הוא מספר זוגי
  - שלילית, אם המעריך הוא מספר אי-זוגי.

כלל זה מבוסס על כלל ו', שכן כפי שאמרנו, פעולת ההעלאה בחזקה היא פעולת כפל מקוצר.

$(+3)^2 = +9$

$(+2)^3 = +8$

$(-3)^2 = +9$

$(-2)^3 = -8$

$-3^2 = -9$

שים לב להבדל בין התרגילים !

$$(-3)^2 = +9$$

$$-3^2 = -9$$

בתרגיל הראשון מתייחס המעריך 2 לבסיס (-3) ולפי הכלל האחרון התוצאה חיובית.

בתרגיל השני, מתייחס המעריך 2 לבסיס 3; התוצאה 9, והסימן (-) מופעל על

$$-3^2 = -1 \cdot 3^2 = -1 \cdot 9 = -9$$

התוצאה:

## 6.5 הוצאת שורש

נתייחס בשלב זה לשורש ריבועי בלבד.

לפי הכלל האחרון - ז', בהעלאת מספר ממשי - חיובי או שלילי - בריבוע מתקבלת

$$(+3)^2 = (-3)^2 = 9$$

תוצאה חיובית:

לפיכך, השורש הריבועי של 9 יכול להיות גם +3 וגם -3. נהוג לכתוב:

$$\sqrt{9} = 3$$

$$-\sqrt{9} = -3$$

$$\pm\sqrt{9} = \pm 3$$

ברור, כי:  $\sqrt{0} = 0$ , שכן  $0^2 = 0$

השאלה המתבקשת היא, מהו השורש הריבועי של מספר שלילי  $\sqrt{-9}$  או

$\sqrt{-16}$ . כפי שכבר אמרנו, הריבוע של כל מספר ממשי - חיובי או שלילי - הוא מספר

חיובי; לכן בקבוצת המספרים הממשיים לא קיים מספר שהוא השורש הריבועי

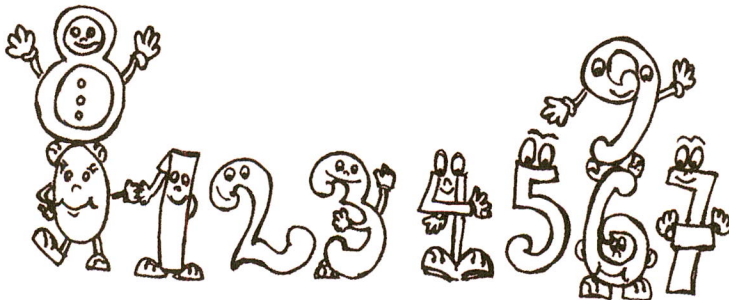
של מספר שלילי. אומרים ש-  $\sqrt{-9}$  הוא חסר משמעות, או לא מוגדר. בצורה

אחרת התוצאה של פעולה זו היא  $\phi$  - קבוצה ריקה.

חידה

כיצד אפשר להשתמש בכל הספרות 0-9 (כל אחת פעם אחת) כדי

ליצור מספרים שסכומם 1?



תשובה: 1 =  $\frac{35}{70} + \frac{148}{296}$  או  $1 = \frac{48}{96} + \frac{135}{270}$

# תרגילים

## תשובות לתרגילים בעמוד 22.

### סעיפים 2, 3

א. העזר בחוק החילוף ובחוק הקיבוץ כדי לחשב בעל פה:

- |                          |                                   |                             |
|--------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $87+280+113+20$       | 2. $1127+500+373$                 | 3. $456+200+344$            |
| 4. $4 \cdot 17 \cdot 25$ | 5. $(4 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 25$ | 6. $8 \cdot (21 \cdot 125)$ |
| 7. $24 \cdot 125$        | 8. $125 \cdot 2.9 \cdot 8$        | 9. $56 \cdot 25$            |

ב. העזר בחוק הפילוג כדי לחשב:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $45 \cdot 88 + 45 \cdot 12$                | 2. $126 \cdot 24 + 126 \cdot 16 + 126 \cdot 60$ |
| 3. $75 \cdot 211 - 75 \cdot 61 - 75 \cdot 50$ | 4. $134 \cdot 15 + 134 \cdot 50 + 134 \cdot 35$ |
| 5. $273 \cdot 23 - 173 \cdot 23$              | 6. $61 \cdot 101$                               |

ג. פתור לפי סדר פעולות החשבון

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $14 \cdot 5 + 0.6 \cdot 15$   | 2. $4 \cdot 5.25 - 2.1 : 0.7$  | 3. $4 \frac{3}{7} \cdot 3 \frac{1}{2} : 15 \frac{1}{2}$   |
| 4. $3 \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{13} + 1 \frac{4}{7} : \frac{11}{14}$  | 5. $(4 \cdot 5.5 + 8) : 10$  | 6. $(7.2 : 0.36 - 6 \cdot 2.5) : 5$   |
| 7. $\frac{81.6 \cdot 1.2 \cdot 1.3}{22.1 \cdot 0.24}$  | 8. $\frac{47 \cdot 18.3 \cdot 0.32}{3.66 : 0.3 \cdot 1.88}$  | 9. $\frac{(7.3 + 2.7) \cdot 0.6}{(3.5 - 1.5) \cdot 6 \cdot 0.5}$  |
| 10. $\frac{(4.45 - 2.2) \cdot 8 : 0.3}{(0.823 + 0.177) \cdot 240}$   | 11. $\frac{3 : (0.2 - 0.1)}{2.5 \cdot (0.8 + 1.2)}$  | 12. $\frac{(34.06 - 33.81) \cdot 4}{6.84 : (28.57 - 25.15)}$  |
| 13. $\frac{3.75 + 2 \frac{1}{2}}{2 \frac{1}{2} - 1.875}$   | 14. $\frac{2 \frac{3}{4} - 15}{2.75 - 1 \frac{1}{2}}$  | 15. $5.85 - 3 \frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{28}{4 \frac{2}{7}}$                                       |
| 16. $\frac{2 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{1}{2} - 1.25}{6 \frac{3}{8} - 1 \frac{1}{4} : \frac{5}{18}}$          | 17. $\frac{\left(19 \frac{1}{6} + 43.75\right) : \frac{5}{6}}{\left(13.3 - 11 \frac{1}{2}\right) : 1.8}$ | 18. $\frac{\left(2.7 - \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{7}}{\left(5.2 - 1 \frac{2}{5}\right) \cdot 2 \frac{1}{3}}$ |
| 19. $1 \frac{7}{8} \cdot 8 - \left(8.9 - 2.6 : \frac{2}{3}\right) + 12 \frac{1}{3}$                          |  |   |
| 20. $\left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{225}\right) \cdot 9 + 0.16\right] : \left(\frac{1}{3} - 0.3\right)$ |  |   |

21.  $\left[ \left( 0.75 : \frac{5}{6} \right) : 0.9 \right] + \frac{3}{4} : \left( \frac{5}{6} : 2 \frac{2}{9} \right)$
22.  $\left( 12 \frac{4}{5} \cdot 3 \frac{3}{4} - 4 \frac{4}{11} \cdot 4.125 \right) : \left( 2 \frac{4}{9} : \frac{11}{36} \right)$
23.  $48 : 0.32 : \left[ (3 - 2.7) \cdot 1 \frac{2}{3} + 4 \frac{3}{4} : 3 \frac{1}{6} \right]$
24.  $2 \cdot \left\{ 1.5 \left[ 10 - 2(2.3 + 1.7) \right] + 2.5 \cdot 4 \right\} : (15.7 - 2.7)$
25.  $15 \cdot 4.5 : 1.5 - 2 \cdot \left\{ 13 - 2 \left[ 0.8 + 2(4.6 - 2) \right] \right\}$
26.  $\left( 4.5 \cdot 2 + 3 \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \right) : 2 - \frac{2}{3} \left\{ 5 \left[ 1.2 + 12(5.7 - 5.3) \right] - 18 \right\}$

### סעיפים 5, 6

ד. כתוב את המספר הנגדי למספר המופיע בכל סעיף, וקבע מי מהם יותר גדול.

- |                     |         |       |         |
|---------------------|---------|-------|---------|
| 1. (+2)             | 2. (-3) | 3. 0  | 4. -1.5 |
| 5. $+2 \frac{1}{2}$ | 6. -17  | 7. +a | 8. -b   |

ה. רשום את הערכים המוחלטים של כל זוג מספרים שבתרגיל הקודם (הנתון וזה שמצאת). מה תוכל לומר על שני הערכים המוחלטים שבכל סעיף.

ו. קבע איזה מבין שני המספרים יותר גדול.

- |                |                |               |
|----------------|----------------|---------------|
| 1. (+5), (+3)  | 2.  +5 ,  +3   | 3. (-4), (-2) |
| 4.  -4 ,  -2   | 5. (+13), (-7) | 6.  +13 ,  -7 |
| 7. (-20), (+9) | 8.  -20 ,  +9  | 9.  -7 ,  +7  |

ז. נתונים שני מספרים חיוביים a ו-b וידוע ש-a הגדול מביניהם. איזה מבין הערכים המוחלטים שלהם יותר גדול.

ח. נתונים שני מספרים שליליים c ו-d וידוע ש-d הגדול מביניהם. איזה מבין הערכים המוחלטים שלהם יותר גדול.

ט. ידוע שהמספר m גדול ממספר k. האם אפשר להסיק מסקנה, איזה מבין הערכים המוחלטים שלהם יותר גדול.  
תן 2 דוגמאות המבססות את תשובתך.

י. העזר בציר המספרים וקבע איזה מבין שני המספרים הרשומים בכל סעיף יותר גדול.

- |                                    |                                    |                             |
|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 1. 2, 3                            | 2. 4, 0                            | 3. -3, 5                    |
| 4. 0, -1                           | 5. +4.5, 0                         | 6. -4, 2                    |
| 7. -6, 6                           | 8. $-26, -2\frac{2}{3}$            | 9. $-3.7, +3\frac{2}{3}$    |
| 10. $-3\frac{2}{3}, -\frac{15}{4}$ | 11. $-\frac{19}{8}, -2\frac{5}{7}$ | 12. $-13\frac{1}{2}, +13.5$ |

יא. רשום את הערכים המוחלטים של המספרים שבתרגיל הקודם וקבע לאיזה מהמספרים מכל סעיף ערך מוחלט יותר גדול.

יב. בכל אחד מהסעיפים הבאים יש לסדר את המספרים בסדר עולה - משמאל לימין.

- |  |  |
|--|--|
| 1. 45, 3, 24, 0, 105, 27, 17             | 2. +28, -11.5, 10, -1, -28                                       |
| 3. -8, -39, -19.4, 92, -10.5             | 4. -5, 3, 0, -4.5, -7, -4, 2                                     |
| 5. -5, -6.5, 0, $-\frac{32}{5}$ , -3, -8 | 6. 4.6, -0.82, $-\frac{8}{10}$ , $4\frac{3}{7}$ , $-\frac{3}{5}$ |

יג. העזר בציר המספרים כדי למצוא את המספר שיש לרשום במקום הסימן "??". למשל, בפתרון התרגיל:  $+3 + ? = -4$ , כדי להגיע מהנקודה (+3) לנקודה (-4), נחוצים 7 צעדים לכיוון השלילי, כלומר (-7):  $(+3) + (-7) = -4$

- |                                   |                                       |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $(+2) + (+3) = ?$              | 2. $(+5) + ? = +8$                    |
| 3. $(-4) + (-3) = ?$              | 4. $(-3) + ? = -5$                    |
| 5. $(-5) + (+2) = ?$              | 6. $(+4) + ? = -1$                    |
| 7. $? + (-2) = 0$                 | 8. $(+7) + ? = 0$                     |
| 9. $? + (-6) = +3$                | 10. $(+5) + ? = (-3) + (+3)$          |
| 11. $(-4) + (+2) + ? = -7$        | 12. $(+3) + ? + (+4) = -1$            |
| 13. $(-5) + (+7) = ? + (-7)$      | 14. $(-11) + (+6) + (-1) = (-2) + ?$  |
| 15. $(-4) + (-9) + ? = -7$        | 16. $(+8) + (+7) + ? + (-7) = 0$      |
| 17. $(+3) + (-8) + (+4) = -1 + ?$ | 18. $(-42) + (+2) + ? + (+41) = (-2)$ |
| 19. $(-1) + (-3) + (+1) = 4 + ?$  | 20. $? + (+6) + (-1) = -8 + (-2)$     |

יד. חבר :

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. $(+2)+(+5)$                     | 2. $+3.5+(+4.5)$                                   |
| 3. $(5)+(-3)$                      | 4. $-4+(-6)$                                       |
| 5. $-2\frac{3}{4}+(-5\frac{1}{4})$ | 6. $4\frac{1}{7}+(-\frac{1}{7})$                   |
| 7. $12+(+18)+(+1)$                 | 8. $-7+(-11)+(-3)$                                 |
| 9. $-5+(+3)+(+5)$                  | 10. $6.2+(-1.2)+(-5)$                              |
| 11. $4\frac{1}{5}+(-9\frac{1}{5})$ | 12. $-\frac{2}{3}+(+5\frac{1}{3})+(-1\frac{2}{3})$ |
| 13. $-8+(+5.3)+(-1.3)$             | 14. $-5+(+12)+(-7.1)$                              |
| 15. $14+(-11)+(+8)+(-17)$          | 16. $(-4.1)+(+3)+(-0.9)+(+2)$                      |
| 17. $+12+ -5 +(-7)$                | 18. $-3+ -4 +(+6)$                                 |
| 19. $-2+ -5 +(-5)+ -2 $            | 20. $-4+ -7 + +3 +(-2)$                            |

טו. חסר :

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1. $(+7)-(+5)$                     | 2. $-4-(-6)$                              |
| 3. $17-(+9)$                       | 4. $-(-5)-(-2)$                           |
| 5. $-(+3)-(-12)$                   | 6. $10.3-(+8.7)$                          |
| 7. $-4.5-(-10.2)$                  | 8. $2-(-1.5)-(+4.5)$                      |
| 9. $-3\frac{1}{3}-(-9\frac{2}{3})$ | 10. $-4\frac{1}{4}-(+5\frac{3}{4})-(-10)$ |
| 11. $17-(-14)-(+30)$               | 12. $-23-(+34)-(-57)$                     |
| 13. $-(-3.5)-(+9.1)-(-5)$          | 14. $-(+0.7)-(-4.9)-(-0.2)$               |
| 15. $ -9 -(-9)-(+10)$              | 16. $-3- -1 -(-4)$                        |
| 17. $-(-5)-(+2)- -7 $              | 18. $- -4 - +2 - -5 $                     |
| 19. $-20-(-17)- (-5)-(-7) $        | 20. $ -3- -1  - -8- -1  $                 |

טז. חשב :

- $+2+(-4)-(+5)-(-7)$
- $-18+(-3)-(+2)-(-18)$
- $12+(-10)-(+14)+(+17)$
- $-34-(-4)+(+28)-(-35)-(+31)$
- $102+(-2)-(-5)-(-15)-(+100)$

6.  $-4.3 - (-8) + (-5.2) - (+12) - (-1.5)$
7.  $-2.5 - (-1\frac{1}{2}) + (-3.4) - (-7) - |-8|$
8.  $6 - (+4.12) - (-9.5) + (-1.08) + (+16)$
9.  $-(-5) - (+2.4) + (-6.6) - (-3.8) + (+2.2)$
10.  $-2\frac{1}{4} - |-3.7| - (-4) + 2.8 + (-4\frac{1}{2}) - 0.9$
11.  $-\frac{3}{4} - |-\frac{1}{2}| - (-\frac{1}{8})$
12.  $1\frac{1}{2} - (+1\frac{1}{10}) - (-\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{2})$
13.  $-1\frac{1}{3} + (-\frac{1}{6}) - (-1\frac{1}{2}) - |-\frac{2}{3}|$
14.  $-2\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{4}) + (-1\frac{1}{6}) - (+\frac{3}{4}) - (+\frac{5}{4})$
15.  $-8 + |-7| + |-13 + 6|$
16.  $-5 - |-26 + 5| + |-3 - 13|$
17.  $-(6 + 5) + (-7) - (-8 + 9)$
18.  $-(-17 + 15 - 3) + (-4 + 7 - 8)$
19.  $3 - |4 - (5 - 6 + 4 - 8)|$
20.  $-|2 - 3 + 10| - [(4 - 7) - (9 - 2 + 3)]$
21.  $-4 + 3 - [-5 - (7 - 17) + 8]$
22.  $12 - \{-5 - [4 + (-7) - (-9)]\}$
23.  $-5 - \{4 - 5 - [2 + (-3) - (-4 - 5 + 7)] - 1\}$
24.  $12 - \{5 - [-30 + 11 - (-11 + 7 - 5)] + 13\}$

### סעיפים 6.3 - 6.5

י. קבע את הסימן של כל אחת מהמכפלות הבאות (הסמל  $\nabla$  מציין מספר חיובי).

1.  $(+\nabla) \cdot (+\nabla)$
2.  $(+\nabla) \cdot (+\nabla) \cdot (\nabla)$
3.  $(-\nabla) \cdot (-\nabla)$
4.  $(-\nabla) \cdot (+\nabla)$
5.  $(-\nabla) \cdot (+\nabla) \cdot (-\nabla)$
6.  $(-\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (-\nabla)$
7.  $(-\nabla) \cdot (+\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (-\nabla)$
8.  $(+\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (+\nabla) \cdot (+\nabla) \cdot (+\nabla)$
9.  $(-\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (-\nabla) \cdot (-\nabla)$
10. מכפלה של 17 מספרים חיוביים
11. מכפלה של 84 מספרים שליליים
12. מכפלה של 57 מספרים שליליים

13. מכפלה של 21 מספרים חיוביים ו-22 מספרים שליליים.  
 14. מכפלה של 15 מספרים חיוביים ו-29 מספרים שליליים.

יח. כפול:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(+2) \cdot (-3)$  | 2. $3 \cdot (+4)$   |
| 3. $(-4) \cdot (-2)$  | 4. $-3 \cdot (-5)$  |
| 5. $(+2) \cdot (-3) \cdot (+4)$   | 6. $(-2) \cdot (+5) \cdot (-15)$  |
| 7. $(+6) \cdot (-1) \cdot (+2) \cdot (-3)$                                  | 8. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (+4)$  |
| 9. $-(-25) \cdot (+2) \cdot (-1) \cdot (-3)$                                | 10. $(-\frac{1}{3}) \cdot (-1\frac{1}{2}) \cdot (+4)$   |
| 11. $-(-1\frac{1}{4}) \cdot (+\frac{3}{5}) \cdot (-6) \cdot (+\frac{2}{3})$ | 12. $(-1\frac{1}{5}) \cdot (-12) \cdot (-1\frac{1}{4}) \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (-\frac{3}{4})$ |
| 13. $-(-5) \cdot  -2  \cdot (+3) \cdot (-1)$                                | 14. $- -4  \cdot (+2) \cdot  -3  \cdot  -1 $  |
| 15. $-8 \cdot  -1  \cdot  -2  \cdot -\frac{1}{4}$                           | 16. $ -3  \cdot  -2  \cdot (-5) \cdot  -\frac{1}{3} $   |

יט. נתונה מכפלה של שני מספרים ממשיים:  $a \cdot b = c$   
 האם ישתנה סימן המכפלה, אם נרשום:

- 1 - במקום a, מספר נגדי לו.
- 2 - במקום b, מספר נגדי לו.
- 3 - את המספרים הנגדיים ל-a ול-b במקומם.

כ. נתונה מכפלה של שלושה מספרים ממשיים:  $a \cdot b \cdot c = d$   
 האם ישתנה סימן המכפלה, אם נרשום:

- 1 - במקום b, מספר נגדי לו.
- 2 - במקום b ו-c את המספרים הנגדיים להם.
- 3 - במקום a, b ו-c, את המספרים הנגדיים להם.

כא. נסח באופן כללי: אם במכפלה של מספר גורמים נרשום

- 1 - במקום גורם אחד את הנגדי לו, סימן המכפלה ...
- 2 - במקום שני גורמים את הגורמים הנגדים להם, סימן המכפלה ...

כב. חלק.

- |                           |                            |                          |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1. $+12:(+4)$             | 2. $(28):(-7)$             | 3. $(25):( +5)$          |
| 4. $48:(-8)$              | 5. $-10:(-0.1)$            | 6. $-45:0.45$            |
| 7. $\frac{-16}{-8}$       | 8. $\frac{+24}{-6}$        | 9. $-5:(-\frac{1}{3})$   |
| 10. $-14:(-3\frac{1}{2})$ | 11. $(-\frac{2}{3}):( +2)$ | 12. $-1\frac{3}{5}:(-8)$ |

13.  $\frac{1}{6} : \left(-\frac{2}{3}\right)$

14.  $\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(+\frac{2}{5}\right)$

15.  $\left(-1\frac{3}{7}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right)$

16.  $-33 : |-11|$

17.  $|-1\frac{1}{3}| : \left(-\frac{1}{3}\right)$

18.  $|-1\frac{1}{4}| : \left|-\frac{1}{4}\right|$

**כג.** מהו סימן התוצאה של כל אחד מהתרגילים הבאים (המשולש מכיל מספרים חיוביים)

1.  $(+\nabla)^4$

2.  $(+\nabla)^9$

3.  $(-\nabla)^{12}$

4.  $(-\nabla)^{100}$

5.  $(-3) \cdot (+\nabla)^{71}$

6.  $(-2) \cdot (-\nabla)^{93}$

7.  $-(-\nabla)^{76}$

8.  $-(+\nabla)^{99}$

9.  $-(-\nabla)^{44}$

10.  $(-\nabla)^{64} \cdot (-\Delta)^{37}$

11.  $(-\nabla)^{87} \cdot (-\Delta)^{105}$

12.  $(-\nabla)^{48} \cdot (-\Delta)^{117}$

**כד.** חשב

1.  $(+2)^4$

2.  $(+3)^3$

3.  $(-4)^2$

4.  $(-2)^5$

5.  $(-3) \cdot (+2)^3$

6.  $-4 \cdot (-3)^4$

7.  $-2 \cdot (-3)^3$

8.  $-(-3)^4$

9.  $-(-2)^5$

10.  $-(+2)^6$

11.  $-(+1)^9$

12.  $(-2)^4 \cdot (-3)^2$

13.  $(-1)^5 \cdot (-3)^3$

14.  $-(-2)^4 \cdot (-1)^6$

15.  $-(-2)^3 \cdot (-1)^7$

**כה.** חשב

1.  $\sqrt{9}$

2.  $\sqrt{16}$

3.  $\sqrt{49}$

4.  $\sqrt{-36}$

5.  $\sqrt{0.25}$

6.  $\sqrt{0.04}$

7.  $\sqrt{+1.44}$

8.  $\sqrt{-1.21}$

9.  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$

10.  $\sqrt{\frac{4}{25}}$

11.  $\sqrt{\frac{-4}{49}}$

12.  $\sqrt{\frac{-16}{-81}}$

13.  $\sqrt{1\frac{11}{25}}$

14.  $\sqrt{\frac{-72}{-2}}$

15.  $\sqrt{3\frac{13}{36}}$

16.  $\sqrt{(-25)(-4)}$

17.  $\sqrt{15^2}$

18.  $\sqrt{(-8)^2}$

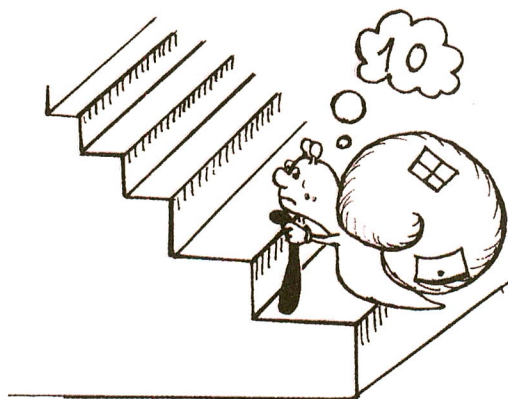
- |                             |                                    |                                  |
|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $11+7-8$                 | 2. $14-5+7$                        | 3. $14-(5+7)$                    |
| 4. $14-(8+7)$               | 5. $36:9 \cdot 2$                  | 6. $36:(9 \cdot 2)$              |
| 7. $81:(27:3)$              | 8. $14 \cdot 2:7$                  | 9. $3 \cdot 5+4$                 |
| 10. $3 \cdot (5+4)$         | 11. $13+14:7$                      | 12. $15-72:3$                    |
| 13. $(15-12):3$             | 14. $3 \cdot 5-4:2$                | 15. $3 \cdot (7-3):6$            |
| 16. $3 \cdot 5+6:2-10$      | 17. $2^2+3^2$                      | 18. $2^3-5^2$                    |
| 19. $2 \cdot 3^2$           | 20. $3^2 \cdot 2^3$                | 21. $(3 \cdot 2)^2$              |
| 22. $(2+5)^2$               | 23. $(3 \cdot 2-1)^2$              | 24. $14-39:3+3^2$                |
| 25. $(3 \cdot 2+4) \cdot 5$ | 26. $(15:3-12) \cdot 2$            | 27. $(4 \cdot 7-6:2):8$          |
| 28. $24:(7 \cdot 2-12:2)$   | 29. $(4 \cdot 6+2^2):10-2 \cdot 3$ | 30. $2^4+3(5 \cdot 7-4 \cdot 9)$ |

- |   |  |
|---|--|
| 31. $(8 \cdot 5+3 \cdot 5):11-2 \cdot 5 \cdot 6$  | 32. $(124+2) \cdot 2^2+2 \cdot (4 \cdot 5-8 \cdot 3)$                        |
| 33. $45:(5 \cdot 2-4 \cdot 0.25)-(3-4 \cdot 2) \cdot 2$   | 34. $(7 \cdot 3-19)^2+(13-3 \cdot 5) \cdot 2$                                |
| 35. $(3 \cdot 2^2-14)^2-2:(3 \cdot 5-2^2)$  | 36. $3.5 \cdot \sqrt{4}-4(5:2.5-10:2)+1$                                     |
| 37. $(7 \cdot 3-4 \cdot 5)(6 \cdot 8-9 \cdot 5)$  | 38. $(4 \cdot 2.5+5 \cdot 3)(2 \cdot 0.8-1.8)$                               |
| 39. $5 \cdot (3.7-0.35 \cdot 2)(0.5-5:2)$   | 40. $(3 \cdot 2^2+3)(4-3 \cdot 2):(1+3^2)$                                   |
| 41. $(2^2-5)^3(3-12:3):(4-4 \cdot 1.25)$  | 42. $2+4\left[4\frac{1}{4}-(3 \cdot 2-8)\right]$                             |
| 43. $\sqrt{25} \cdot 3-\left[2 \cdot 1\frac{1}{4}-3(2^2-6:4)\right]$  | 44. $[3^3-(4 \cdot 5+2)]:4 \cdot \sqrt{9}$                                   |
| 45. $2[4^2-(6 \cdot 4-5)]-(5 \cdot 3-6:2)$  | 46. $(2 \cdot 3^2+3)\left[(5:2-1.25) \cdot 2-4\frac{1}{2}\right]$            |
| 47. $\left\{[(2 \cdot 3-4)^2+1] \cdot 3-4 \cdot 5\right\}:4+1.25$   | 48. $2 \cdot \left\{3.5-\left[2.5 \cdot 3+4(7.3-2.9 \cdot 2)\right]\right\}$ |
| 49. $4 \cdot 1.5-\left\{3+2\left[6:1\frac{1}{2}-\left(3 \cdot 2\frac{1}{3}-8\right)\right]\right\}$                                     |  |
| 50. $\left(4 \cdot 2\frac{1}{4}+1\right)^2-\left\{3-\left[7\frac{1}{2}-2\left(5 \cdot 2\frac{2}{5}-12\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$ |  |

תשובות

1. 500, 2. 2000, 3. 1000, 4. 1700, 5. 2100, 6. 21000, 7. 3000, 8. 2900, 9. 1400	א.
1. 4500, 2. 12600, 3. 7500, 4. 13400, 5. 2300, 6. 6161	ב.
1. 16, 2. 18, 3. 1, 4. $2\frac{1}{2}$ , 5. 3, 6. 1, 7. 24, 8. 12, 9. 1, 10. 0.25, 11. 6, 12. $\frac{1}{2}$ , 13. 10, 14. 1, 15. 3.475, 16. $2\frac{8}{9}$ , 17. 75.5, 18. $\frac{1}{2}$ , 19. $22\frac{1}{3}$ , 20. 15, 21. 3, 22. $3\frac{3}{4}$ , 23. 75, 24. 2, 25. 43, 26. 0	ג.
1. -2, +2, 2. 3, 3, 3. 0, 4. 1.5, 1.5, 5. $-2\frac{1}{2}$ , $2\frac{1}{2}$ , 6. 17, 17, 7. -a, 8. b	ד.
ערכים מוחלטים של כל זוג מספרים נגדיים שווים זה לזה.	ה.
1. 5, 2. $ +5 $ , 3. $(-2)$ , 4. $ -4 $ , 5. $(+13)$ , 6. $ +13 $ , 7. $(+9)$ , 8. $ -20 $ , 9. שווים	ו.
$ a  >  b $	ז.
$ c  >  d $ : בין שני מספרים שליליים למספר הגדול הערך המוחלט הקטן; אי אפשר לקבוע.	ח.
1. 3, 2. 4, 3. 5, 4. 0, 5. 4.5, 6. 2, 7. 6, 8. $-2\frac{2}{3}$ , 9. $+3\frac{2}{3}$ , 10. $-3\frac{2}{3}$ , 11. $-2\frac{3}{8}$ , 12. 13.5	י.
1. $ 3  >  2 $ , 2. $ 4  >  0 $ , 3. $ 5  >  -3 $ , 4. $ -1  >  0 $ , 5. $ 4.5  >  0 $ , 6. $ -4  >  2 $ , 7. $ -6  =  6 $ , 8. $ -26  >  -2\frac{2}{3} $ , 9. $ -3.7  >  3\frac{2}{3} $ , 10. $ \frac{-15}{4}  >  -3\frac{2}{3} $ , 11. $ -2\frac{5}{7}  >  -\frac{19}{8} $ , 12. $ -13\frac{1}{2}  =  13.5 $	יא.
1. 0, 3, 17, 24, 27, 45, 105 2. -28, -11.5, -1, 10, 28 3. -39, -19.4, -10.5, -8, 92 4. -7, -5, -4.5, -4, 0, 2, 3 5. -8, -6.5, $-\frac{32}{5}$ , -5, -3, 0 6. -0.82, $-\frac{8}{10}$ , $-\frac{3}{5}$ , $4\frac{3}{7}$ , 4.6	יב.
1. 5, 2. 3, 3. -7, 4. -2, 5. -3, 6. -5, 7. 2, 8. -7, 9. 9, 10. -5, 11. -5, 12. -8, 13. 9, 14. -4, 15. 6, 16. -8, 17. 0, 18. -3, 19. -7, 20. -15	יג.
1. 7, 2. 8, 3. 2, 4. -10, 5. -8, 6. 4, 7. 31, 8. -21, 9. 3, 10. 0, 11. -5, 12. 3, 13. -4, 14. -0.1, 15. -6, 16. 0, 17. 10, 18. 7, 19. 0, 20. 4	יד.
1. 2, 2. 2, 3. 8, 4. 7, 5. 9, 6. 1.6, 7. 5.7, 8. -1, 9. $6\frac{1}{3}$ , 10. 0, 11. 1, 12. 0, 13. -0.6, 14. 4.4, 15. 8, 16. 0, 17. -4, 18. -11, 19. -5, 20. -5	טו.
1. 0, 2. -5, 3. $(+5)$ , 4. 2, 5. 20, 6. -12, 7. -5.4, 8. 26.3, 9. 2, 10. -4.55, 11. $-1\frac{1}{8}$ , 12. $\frac{1}{2}$ , 13. $-\frac{2}{3}$ , 14. $-4\frac{5}{12}$ , 15. 6, 16. -10, 17. -19, 18. 0,	טז.

19.-6, 20.4, 21.6, 22.23, 23.-2, 24.-16	
1.(+), 2.(+), 3.(+), 4.(-), 5.(+), 6.(-), 7.(+), 8.(-), 9.(-), 10.(+), 11.(+), 12.(-), 13.(+), 14.(-)	יז.
1.-6, 2.12, 3.8, 4.15, 5.-24, 6.150, 7.36, 8.-24, 9.150, 10.2, 11.-3, 12.-3, 13.-30, 14.-24, 15.4, 16.-10	יח.
1. ישתנה לנגדי 2. ישתנה לנגדי 3. לא ישתנה	יט.
1. כן 2. לא 3. כן	כ.
1. ישתנה 2. לא ישתנה	כא.
1.3, 2.-4, 3.5, 4.-6, 5.100, 6.-100, 7.2, 8.-4, 9.15, 10.4, 11.- $\frac{1}{3}$ , 12. $\frac{1}{5}$ , 13.- $\frac{1}{4}$ , 14.- $1\frac{1}{2}$ , 15.2, 16.-3, 17.-4, 18.5	כב.
1.(+), 2.(+), 3.(+), 4.(+), 5.(-), 6.(+), 7.(-), 8.(-), 9.(-), 10.(-), 11.(+), 12.(+)	כג.
1.16, 2.27, 3.16, 4.-32, 5.-24, 6.-324, 7.54, 8.-81, 9.32, 10.-64, 11.-1, 12.144, 13.27, 14.-16, 15.-8	כד.
1.3, 2.4, 3.7, 4.(לא מוגדר בתחום המספרים הממשיים), 5.0.5, 6.0.2, 7.1.2, 8. ליימ, 9. ליימ, 10. $\frac{2}{5}$ , 11. ליימ, 12. $\frac{4}{9}$ , 13. $1\frac{1}{5}$ , 14.6, 15. $1\frac{5}{6}$ , 16.0, 17.15, 18.-8	כה.
1.10, 2.16, 3.2, 4.-1, 5.8, 6.2, 7.9, 8.4, 9.19, 10.27, 11.15, 12.-9, 13.1, 14.13, 15.2, 16.8, 17.13, 18.-17, 19.18, 20.72, 21.36, 22.49, 23.25, 24.10, 25.50, 26.-14, 27. $3\frac{1}{8}$ , 28.3 29.0.5, 30.13, 31.-10, 32.496, 33.15, 34.0, 35.8, 36.20, 37.3, 38.-5, 39.-30, 40.-3, 41.-1, 42.27, 43.20, 44. $3\frac{3}{4}$ , 45.-18, 46.-42, 47.0, 48.-20, 49.-7, 50.105.	כו.



חידה  
חללון עולה ביום 2 מדרכות  
ובלילה יורד מדרכה אחת.  
תוק כמה ימים יצלה  
לראשונה על  
המדרכה העשירית?

תשובה: אחרי 9 ימים..

## פרק ב': תבנית מספר

### 1. תבניות מספר ומאפייניהן

#### 1.1 תבנית מספר או ביטוי אלגברי

זוהי קבוצת אותיות ומספרים הקשורים ע"י פעולות החשבון.

דוגמה לתבניות מספר:  $2a+b$ ,  $2xy$ ,  $c$ ,  $3x-4m$ ,  $\frac{4a}{5}$ .

מבחינים בין שני סוגים של ביטויים אלגבריים: חד-אבר ורב-אבר

**חד-אבר** זהו אוסף של מספרים ואותיות, או אותיות בלבד הקשורים ע"י פעולות חשבון, כאשר הפעולה האחרונה איננה חיבור או חיסור.

הביטויים  $a$ ,  $3xy$ ,  $\frac{5a-1}{b+cd^2}$ ,  $\frac{m(3a+b)}{2k}$ ,  $\frac{2m}{3(c+b)}$  הם חד-אבריים.

פעולות החיבור והחיסור שבביטויים:  $c+b$ ,  $b+cd^2$ ,  $3a+b$ ,  $5a-1$ , אינן פעולות אחרונות (בסדר פעולות החשבון).

המספר הרשום משמאל לחד-אבר וקשור לאות, או לקבוצת אותיות שלידו בפעולת כפל, נקרא **מקדם**.

בתבנית  $2ab$  המקדם הוא 2, בתבנית  $\frac{4a}{5}$  המקדם הוא  $\frac{4}{5}$ , שכן אפשר לכתוב  $\frac{4}{5}a$

ואילו בתבנית  $c$ , המקדם הסמוי הוא  $1 \cdot c$ .

כללית, נהוג להשמיט את סימן הכפל בין האותיות או בין המקדם לאות שמימינו. למשל, נכתוב  $2b$  ולא  $2 \cdot b$  וכן  $3bm^2$  ולא  $3 \cdot b \cdot m^2$ .

חלק הביטוי שהמקדם כופל, נקרא **הגודל הראשי או החלק הראשי**.

למשל,  $b$  הוא הגודל הראשי של  $2b$ , ואילו בביטוי  $3bm^2$ , הגודל הראשי הוא  $bm^2$ .

למעשה,  $2b$  זוהי כתיבה מקוצרת של  $b+b$  ואילו  $3bm^2$  זאת כתיבה מקוצרת של  $bm^2 + bm^2 + bm^2$ .

בחד-אבר  $\frac{5a}{b+c}$  (או  $5 \cdot \frac{a}{b+c}$ ), המקדם הוא 5 והגודל הראשי  $\frac{a}{b+c}$ .

בחד-אבר  $\frac{m(a+b)}{2k}$  (או  $\frac{1}{2} \cdot \frac{m(a+b)}{k}$ ) המקדם הוא  $\frac{1}{2}$  והגודל הראשי  $\frac{m(a+b)}{k}$ .

בחד-אבר  $\frac{2(a-d)}{3(c+d)}$  המקדם הוא  $\frac{2}{3}$  והגודל הראשי  $\frac{a-d}{c+d}$ .

**רב-אבר** זוהי תבנית מספר המורכבת מסכום אלגברי של חד-אברים. למשל:  $2a+3xy$  הוא **דו-אבר** ("דו" מצביע על 2 חד-אברים), בלועזית - **בינום**.  $x+5a-4mn$  הוא **תלת-אבר** (שלושה חד-אברים), בלועזית **טרינום**, כו'. לכל אחד מהמחוברים שברב-אבר, יש מקדם וגודל ראשי משלו.

## 1.2 ערך הביטוי

**ערך הביטוי** מתקבל ע"י הצבת מספרים במקום האותיות המופיעות בתבנית המספר, וביצוע פעולות החשבון הרשומות.

למשל, ערך הביטוי  $4a-1$ , כאשר  $a = 1$  הוא:  $4 \cdot 1 - 1 = 3$   
וכאשר  $a = -2$  ערך הביטוי הוא:  $4(-2) - 1 = -9$

ערך הביטוי  $2ab+3$ , כאשר  $a = 2$ ,  $b = -1$  הוא:  $2 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 = -1$   
וכאשר  $a = -5$ ,  $b = -3$ , הערך הוא:  $2 \cdot (-5) \cdot (-3) + 3 = 33$

ערך הביטוי  $3a^2 - 5a + 2$  כאשר  $a = 1$  הוא:  $3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$   
להצבה  $a = 0$  מתקבל הערך:  $3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 = 2$   
ולהצבה  $a = -2$  מתקבל:  $3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 24$

הדוגמאות הללו מצביעות על כך, שערך הביטוי משתנה בהתאם לערך האות או האותיות המופיעות בה. התאמה זו בין ערך הביטוי למספרים שמציבים במקום בערכי האותיות המופיעות בו מכונה בשם פונקציה (נושא הפונקציה נדון בפרק יב'). במילים אחרות, הפונקציה מראה את התלות בין ערך הביטוי לערך האותיות המופיעות בה. נהוג לסמן את הקשר הזה באות לועזית, ובתוך סוגריים שלידה רשומות האותיות שבהן היא קשורה. למשל, הקשר  $F(a) = 4a - 1$ , שראינו בדוגמה הראשונה, אומר שהפונקציה F מתאימה לכל מספר שמציבים במקום a, את המספר השווה ל-4a.

כותבים :  $F(-2) = -9$  ,  $F(1) = 3$

את הביטוי בדוגמה השניה אפשר לסמן :  $H(a, b) = 2ab + 3$  . ואז :  $H(2, -1) = -1$

ובדוגמה השלישית הסימון  $G(a) = 3a^2 - 5a + 2$  , מאפשר לרשום :

$$G(-2) = 24 , G(0) = 2 , G(1) = 0$$

נדון בנושא הפונקציה בהרחבה בפרק יב.

### 1.3 תחום ההצבה

חלק מפעולות החשבון הן פעולות מוגבלות. למשל, ההגבלה בפעולת החילוק : אין לחלק ב-0, כי זה לא מוגדר. ההגבלה בפעולת הוצאת שורש ריבועי : הביטוי בתוך השורש אינו יכול להיות שלילי, כי הפעולה אינה מוגדרת.

**תחום ההצבה** של תבנית מספר זו קבוצת כל הערכים, שהצבתם במקום האותיות שבתבנית, מאפשרת את ביצוע הפעולות הרשומות בה.

#### דוגמאות

- א.** בתבנית  $3a+5$  כל ערך מספרי שמציבים במקום  $a$  מאפשר את חישוב ערך התבנית, ולכן תחום ההצבה הוא "כל ערך של  $a$ ". נהוג לרשום גם  $R$  שהוא קיצור של המילה Real - ממשי. כלומר, קבוצת כל המספרים הממשיים. צורה נוספת של כתיבה :  $-\infty < a < \infty$  ( סימן ל"אינסוף").
- ב.** בתבנית  $\frac{1}{m}$  , אפשר להציב במקום  $m$  כל מספר פרט ל-0, כי  $\frac{1}{0}$  לא מוגדר, לכן תחום ההצבה של תבנית זו הוא  $m \neq 0$ .
- ג.** בתבנית  $\sqrt{m}$  אפשר להציב רק ערכים לא שליליים, כי שורש ריבועי ממספר שלילי לא מוגדר בתחום המספרים הממשיים. לכן, יהיה תחום ההצבה  $m \geq 0$ .
- ד.** בתבנית  $\sqrt{k-1}$  , תחום ההצבה הוא  $k \geq 1$  , כי  $k-1 \geq 0$  , ואילו בתבנית  $\sqrt{5-k}$  , תחום ההצבה הוא  $k \leq 5$  , כי  $5-k \geq 0$ .
- ה.** בתבנית  $\frac{m+n}{\sqrt{5-k}}$  , תחום ההצבה הוא  $k < 5$  , כי הערך  $k=5$  מאפס את המכנה. ההגבלה כאן כפולה - גם של פעולת חילוק וגם של הוצאת שורש.
- ו.** בתבנית  $\frac{\sqrt{5-k}}{k-1}$  יש לבדוק את התחום ההצבה גם לגבי המונה  $k \leq 5$  וגם לגבי המכנה  $k \neq 1$  . בסיכום, תחום ההצבה הוא "כל ערך של  $k$  שקטן מ-5 או שווה לו, אך שונה מ-1" או  $\{k \neq 1, k \leq 5\}$ .

## בסיכום

בביטויים אלגבריים מוטלת הגבלה על ערכי האותיות המופיעות בהם במקרים הבאים:

- כאשר האות מופיעה במכנה של שבר, ואז תחום הקיום הוא: קבוצת כל הערכים שאינם מאפסים את המכנה;
- כאשר האות מופיעה בתוך שורש ריבועי (או מדרגה זוגית), ואז תחום הקיום הוא: קבוצת כל הערכים שבהצבתם בביטוי, שמתחת לסימן השורש אינו שלילי.

קיימים מקרים נוספים של הגבלה, אך הם לא בתחום המושגים המוכרים בשלב זה.

## 2. חיבור וחיסור - כינוס אברים דומים.

כפי שכבר ראינו, המקדם של חד-אבר מעיד על מספר הפעמים, שמופיע הגודל הראשי, כלומר  $3ab$  פירושו  $ab+ab+ab$ .

**אברים דומים** אלו חד-אברים בעלי אותו גודל ראשי. חיבור אלגברי של חד-אברים זו פעולה המתבצעת בין מקדמי חד-אברים בעלי גודל ראשי זהה. פעולה זו נקראת **כינוס אברים דומים**.



1.  $ak + ak + ak + ak = 4ak$

2.  $2a^2 + 3a^2 + a^2 = 6a^2$

3.  $3mx + 5mx - 10mx = -2mx$

4.  $2ax + 4ax + 5b - 6b = 6ax - b$

5. 
$$\begin{aligned} & 2ax + 3bx - cx \\ & + (5ax - 6bx - 8cx) \\ & \hline & = 7ax - 3bx - 9cx \end{aligned}$$

6. 
$$\begin{aligned} & 5a^2 - 3ab - 4b \\ & - (2a^2 + ab - 7b) \\ & \hline & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5a^2 - 3ab - 4b \\ & + (-2a^2 - ab + 7b) \\ & \hline & = \frac{3a^2 - 4ab + 3b}{\phantom{0}} \end{aligned}$$

7.  $-8x + 5y - 4xy - (3y - 7xy - 5x) = \underline{-8x} + \underline{5y} - \underline{4xy} - \underline{3y} + \underline{7xy} + \underline{5x} = -3x + 2y + 3xy$

## הערות

1. אם האברים הדומים אינם מסודרים זה ליד זה, כמו בדוגמאות 1-4, או זה מתחת לזה (דוגמאות 5,6), כדאי לסמן אותם בסימון משותף, כמו בדוגמה 7.
2. סימן (-) לפני רב-אבר (דוגמאות 6,7) הופך את סימני האברים שבתוך רב-האבר. רק אח"כ מתבצע כינוס האברים הדומים.  
אם יש יותר מסוג אחד של סוגרים יש לנהוג לפי כללי פתיחת סוגריים.

## 3. כפל ביטויים אלגבריים

### 3.1 כללי חזקות

החזקה  $A^n$  מציינת מכפלת  $n$  גורמים זהים -  $A$ :

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$$

לפי סדר פעולות החשבון, פעולות העלאה בחזקה והוצאת שורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.  
הנוסחאות הבאות מאפשרות לבצע פעולות כפל וחילוק, שבהן מעורבות חזקות בצורה יעילה.  
נתייחס בשלב זה, למעריך שהוא מספר טבעי (כלומר שלם, ללא סימן - חיובי).  
שני הכללים הראשונים מתייחסים לחזקות בעלות בסיסים זהים.

$$A^m A^n = A^{m+n} \quad (I)$$

הוכחת נוסחה זו מבוססת על הגדרת החזקה:

$$A^m \cdot A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_m \cdot \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m+n} = A^{m+n}$$

## דוגמאות

1.  $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
2.  $3^4 \cdot 3^5 = 3^9$
3.  $5^6 \cdot 5 = 5^{6+1} = 5^7$
4.  $b^3 \cdot b^4 = b^7$
5.  $k^3 \cdot k = k^4$
6.  $a^3 \cdot a^5 \cdot a = a^{3+5+1} = a^9$
7.  $a^b \cdot a^2 = a^{b+2}$
8.  $2^k \cdot 2^3 \cdot 2 = 2^{k+4}$

$$\frac{A^m}{A^n} = \begin{cases} A^{m-n} & , m > n \\ 1 & \\ A^{n-m} & , m < n \end{cases} \quad (II)$$

הוכחה :

כאשר  $m > n$

$$\frac{A^m}{A^n} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^m}{\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m-n} = A^{m-n}$$

הסבר : צמצמנו את כל הגורמים A שבמכנה n במספר - עם n גורמים A במונה, לכן, נותרו במונה (m-n) גורמים, כלומר  $A^{m-n}$ .  
 נדגים זאת, כאשר  $n = 4, m = 7$  :

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

כאשר  $m < n$ , היו מצטמצמים כל m הגורמים שבמונה עם אותו מספר גורמים במכנה, ואז נותרים במכנה (n-m) גורמים, כלומר  $\frac{1}{A^{n-m}}$ .

כאשר  $m < n$ , ההפרש m-n שלילי. מתקבל:  $A^{m-n} = \frac{1}{A^{n-m}}$

לביטויים n-m ו- m-n ערכים נגדיים. לפיכך, ניתן להגדיר חזקה עם מעריך שלילי, כשבר שמכנהו חזקה עם המעריך הנגדי (חיובי).

$$A^{-m} = \frac{1}{A^m} \quad (III)$$

כלומר, כאשר  $m > 0$  :

כאשר  $m=n$ , מתקבל  $m-n=0$  :  $\frac{A^m}{A^m} = A^{m-m} = A^0$

מצד שני, החילוק של מספר בעצמו שווה ל-1 :  $\frac{A^m}{A^m} = 1$

לכן, העלאת מספר (שונה מ-0) בחזקת 0 נותנת תוצאה - 1 :

$$A^0 = 1 \quad (IV)$$

דוגמאות 

$$1. \quad 3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$$

$$2. \quad \frac{a^6}{a^9} = \frac{1}{a^{9-6}} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}$$

$$3. \quad \frac{2^{10}}{2^8} = 2^2$$

$$4. \quad 3^9 : 3^{10} = 3^{-1}$$

$$5. \quad a^8 : a^3 = a^5$$

$$6. \quad 2^a : 2 = 2^{a-1}$$

$$7. \quad \frac{a^k \cdot a^2}{a^3} = a^{k+2-3} = a^{k-1}$$

$$8. \quad \frac{a^k \cdot a^m}{a^b \cdot a^n} = a^{k+m-b-n}$$

$$9. \quad \frac{2^3 \cdot 2^5}{2^8} = 2^{3+5-8} = 2^0 = 1$$

$$10. \quad \frac{a^3 \cdot a^4}{a^2 \cdot a^5} = a^{3+4-2-5} = a^0 = 1$$

$$(A^m)^n = A^{m \cdot n} \quad (V)$$

הוכחה :

$$(A^m)^n = \underbrace{A^m \cdot A^m \cdot \dots \cdot A^m}_n = A^{\overbrace{m+m+m+\dots+m}^n} = A^{m \cdot n}$$

דוגמאות 

$$1. \quad (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$$

$$2. \quad (a^k)^3 = a^{3k}$$

$$3. \quad (2^k)^2 = 2^{2k}$$

$$4. \quad 9^a = (3^2)^a = 3^{2a}$$

בשתי הנוסחות הבאות מופיעות, חזקות בעלות מעריכים זהים :

$$A^m B^m = (AB)^m \quad (\text{VI})$$

הוכחה :

$$A^m \cdot B^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_m \cdot \underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_m = \underbrace{(AB) \cdot (AB) \cdot \dots \cdot (AB)}_m = (AB)^m$$

## דוגמאות

1.  $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$

2.  $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$

3.  $(2a)^5 = 2^5 \cdot a^5$

4.  $6^a = (2 \cdot 3)^a = 2^a \cdot 3^a$

## הערה

בכל אחד מהכללים הנ"ל ניתן להיעזר בשני הכיוונים. בשני התרגילים הראשונים הפעלנו את הכלל **מאגף שמאל לאגף ימין**, והיעילות שלו בולטת בדוגמה הראשונה. ואילו בשני התרגילים האחרונים הפעלנו את הכלל **בכיוון הפוך**, וזה הכיוון השכיח יותר כפי שיתברר בהמשך.

$$\frac{A^m}{B^m} = \left(\frac{A}{B}\right)^m \quad (\text{VII})$$

הוכחה :

$$\frac{A^m}{B^m} = \frac{\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_m}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_m} = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_m = \left(\frac{A}{B}\right)^m$$

## דוגמאות

1.  $\frac{32^3}{16^3} = \left(\frac{32}{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

2.  $\frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$

3.  $\frac{144^2}{90^2} = \left(\frac{144}{90}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$

4.  $\left(\frac{b}{k}\right)^8 = \frac{b^8}{k^8}$

בדוגמאות 1-3 הופעל הכלל משמאל לימין. בדוגמה האחרונה הוא הופעל בכיוון הפוך, וזה אומר: **בהעלאת שבר בחזקה, מעלים את המונה ואת המכנה באותה חזקה, ומחלקים את התוצאות.**

## 3.2 כפל חד-אברים

בכפל חד-אברים יש לבצע שלוש פעולות, לפי הסדר הבא:

- \* לקבוע את סימן המכפלה, לפי כללי כפל מספרים מכוונים.
- \* לחשב את מקדם המכפלה ע"י כפל מקדמי כל הגורמים.
- \* להכפיל גורמים, שהם חזקות בעלות בסיסים זהים, לפי כלל I.



1.  $(-2a^2b^3)(-5a^4b) = +10a^6b^4$   
 הסבר: קובעים את הסימן:  $(-)\cdot(-)=(+)$   
 מחשבים את המקדם:  $2\cdot 5 = 10$   
 כופלים את החזקות:  $a^4 \cdot a^2 = a^6$  וכן  $b^3 \cdot b = b^4$   
 מתקבל:  $+10a^6b^4$
2.  $-2ab^5 \cdot (-a^3b) \cdot (3a^5b) \cdot (-2) = -12a^9b^7$
3.  $-3am^2 \cdot 2mk \cdot (-a^2k^3) = 6a^3m^3k^4$
4.  $-a^2b^{x+3} \cdot 2a^{m-1}b^{2x-3} = -2a^{2+m-1}b^{x+3+2x-3} = -2a^{m+1}b^{3x}$   
 אם יש שברים בין המקדמים, כדאי לקבוע את הסימן ולרכז את כל המקדמים, כדי לאפשר צמצום:
5.  $-1\frac{1}{2}x^2y \cdot (-\frac{xy^3z}{3}) \cdot (-4x^3y^4) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot x^{2+1+3} \cdot y^{1+3+4} \cdot z =$   
 $= -2x^6y^8z$

אם בתרגיל הכפל מופיעות חזקות שהבסיס שלהן חד-אבר, יש להעלות תחילה בחזקה - תוך שימוש בכלל V:

6.  $(-2a^2b^3)^2 \cdot (-3a^3) = +4a^4b^6 \cdot (-3a^3) = -12a^7b^6$
7.  $(-a^kb)^3 \cdot (-2a^2b^3)^2 = -a^{3k}b^3 \cdot 4a^4b^6 = -4a^{3k+4}b^9$

### 3.3 כפל של חד-אבר ברב-אבר

בכפל חד-אבר ברב-אבר, מכפילים את חד האבר בכל אחד מאברי רב-האבר (לפי חוק הפילוג).

בביצוע פעולות אלה, כדאי להתייחס להערות הבאות:

- \* כל מכפלה חלקית (חד-אבר בחד-אבר) יש לרשום עם הסימן לפניו, גם אם היא חיובית. בהעדר סימן בין מכפלה אחת לזו שלפניה, יהיה הקשר ביניהן כפל.
- \* לפני פעולת הכפל יש לוודא, שברב-אבר אין אברים דומים; אם יש אברים דומים, נבצע תחילה כינוס אברים דומים, ורק אחר כך את הכפל.
- \* אם באותו תרגיל יש יותר מפעולת כפל אחת של חד-אבר ברב-אבר, יש לבצע כינוס אברים דומים אחרי סיום פעולת הכפל.
- \* אם יש יותר מחד-אבר אחד, שמכפיל את רב-האבר, כדאי להכפיל קודם את כל חד האברים זה בזה, ואת התוצאה יש להכפיל ברב-האבר.
- \* בכפל בין חד-אבר לרב-אבר, נהוג לכתוב קודם את חד-האבר ואחריו את רב-האבר.



1.  $2a(3b - 4c) = 2a \cdot 3b + 2a(-4c) = 6ab - 8ac$
2.  $-2a^2b^3(3a - 5b + c) = -6a^3b^3 + 10a^2b^4 - 2a^2b^3c$
3.  $(2xy + 2x^2 + x^2 - xy) \cdot 3xy^2 = 3xy^2(xy + 3x^2) = 3x^2y^3 + 9x^3y^2$
4.  $2x(x - 3y) - 5y(y - x) = 2x^2 - 6xy - 5y^2 + 5xy = 2x^2 - xy - 5y^2$
5.  $-2x(x + 2y - 5) \cdot 3y = -6xy(x + 2y - 5) = -6x^2y - 12xy^2 + 30xy$

### 3.4 כפל רב - אברים

בכפל של שני רב-אברים כופלים כל אחד מהאברים, שברב-האבר הראשון בכל אחד מהאברים, שברב-האבר השני, ואח"כ מכנסים את האברים הדומים.

בביצוע פעולות אלה, כדאי להתייחס להערות הבאות:

- \* יש לרשום את האותיות במכפלות לפי סדר ה-ABC, כדי שאפשר יהיה לזהות במהירות אברים דומים.
- \* כדאי להקפיד על סדר קבוע של מכפלות: מכפילים את האבר הראשון של רב האבר הקצר (שמכיל פחות אברים) בכל אחד מאברי רב-האבר השני; אח"כ כופלים את האבר השני של רב-האבר הקצר בכל אחד מאברי השני, כו'.

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

$$(k + t + f + s)(m + h) = (m + h)(k + t + f + s) = mk + mt + \dots + hk + \dots + hs$$

\* אם יש להכפיל שלושה גורמים, שביניהם לפחות שני רב-אברים, כופלים תחילה שני רב-האברים, ומכנסים אברים דומים; רק אח"כ מכפילים בגורם הנוסף - חד-אבר או רב-אבר.



- $(2a + 3b)(4a - b) = 8a^2 - 2ab + 12ab - 3b^2 = 8a^2 + 10ab - 3b^2$
- $(a - b)(ab + a^2 + b^2) + (a^2 + b^2 - ab)(a + b) =$   
 $= (a - b)(ab + a^2 + b^2) + (a + b)(a^2 + b^2 - ab) =$   
 $= a^2b + a^3 + ab^2 - ab^2 - a^2b - b^3 + a^3 + ab^2 - a^2b + a^2b + b^3 - ab^2 = 2a^3$
- $2a(a - b)(a + 2b) = 2a(a^2 + 2ab - ab - 2b^2) = 2a(a^2 + ab - 2b^2) =$   
 $= 2a^3 + 2a^2b - 4ab^2$
- $(a + 1)(a - 3)(a - 1) = (a^2 - 3a + a - 3)(a - 1) = (a^2 - 2a - 3)(a - 1) =$   
 $= (a - 1)(a^2 - 2a - 3) = a^3 - 2a^2 - 3a - a^2 + 2a + 3 = a^3 - 3a^2 - a + 3$

## 4.6 כפל לפי נוסחות

בפעולות כפל של רב-אברים, קיימים מקרים שבהם מתקבלת תוצאת הכפל לפי דגם קבוע, בצורה קצרה במיוחד. כל "דגם" כזה נקרא נוסחת כפל מקוצר. למשל, בכפל של שני רב-אברים, שבאחד מהם סכום שני אברים (נסמן אותם ב-A ו-B) ובשני הפרש אותם שני אברים מתקבל:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - A \cdot B + A \cdot B - B^2 = A^2 - B^2$$

כלומר: מכפלת הסכום של שני מחוברים בהפרשם, שווה להפרש ריבועיהם או:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

באופן כללי, נסמן ביטויים אלגבריים באותיות A ו-B, ונציג שמונה נוסחות של כפל מקוצר:

1.  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
2.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3.  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
4.  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5.  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6.  $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$
7.  $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$
8.  $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

נוכיח למשל את הנוסחה השלישית:

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

באותו אופן אפשר להוכיח את כל יתר הנוסחות.



1.  $(3x + 5a^2)(3x - 5a^2) = (3x)^2 - (5a^2)^2 = 9x^2 - 25a^4$
2.  $(2x - 3y)(3y + 2x) = (2x - 3y)(2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2$
3.  $(3x + 1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$
4.  $(2a^3 - 5ab)^2 = (2a^3)^2 - 2 \cdot 2a^3 \cdot 5ab + (5ab)^2 = 4a^6 - 20a^4b + 25a^2b^2$
5.  $(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

$$6. \left(3x^2 - \frac{5}{x}\right)^3 = 27x^6 - 3 \cdot 9x^4 \cdot \frac{5}{x} + 3 \cdot 3x^2 \cdot \frac{25}{x^2} - \frac{125}{x^3} =$$

$$27x^6 - 135x^3 + 225 - \frac{125}{x^3}$$

$$7. (3+x)(9-3x+x^2) = 27+x^3$$

$$8. (2x-3y^2)(4x^2+6xy^2+9y^4) = (2x-3y^2)\left[(2x)^2+2x \cdot 3y^2+(3y^2)^2\right] =$$

$$= 8x^3 - 27y^6$$

$$9. (x-5)^3 - (x-5)(x^2+5x+25) = x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - (x^3 - 125) =$$

$$= x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - x^3 + 125 = 75x - 15x^2$$

$$10. (x+2b+1)^2 = x^2 + 4b^2 + 1 + 4bx + 2x + 4b$$

$$11. (x-y-3)^2 = [x+(-y)+(-3)]^2 = x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6x + 6y$$

$$12. (-a-b)^2 = (-a)^2 + 2(-a) \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

## שים לב

א. בנוסחה הראשונה, ההפרש קובע את סדר האברים בתוצאה (בעזרת חוק החילוף). למשל, בדוגמה 2 משנים את סדר האברים בסכום, כך שיהיה כמו סדר האברים בהפרש.

ב. דוגמה 12 מעידה על כך, שריבוע של סכום שני אברים שליליים שווה לריבוע הסכום של אותם שני אברים חיוביים:

$$(-A - B)^2 = (A + B)^2$$

## 4. חילוק ביטויים אלגבריים

### 4.2 חילוק חד אברים

בחילוק שני חד אברים יש להקפיד על שלושה שלבים, לפי הסדר הבא:

- \* קביעת סימן המנה, לפי כללי חילוק מספרים מכוונים.
- \* חישוב מקדם המנה, או צמצום מקדמי חד-האברים המשתתפים במנה.
- \* צמצום גורמים שהם חזקות בעלות בסיסים זהים, לפי כלל חזקות II.

$$1. -10a^6b^4 : (5a^4b) = -2a^2b^3 \quad 2. \frac{-12a^5x^4y}{-16a^3x^3y} = +\frac{3}{4}a^2x$$

$$3. \frac{14a^2k^3t^5}{-21a^4t^3} = -\frac{2k^3t^2}{3a^2} \quad 4. \frac{(-2x^2y^3)^3}{(-4x^4y)^2} = \frac{-8x^6y^9}{+16x^8y^2} = -\frac{y^7}{2x^2}$$

בתרגיל 4 ביצענו לפי סדר פעולות החשבון, תחילה את ההעלאה בחזקה, ורק אח"כ את חילוק חד-האברים המתקבלים.

### שים לב

בחזקות המצטמצמות בשלמותן מעבירים קו על כל הביטוי - בסיס ומעריך (בדוגמה 3,  $a^2$  במונה או  $t^3$  במכנה) ואילו בחזקות שמצטמצמות בחלקן מעבירים קו רק על המעריך ולידו רושמים את המעריך החדש, המתקבל לפי כלל חזקות II (באותה דוגמה:  $a^4$  במכנה, או  $t^5$  במונה).

### 4.3 חילוק רב. אבר בחד. אבר

בחילוק רב-אבר בחד-אבר, מחלקים כל אחד מאברי רב-האבר, בחד-האבר המחלק, כאשר כל תוצאה נרשמת עם הסימן לפנייה (לפי חוק הפילוג)

### דוגמאות

$$1. (8xy + 6xz - 4tx) : (2x) = 8xy : (2x) + 6xz : (2x) - 4tx : (2x) = 4y + 3z - 2t$$

$$2. (-15a^2b^3c^5 + 18a^2b^2 - 3a^3b^4) : (-3a^2b^2) = 5bc^5 - 6 + ab^2$$

$$3. (-24a^4k^5 + 16a^5k^6 - 8a^3k^2) : (-8a^3k^2) = 3ak^3 - 2a^2k^4 + 1$$

### שים לב

בדוגמה 2, המקדם של המנה האחרונה הוא 1 **והוא לא נרשם** - מקדם סמוי. רושמים רק את המנה של הגדלים הראשיים.  
בדוגמה 3 במנה האחרונה מתקבלת תוצאה 1 **והיא נרשמת**, כי גם המקדמים וגם הגדלים הראשיים במנה זו מצטמצמים בשלמותם (המנה שלהם - 1).

## 4.4 חילוק רב אברים

בחילוק רב אבר ברב אבר, מספר שלבים:

\* **מסדרים את שני רב האברים באותו סדר** (שניהם בסדר יורד או עולה של אחת האותיות).

$$(3a^2 + 6 + 11a):(3 + a) = (3a^2 + 11a + 6):(a + 3)$$

\* **מחלקים את האבר הראשון של המחולק -  $3a^2$ , באבר הראשון של המחלק** שהוא  $a$ . מתקבל  $3a$ . זהו האבר הראשון של המנה.

$$(3a^2 + 6 + 11a):(3 + a) = 3a \dots$$

\* **כופלים את האבר הראשון של המנה -  $(3a)$  במחלק  $(a+3)$  ורושמים את המכפלה  $(3a^2 + 9a)$  מתחת למחולק, החל מהאבר השמאלי; מחסירים את המכפלה מהמחולק. מתקבל  $2a+6$ .**

$$(3a^2 + 11a + 6):(a + 3) = 3a \dots$$

$$-(3a^2 + 9a)$$

$$2a + 6$$

\* **חוזרים על שתי הפעולות** הנ"ל: מחלקים את  $2a$  ב- $a$ , מתקבל  $+2$ . כופלים במחלק  $a+3$  ורושמים את התוצאה  $2a+6$  מתחת לרב אבר ההפרש שקיבלנו קודם. מחסירים, וההפרש הוא אפס, לכן תוצאת החילוק היא  $3a+2$ .

$$(3a^2 + 11a + 6):(a + 3) = 3a + 2$$

$$-(3a^2 + 9a)$$

$$/ \quad 2a + 6$$

$$- \quad 2a + 6$$

$$/ \quad /$$

כדי לבדוק אם המנה נכונה, כופלים אותה במחלק ובודקים אם היא שווה למחולק.  
 $(3a + 2)(a + 3) = 3a^2 + 11a + 6$ .

נציג שתי דוגמאות נוספות:

$$(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) : (2k - 1) = 4k^2 - 4k + 1$$

$$\begin{array}{r} -8k^3 - 4k^2 \\ \hline / \quad -8k^2 + 6k - 1 \\ \quad -8k^2 + 4k \\ \hline / \quad 2k - 1 \\ \quad -2k - 1 \\ \hline / \quad / \end{array}$$

$$(27x^3 - 8y^6) : (9x^2 + 6xy^2 + 4y^4) = 3x - 2y^2$$

$$\begin{array}{r} -27x^3 + 18x^2y^2 + 12xy^4 \\ \hline / \quad -18x^2y^2 - 12xy^4 - 8y^6 \\ \quad -18x^2y^2 - 12xy^4 - 8y^6 \\ \hline / \quad / \quad / \end{array}$$

בשני התרגילים האחרונים, תוצאת החילוק היתה מנה ללא שארית.  
בתרגיל הבא, תוצאת החילוק היא מנה עם שארית

$$(b^3 - 3b^2 + 3b + 2) : (b - 1) = b^2 - 2b + 1$$

$$\begin{array}{r} -b^3 - b^2 \\ \hline / \quad -2b^2 + 3b + 2 \\ \quad -2b^2 + 2b \\ \hline / \quad b + 2 \\ \quad -b - 1 \\ \hline / \quad 3 \end{array}$$

כדי לבדוק אם התוצאה נכונה, כופלים את המנה במחלק, לתוצאה מחברים את השארית, וזה צריך להיות שווה למחולק. במקרה הנ"ל:

$$(b - 1)(b^2 - 2b + 1) + 3 = b^3 - 2b^2 + b - b^2 + 2b - 1 + 3 = b^3 - 3b^2 + 3b + 2$$

# תרגילים

## סעיף 1

התשובות לתרגילים א'-יד' מופיעות אחרי תרגיל יד'

א. ציין בכל אחת מהתבניות הבאות, אם היא חד-איבר או רב-איבר :

- |                       |                       |                                     |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| 1. $2m$               | 2. $3a+k$             | 3. $2a^2b$                          |
| 4. $\frac{ab}{c}$     | 5. $4k^2 + k$         | 6. $\frac{2}{k+3}$                  |
| 7. $\frac{3(m+1)}{k}$ | 8. $m^2 + n^2 + 1$    | 9. $\frac{4(m-n)}{m+n}$             |
| 10. $4m+4k+a^3-1$     | 11. $\frac{a+b}{k+3}$ | 12. $\frac{a}{k+3} + \frac{b}{k+3}$ |

ב. ציין את ערך המקדם בחד-אברים הבאים :

- |                          |                             |                              |
|--------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $3kt$                 | 2. $a$                      | 3. $\frac{1}{2}km^2$         |
| 4. $\frac{ab^2}{3}$      | 5. $\frac{2}{3}b^3c^2$      | 6. $\frac{3a^3b^5}{4}$       |
| 7. $\frac{5}{k+1}$       | 8. $\frac{m}{4(a+b)}$       | 9. $\frac{a}{b-c}$           |
| 10. $\frac{m-n}{6(k+1)}$ | 11. $\frac{5(m+k)}{7(m-k)}$ | 12. $\frac{2m^3t}{m^3+t}$    |
| 13. $4a^2b^5c$           | 14. $\frac{2m^3k}{4a+5b}$   | 15. $\frac{a^2m^3}{a^2+m^3}$ |

ג. הצב את ערכי האותיות הרשומים ליד כל תבנית מספר וחשב את ערך התבנית :

- |                           |                        |                      |
|---------------------------|------------------------|----------------------|
| 1. $3a - 5b$              | (א) $a = 2, b = 3$     | (ב) $a = -1, b = 4$  |
| 2. $(4a + 5) \cdot 2$     | (א) $a = 3$            | (ב) $a = -1$         |
| 3. $-3(5x + 1)$           | (א) $x = -3$           | (ב) $x = -2$         |
| 4. $(2x + 3y) : 3$        | (א) $x = -6, y = 2$    | (ב) $x = 3, y = -4$  |
| 5. $2ab + 3b$ ;           | (א) $a = -1, b = -3$ , | (ב) $a = 0, b = -1$  |
| 6. $3x + 4y - 2xy$ ;      | (א) $x = -1, y = -3$ , | (ב) $x = -2, y = 3$  |
| 7. $(x - 3)(a - x)$ ;     | (א) $a = 2, x = -1$ ,  | (ב) $a = -2, x = -3$ |
| 8. $(2x + 3y)(2x - 3y)$ ; | (א) $x = 3, y = -1$ ,  | (ב) $x = -2, y = -3$ |

9.  $(x+1)(x-1)-1$ ; (א)  $x=2$ , (ב)  $x=-3$ , (ג)  $x=-1$ , (ד)  $x=0$   
 10.  $x^2-9$ ; (א)  $x=3$ , (ב)  $x=-2$ , (ג)  $x=0$   
 11.  $4-a^2$ ; (א)  $a=2$ , (ב)  $a=-2$ , (ג)  $a=-3$   
 12.  $-x^2+4$ ; (א)  $x=4$ , (ב)  $x=-4$   
 13.  $2a^2x^3$ ; (א)  $a=-1, x=2$  (ב)  $a=-2, x=-1$   
 14.  $x^2-5x+6$ ; (א)  $x=2$ , (ב)  $x=-1$ , (ג)  $x=-3$   
 15.  $2(3x+2y)^2$ ; (א)  $x=2, y=-2$  (ב)  $x=-3, y=-1$

ד. בתבנית הבאה צוינה ההתאמה של ערך התבנית לערכי האותיות הרשומות בה:

$$F(m) = 3m + 2$$

חשב את ערך התבנית, כאשר  $m = 4$ , כלומר  $F(4)$ .

ה. התבנית  $F(a)$  מודגרת כך:  $F(a) = 4a - 5$ , חשב את  $F(0), F(-1), F(2)$ .

ו. נתון  $f(b) = 4 - 3b$ . חשב את  $f(-1), f(3), f(1)$ .

ז. בעמודה השמאלית שבטבלה רשומים ביטויים ל- $f(x)$ . מלא את הטבלה.

$f(x)$	$f(2)$	$f(0)$	$f(-1)$
$8x - 11$	5		
$x^2 + 3x$			
$2 - x^2$			
$3x - 2x^2$			
$x^2 - 3x + 2$			
$(x-1)(x-2)$			

ח. נתון:  $f(x) = 2x$ ,  $F(x) = x^2$

חשב: 1.  $f(3), F(-1), F(2)$

2.  $F(-2) + f(-2)$

ט. נתון:  $h(a) = a^2$ ,  $H(a) = 5 - a$

חשב: 1.  $h(-2) - H(-2)$

2.  $H(-1) - h(-1)$

י. נתון:  $F(x) = x^2 - 5$ ,  $G(x) = 3x - 4$

חשב: 1.  $2G(-2)$

2.  $-3F(-1)$

3.  $4G(-1) - F(-1)$

יא. נתון:  $H(x, y) = 2x - 3y + 4$ . חשב  $H(0,0)$ ,  $H(0,1)$ ,  $H(-2,1)$ . המספר הראשון מציין את הערך של  $x$  והשני - ערך של  $y$ .

יב. נתון:  $F(a, b) = a^2 - b^2$ . חשב  $F(-1, -2)$ ,  $F(-1, 1)$ ,  $F(3, 1)$ .

יג. נתון:  $F(a, b, c) = \frac{3a - b^2}{2c}$ . חשב  $F(3, -1, -4)$ ,  $F(2, 4, -1)$ .

יד. נתון:  $F(x, y) = (x^2 + y^2 + xy)(x - y)$ .

חשב  $2F(1, 2)$ ,  $F(2, -2)$ ,  $F(-1, -1)$ .

### תשובות

א. חד-אברים: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 11 . היתר רב-אברים.	א.
ב. 1. 3, 2. 1, 3. $\frac{1}{2}$ , 4. $\frac{1}{3}$ , 5. $\frac{2}{3}$ , 6. $\frac{3}{4}$ , 7. 5, 8. $\frac{1}{4}$ , 9. 1, 10. $\frac{1}{6}$ , 11. $\frac{5}{7}$ , 12. 2, 13. 4, 14. 2, 15. 1	ב.
ג. 1. א.-9 ב.-23, 2. א.34 ב.2, 3. א.42 ב.27, 4. א.-2 ב.-2, 5. א.-3 ב.-3, 6. א.-21 ב.18, 7. א.-12 ב.-6, 8. א. 27 ב.-65, 9. א.2 ב.7 ג.-1 ד.-2, 10. א.0 ב.-5 ג.-9, 11. א.0 ב.0 ג.-5, 12. א.-12 ב.-12, 13. א.16 ב.-8, 14. א.0 ב.12 ג.30, 15. א.8 ב.242.	ג.
ד. $F(4) = 14$	ד.
ה. $F(2) = 3$ , $F(-1) = -9$ , $F(0) = -5$	ה.
ו. $f(1) = 1$ , $f(3) = -5$ , $f(-1) = 7$	ו.
ז. $f(2) : 5, 10, -2, -2, 0, 0$ , $f(0) : -11, 0, 2, 0, 2, 2$ , $f(-1) : -19, -2, 1, -5, 6, 6$	ז.
ח. 1. $F(2) = 4$ , $F(-1) = 1$ , $f(3) = 6$ , 2. 0	ח.
ט. 1.-3, 2. 5	ט.
י. 1.-20, 2. 12, 3.-24	י.
יא. $H(-2, 1) = -3$ , $H(0, 1) = 1$ , $H(0, 0) = 4$	יא.
יב. $F(3, 1) = 8$ , $F(-1, 1) = 0$ , $F(-1, -2) = -3$	יב.
יג. $F(2, 4, -1) = 5$ , $F(3, -1, -4) = -1$	יג.
יד. $F(2, -2) = 16$ , $F(-1, -1) = 0$ , $2F(1, 2) = -14$	יד.

טו. מהו תחום ההצבה של תבניות המספר הבאות:

- |   |                                 |                                   |
|---|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $3a - 4$                               | 2. $x^2 + x - 3$                | 3. $\frac{5a - a^2}{2}$           |
| 4. $\frac{x}{3}$                          | 5. $\frac{3}{x}$                | 6. $\frac{x+2}{x-3}$              |
| 7. $\frac{a-1}{b-1}$                      | 8. $\frac{x+3}{x+4}$            | 9. $\frac{a}{2a-6}$               |
| 10. $\frac{x}{x-y}$                       | 11. $\frac{y}{x+y}$             | 12. $\frac{2}{(x-1)^2}$           |
| 13. $\frac{4}{(x+6)^2}$                   | 14. $\sqrt{a-1}$                | 15. $\sqrt{x-4}$                  |
| 16. $\sqrt{4-x}$                          | 17. $\frac{\sqrt{x-4}}{2}$      | 18. $\frac{2}{\sqrt{x-4}}$        |
| 19. $\frac{1}{\sqrt{2x-8}}$               | 20. $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$      | 21. $\frac{x+2}{x(x-3)}$          |
| 22. $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$                | 23. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ | 24. $\frac{4}{x} - \frac{5}{x-1}$ |
| 25. $\frac{\sqrt{5-x}}{2y-4}$             | 26. $\frac{3}{x(y-5)}$          | 27. $\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$      |
| 28. $\frac{x}{(x+2)^2} - \frac{x+1}{x-5}$ | 29. $\frac{3a}{a^2-1}$          | 30. $\frac{2x}{4-x^2}$            |

תשובות:

1. R, 2. R, 3. R, 4. R, 5.  $x \neq 0$ , 6.  $x \neq 3$ , 7.  $b \neq 1$ , 8.  $x \neq -4$ ,  
 9.  $a \neq 3$ , 10.  $x \neq y$ , 11.  $x \neq -y$ , 12.  $x \neq 1$ , 13.  $x \neq -6$ , 14.  $a \geq 1$ , 15.  $x \geq 4$ ,  
 16.  $x \leq 4$ , 17.  $x \geq 4$ , 18.  $x > 4$ , 19.  $x > 4$ , 20.  $x < 3$ , 21.  $x \neq 0, x \neq 3$ ,  
 22.  $x \neq -2, x \neq 3$ , 23.  $x \neq 0, y \neq 0$ , 24.  $x \neq 0, x \neq 1$ , 25.  $y \neq 2, x \leq 5$ ,  
 26.  $x \neq 0, y \neq 5$ , 27.  $x \geq 1, x \neq 3$ , 28.  $x \neq -2, x \neq 5$ , 29.  $a \neq \pm 1$ , 30.  $x \neq \pm 2$ .

## סעיף 2

טז. כתוב בעזרת מקדם אחד.

1.  $a+a+a+a+a$

3.  $ax+ax+ax$

5.  $4bc+6bc-10bc$

7.  $2\frac{x}{a}+3\frac{x}{a}+6\frac{x}{a}$

9.  $\frac{2xy}{b^2}+\frac{7xy}{b^2}-\frac{6xy}{b^2}$

2.  $x^2+x^2+x^2+x^2$

4.  $2ab-3ba+6ab-9ba$

6.  $5a^2x+3a^2x-9a^2x$

8.  $\frac{a^2}{b}+5\frac{a^2}{b}-2\frac{a^2}{b}$

10.  $\frac{6m^2}{n}-8\frac{m^2}{n}$

תשובות:

1.  $5a$ , 2.  $4x^2$ , 3.  $3ax$ , 4.  $-4ab$ , 5.  $0$ , 6.  $-a^2x$ , 7.  $11\frac{x}{a}$ , 8.  $4\frac{a^2}{b}$

9.  $3\frac{xy}{b^2}$ , 10.  $-2\frac{m^2}{n}$ .

יז. אברים דומים בשני רב-אברים נרשמו זה מתחת לזה. בצע את החיבור האלגברי:

1. 
$$+ \begin{array}{r} 3a+5b+c \\ \hline 4a-2b+3c \end{array}$$

3. 
$$+ \begin{array}{r} -a^2b^3+a^3-b^2+ab \\ \hline a^3+2b^2-ab \end{array}$$

5. 
$$- \begin{array}{r} -3x^2y+4xy^2-x+4y \\ \hline -2x^2y+3xy^2+5x-y \end{array}$$

2. 
$$+ \begin{array}{r} 2a^3+3a^2-2a+5 \\ \hline 4a^3-3a^2-3 \end{array}$$

4. 
$$- \begin{array}{r} x^4+5x^3-2x^2+4x \\ \hline x^4+3x^3-2x^2-3x \end{array}$$

6. 
$$- \begin{array}{r} 2a^2b^3-3ab^4+4a^3b^2-a^4 \\ \hline -a^2b^3-5ab^4+a^4 \end{array}$$

תשובות:

1.  $7a+3b+4c$ , 2.  $6a^3-2a+2$ , 3.  $-a^2b^3+2a^3+b^2$ , 4.  $+2x^3+7x$ ,

5.  $-x^2y+xy^2-6x+5y$ , 6.  $3a^2b^3+2ab^4+4a^3b^2-2a^4$

יח. כנס את האברים הדומים.

1.  $2a+5+3a-4a-1$
2.  $3m+x-5m-3x+4x$
3.  $7a^2-5a+8a^2-10a^2-a$
4.  $3x^2+4xy-5x^2+9xy-8yx$
5.  $4a^2b+5ab^2-4ab^2-6a^2b$
6.  $5x^2y-4xy+6x^2y+8xy-2x^2y$
7.  $\frac{2x}{y}+\frac{3x}{y}-\frac{5x}{y}-\frac{x}{y}$
8.  $x^2y+2xy-3yx-4xy^2+7x^2y$
9.  $(3a-4b+1)-(5b-a+6)$
10.  $ab-(a-3ab-a^2)+3a^2-5a$
11.  $b^2-(ab-a^2)+(ab-b^2)$
12.  $-(2x-x^2)+3x-(x^2-5x)$
13.  $ab^2-(a^2-1)+a^2-2ab^2$
14.  $x^2+x-1-(x^2-3x)$
15.  $-3k-[4ak-2k+(ak-k)]$
16.  $a^3-[2a-(3a-5a^3)]$
17.  $-[3x-(a+2x)]+4x-a$
18.  $a^2m^3-[am-(3a^2m^3+am)]$
19.  $2x^2+y-[x^2-(y-3x^2)]$
20.  $-[ax-y-(y-3ax)]-4ax$
21.  $2x^2y+4xy-(xy^2+4xy-3x^2y)+2xy^2$
22.  $2m^3+3m^2-(m-m^3)+(m^2-3m)$
23.  $x^3y-[y^2-(x^2+2y^2-4x^3y)]+4y^2$
24.  $\frac{a^2b}{3}-\left(\frac{a^2}{3b}+\frac{b}{a^2}\right)-\left[-\frac{3}{3}a^2b-\left(\frac{b}{a^2}-\frac{5a^2}{3b}\right)\right]$
25.  $-\left\{5x^2-\left[2x^5+3x^2-\left(4x^5-x-8x^2\right)\right]+4x\right\}$
26.  $3a^3-\left\{2a^2-\left[-4a+5a^2-\left(a^3-a^2\right)\right]+3a^3\right\}$

תשובות:

1.  $a+4$ , 2.  $-2m+2x$ , 3.  $5a^2-6a$ , 4.  $-2x^2+5xy$ , 5.  $-2a^2b+ab^2$ ,  
 6.  $9x^2y+4xy$ , 7.  $-\frac{x}{y}$ , 8.  $8x^2y-xy-4xy^2$ , 9.  $4a-9b-5$ , 10.  $4a^2+4ab-6a$ ,  
 11.  $a^2$ , 12.  $6x$ , 13.  $1-ab^2$ , 14.  $4x-1$ , 15.  $-5ak$ , 16.  $a-4a^3$ , 17.  $3x$ ,  
 18.  $4a^2m^3$ , 19.  $2y-2x^2$ , 20.  $2y-8ax$ , 21.  $5x^2y+xy^2$ , 22.  $3m^3+4m^2-4m$ ,  
 23.  $-3x^3y+x^2+5y^2$ , 24.  $1\frac{1}{3}a^2b-2\frac{a^2}{b}$ , 25.  $-2x^5+6x^2-3x$ ,  
 26.  $-a^3+4a^2-4a$ .

### סעיף 3.1

**יט.** כתוב את המכפלות הבאות כחזקה של בסיס אחד. (אין צורך לחשב את תוצאת החזקה).

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $3^3 \cdot 3^4$                       | 2. $2^5 \cdot 2^4$                      | 3. $10^2 \cdot 10^3$                    |
| 4. $17^3 \cdot 17^6$                     | 5. $23^8 \cdot 23$                      | 6. $11^4 \cdot 11^6 \cdot 11^5$         |
| 7. $7^9 \cdot 7 \cdot 7^{11}$            | 8. $a^2 \cdot a^6$                      | 9. $b^8 \cdot b \cdot b^3$              |
| 10. $m^3 \cdot m^6 \cdot m^7$            | 11. $a^m \cdot a^3 \cdot a^{2m}$        | 12. $b^2 \cdot b^{a+3} \cdot b^{2a-1}$  |
| 13. $m^{2a-1} \cdot m^5 \cdot m^{4-a}$   | 14. $2^{4k-1} \cdot 2^2 \cdot 2^{1-3k}$ | 15. $3^{3a-1} \cdot 3^a \cdot 3^{5-4a}$ |
| 16. $k^{a-4} \cdot k^{6-a} \cdot k^{3a}$ | 17. $(k+1)^a \cdot (k+1)^2$             | 18. $(a-b)^{c+2} \cdot (a-b)^{c-1}$     |

תשובות:

1.  $3^7$ , 2.  $2^9$ , 3.  $10^5$ , 4.  $17^9$ , 5.  $23^9$ , 6.  $11^{15}$ , 7.  $7^{21}$ , 8.  $a^8$ , 9.  $b^{12}$ ,  
 10.  $m^{16}$ , 11.  $a^{3m+3}$ , 12.  $b^{3a+4}$ , 13.  $m^{a+8}$ , 14.  $2^{k+2}$ , 15.  $3^4$ , 16.  $k^{3a+2}$ ,  
 17.  $(k+1)^{a+2}$ , 18.  $(a-b)^{2c+1}$

**כ.** כתוב את המנות הבאות בעזרת חזקות של בסיס יחיד (אין צורך לחשב את תוצאת החזקה).

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $\frac{2^{11}}{2^4}$                      | 2. $\frac{3^{16}}{3^9}$                       | 3. $\frac{2^7}{2^{11}}$                   |
| 4. $3^5 : 3^9$                               | 5. $5^7 : 5$                                  | 6. $7^{17} : 7^{16}$                      |
| 7. $\frac{2^8 \cdot 2^3}{2^5}$               | 8. $\frac{3^6 \cdot 3^7}{3^8}$                | 9. $\frac{5^2 \cdot 5^3}{5^8}$            |
| 10. $b^3 : b^8$                              | 11. $a^7 : a^5$                               | 12. $a^6 : a^9$                           |
| 13. $\frac{7^3 \cdot 7^{11}}{7^6 \cdot 7^4}$ | 14. $\frac{b \cdot b^6}{b^3}$                 | 15. $\frac{k^6 \cdot k^7}{k^8 \cdot k^6}$ |
| 16. $a^{2k+3} : a^2$                         | 17. $b^{3k+4} : b^{2k-1}$                     | 18. $b^{2a+7} : b^{6-a}$                  |
| 19. $\frac{2^{k+3} \cdot 2^{k-5}}{2^4}$      | 20. $\frac{a^{b-4} \cdot a^{3b-5}}{a^{2b-9}}$ | 21. $\frac{(k+2)^{a+1}}{(k+2)^{a-1}}$     |

תשובות:

1.  $2^7$ , 2.  $3^7$ , 3.  $2^{-4}$ , 4.  $3^{-4}$ , 5.  $5^6$ , 6. 7, 7.  $2^6$ , 8.  $3^5$ , 9.  $5^{-3}$ ,  
10.  $b^{-5}$ , 11.  $a^2$ , 12.  $a^{-3}$ , 13.  $7^4$ , 14.  $b^4$ , 15.  $k^{-1}$ , 16.  $a^{2k+1}$ ,  
17.  $b^{k+5}$ , 18.  $b^{3a+1}$ , 19.  $2^{2k-6}$ , 20.  $a^{2b}$ , 21.  $(k+2)^2$

**כא.** כתוב את הביטויים הבאים כחזקה בעלת מעריך יחיד. (אין לחשב את החזקה).

1.  $(2^2)^3$     2.  $(3^4)^5$     3.  $(3^2)^a$     4.  $(5^a)^3$     5.  $(a^2)^3$   
6.  $(b^2)^a$     7.  $(m^a)^k$     8\*.  $(k^b)^b$     9\*.  $(a^{2m})^m$

תשובות:

1.  $2^6$ , 2.  $3^{20}$ , 3.  $3^{2a}$ , 4.  $5^{3a}$ , 5.  $a^6$ , 6.  $b^{2a}$ , 7.  $m^{ak}$ , 8.  $k^{b^2}$ , 9.  $a^{2m^2}$

**כב.** בצע את פעולות ההעלאה בחזקה.

1.  $(ab)^3$     2.  $(2k)^4$     3.  $(a^2b)^5$   
4.  $(a^3b^4)^2$     5.  $(bc)^a$     6.  $(b^2c^3)^a$   
7.  $\left(\frac{a}{b}\right)^4$     8.  $\left(\frac{b^2}{c}\right)^3$     9.  $\left(\frac{a^3}{b^4}\right)^2$   
10.  $\left(\frac{2}{m}\right)^k$     11.  $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^m$     12.  $\left(\frac{ab}{c}\right)^k$   
13.  $\left(\frac{mk}{2b}\right)^c$     14.  $\left(\frac{a^2b^3}{c}\right)^4$     15.  $\left(\frac{a^mb}{3^k}\right)^3$   
16.  $\left(\frac{a^2b^k}{c^3}\right)^m$     17.  $\left(\frac{2a^m}{3b}\right)^k$     18.\*  $\left(\frac{(3a^k)^2}{2b^c}\right)^3$

תשובות:

1.  $a^3b^3$ , 2.  $16k^4$ , 3.  $a^{10}b^5$ , 4.  $a^6b^8$ , 5.  $b^a c^a$ , 6.  $b^{2a}c^{3a}$ , 7.  $\frac{a^4}{b^4}$   
8.  $\frac{b^6}{c^3}$ , 9.  $\frac{a^6}{b^8}$ , 10.  $\frac{2^k}{m^k}$ , 11.  $\frac{a^{2m}}{b^{3m}}$ , 12.  $\frac{a^k b^k}{c^k}$ , 13.  $\frac{m^c k^c}{2^c b^c}$ , 14.  $\frac{a^8 b^{12}}{c^4}$ ,  
15.  $\frac{a^{3m} b^3}{3^{3k}}$ , 16.  $\frac{a^{2m} b^{km}}{c^{3m}}$ , 17.  $\frac{2^k a^{km}}{3^k b^k}$ , 18.  $\frac{729 a^{6k}}{8 b^{3c}}$ .

**כג.** כתוב את הביטויים הבאים בעזרת חזקה בעלת מעריך משותף.

- |                             |                             |                               |
|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $a^3 b^3$                | 2. $k^a t^a$                | 3. $a^{2m} b^{2m}$            |
| 4. $\frac{m^4}{n^4}$        | 5. $\frac{m^a}{n^a}$        | 6. $a^k b^k c^k$              |
| 7. $\frac{a^{3m}}{c^{3m}}$  | 8. $a^{2k} b^k$             | 9. $m^{3a} k^{2a}$            |
| 10. $a^{2m} c^{2b}$         | 11. $a^{bc} m^{bd}$         | 12. $\frac{a^{3k}}{b^k}$      |
| 13. $\frac{a^{4k}}{m^{2k}}$ | 14. $\frac{k^{ab}}{m^{ac}}$ | 15. $\frac{m^{3ab}}{2^{6bc}}$ |

תשובות:

1.  $(ab)^3$ , 2.  $(kt)^a$ , 3.  $(ab)^{2m}$ , 4.  $\left(\frac{m}{n}\right)^4$ , 5.  $\left(\frac{m}{n}\right)^a$ , 6.  $(abc)^k$ , 7.  $\left(\frac{a}{c}\right)^{3m}$ ,  
8.  $(a^2 b)^k$ , 9.  $(m^3 k^2)^a$ , 10.  $(a^m c^b)^2$ , 11.  $(a^c m^d)^b$ , 12.  $\left(\frac{a^3}{b}\right)^k$ , 13.  $\left(\frac{a^2}{m}\right)^{2k}$ ,  
14.  $\left(\frac{k^b}{m^c}\right)^a$ , 15.  $\left(\frac{m^a}{4^c}\right)^{3b}$ .

## 3.2 - 3.4 סעיפים

כד. כפול את החד אברים.

1.  $2 \cdot 5xy$
2.  $2k \cdot (-5)$
3.  $3a \cdot 4a$
4.  $-2ab \cdot 3b$
5.  $-3xy \cdot (-x)$
5.  $-2ax \cdot (-3) \cdot (-bx)$
7.  $3ab \cdot (-ac) \cdot (-2b)$
8.  $(-xyk) \cdot (-2y) \cdot (-4xk)$
9.  $(-4ab) \cdot (-1.5a) \cdot (-0.5b)$
10.  $3a^3 \cdot a^4$
11.  $-3b^2 \cdot (-2b^3)$
12.  $-a^2b \cdot (-3ab^2) \cdot (-2a^3b)$
13.  $-2x^3y \cdot (-3xy^2) \cdot (-2y^3)$
14.  $kt^2 \cdot 4ak^3 \cdot 2a^4t^5 \cdot 3a^2k^2t$
15.  $-2m^2k^9 \cdot 0.25m^3k \cdot (-6m^5) \cdot (-k^3)$
16.  $2a^2b^3c^4 \cdot (-a^5c^4) \cdot (-b^7c^6) \cdot 3ab$
17.  $7abc^2 \cdot (-3a^3b^4) \cdot 3ab^2c \cdot 2a^4c^3$
18.  $-4.5a^2k \cdot 3ak^2m^2 \cdot (-2a^3m^3)$
19.  $-12t^3x^5y \cdot (-0.5xy^4) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-t^6x^3)$
20.  $1\frac{1}{3}y^2 \cdot 1\frac{1}{2}x^5yz^3 \cdot (-xz^2) \cdot (-0.5x)$
21.  $-\frac{ab^3}{7} \cdot 8a^3b^2 \cdot \left(-1\frac{3}{4}bc\right)$
22.  $-\frac{4}{5}a^2m^3 \cdot (-6ab^2) \cdot 1\frac{1}{4}mb \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)$
23.  $2m^a \cdot 3m^{3a} \cdot 4m^{2a}$
24.  $-5a^{3b} \cdot (-3a^{2b}) \cdot (-4a^3)$
25.  $-5x^{2m-1} \cdot 2x^{m+4}$
26.  $3a^mb^2 \cdot (-5a^3b^5)$
27.  $-4x^ay^{b+1} \cdot (-7x^{a+3}y^3)$
28.  $-2a^{2m}b^2 \cdot 5a^{m+1}b^{m-1}$
29.  $4a^{3m-2}x^{b-4} \cdot (-3a^{m+1}x^{2b+4})$
30.  $-a^{2k-3}b^{3k-2} \cdot (-2a^{k+1}) \cdot (-4a^2b^2)$
31.  $5k^{3a-4}t^{a+7} \cdot (-6k^{4-a}t^{2a-5})$
32.  $-m^{4+t}n^{t-3} \cdot (-2m^{t-4}n^{t+3}) \cdot 3m^t n^t$
33.  $-2a^k \cdot (-a^{3-k}b^{3-2k}c^{k-1}) \cdot 5c^{2-k}$
34.  $1\frac{2}{3}k^{2m-1}a^{2b+1} \cdot 6a^{2-b} \cdot \left(-\frac{k^{3-2m}}{5}\right)$
35.  $(-3ab)^2 \cdot (-7b)$
36.  $(-am)^3 \cdot (-2am)^2$
37.  $(3a^2b)^2 \cdot (2ab^3)^3$
38.  $(-5x^2y^3)^2 \cdot (-xy^2)^3$
39.  $-2k(3kt^2)^2 \cdot (-k^2t^2)^3$
40.  $(-4x^2y^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y\right)^4$
41.  $(-m^ak^{a-1})^4 \cdot (-2mk^2)^2$
42.  $(-3a^{2x-1}b^{3-x})^2 \cdot (-a^{1-x}b^{x-1})^3$

1.  $10xy$ , 2.  $-10k$ , 3.  $12a^2$ , 4.  $-6ab^2$ , 5.  $3x^2y$ , 6.  $-6abx^2$ , 7.  $6a^2b^2c$ ,  
 8.  $-8k^2x^2y^2$ , 9.  $-3a^2b^2$ , 10.  $3a^7$ , 11.  $6b^5$ , 12.  $-6a^6b^4$ , 13.  $-12x^4y^6$ ,  
 14.  $24a^7k^6t^8$ , 15.  $-3k^{13}m^{10}$ , 16.  $6a^8b^{11}c^{14}$ , 17.  $-126a^9b^7c^6$ , 18.  $27a^6k^3m^5$ ,  
 19.  $t^9x^9y^5$ , 20.  $x^7y^3z^5$ , 21.  $2a^4b^6c$ , 22.  $-2a^4b^3m^4$ , 23.  $24m^{6a}$ , 24.  $-60a^{5b+3}$   
 25.  $-10x^{3m+3}$ , 26.  $-15a^{m+3}b^7$ , 27.  $28x^{2a+3}y^{b+4}$ , 28.  $-10a^{3m+1}b^{m+1}$ ,  
 29.  $-12a^{4m-1}x^{3b}$ , 30.  $-8a^{3k}b^{3k}$ , 31.  $-30k^{2a}t^{3a+2}$ , 32.  $6m^{3t}n^{3t}$ ,  
 33.  $10a^3b^{3-2k}c$ , 34.  $-2a^{b+3}k^2$ , 35.  $-63a^2b^3$ , 36.  $-4a^5m^5$ , 37.  $72a^7b^{11}$ ,  
 38.  $-25x^7y^{12}$ , 39.  $18k^9t^{10}$ , 40.  $x^{12}y^{10}$ , 41.  $4m^{4a+2}k^{4a}$ , 42.  $-9a^{x+1}b^{x+3}$ .

כה. כפול (חד-אבריים ברב-אבריים).

- |   |  |
|---|--|
| 1. $2(a+3b)$  | 2. $-(a-4x-5y)$                              |
| 3. $-2(-2a+3b-c)$                                     | 4. $a(2a-b+3ab)$                             |
| 5. $-3b(a-4b+2b^2)$                                   | 6. $(3x-y+2xy)4y$                            |
| 7. $(2a^2+3a-1)(-2a)$                                 | 8. $3(4a^2-5b+3) \cdot 3b$                   |
| 9. $-(2x+3y-6) \cdot xy$                              | 10. $-2a(a^2+b^2-ab) \cdot 3b$               |
| 11. $-x(xy-3x+y) \cdot (-2y^2)$                       | 12. $\frac{1}{2}x^2y(4x+6y-2y^2)$            |
| 13. $-1\frac{1}{3}k(6ak+3a^2-9k^2)$                   | 14. $-2\frac{1}{4}mn(3m-5n^2) \cdot (-4m^2)$ |
| 15. $(3x^2y-4xy^2-y)(-2x^2y^3)$                       | 16. $-2m^2k^3(4km^2-2\frac{1}{2}k^2+3km)$    |
| 17. $4(x-3)+2(5-x)-3(2x+1)$                           | 18. $-5(x+y-1)+3(y-2-x)$                     |
| 19. $a(a+2b-2c)-2(ab-ac-a)$                           | 20. $2x(3x-4y)+5y(2y-3x)$                    |
| 21. $5a^2(a+3b^2)-2a(3a^2-2ab^2)$                     |  |
| 22. $3km(m^2-2k^2)-m^2k(3m-2k^2)$                     |  |
| 23. $2\frac{1}{2}ab^3(4a^3b-2b^3)-(5a^3b^2-b^4)2ab^2$ |  |
| 24. $3a^2m(am^2-m^3+a^4m)-(3am+3a^4-m^2)a^2m^2$       |  |
| 25. $2x+3[x-4(x-y)+3y]-7x(y-1)$                       |  |

26.  $a^2 - 4[5a - a(a+5)] - a[-2(3-2a) + a]$   
 27.  $2x^2 - x[2(x+3y) - 4(2y+x)] \cdot 3 - 6xy$   
 28.  $2\left\{5k^3 - k\left[k^2 - 2(3-k^2)\right]\right\} + 2k(1-k^2) \cdot 2$   
 29.  $3a - \left\{a + 3[a - b(a+3) + 2ab] - 3b(a-3)\right\} \cdot 5$

תשובות:

1.  $2a+6b$ , 2.  $-a+4x+5y$ , 3.  $4a-6b+2c$ , 4.  $2a^2-ab+3a^2b$ ,  
 5.  $-3ab+12b^2-6b^3$ , 6.  $12xy-4y^2+8xy^2$ , 7.  $-4a^3-6a^2+2a$ ,  
 8.  $36a^2b-45b^2+27b$ , 9.  $-2x^2y-3xy^2+6xy$ , 10.  $-6a^3b-6ab^3+6a^2b^2$ ,  
 11.  $2x^2y^3-6x^2y^2+2xy^3$ , 12.  $2x^3y+3x^2y^2-x^2y^3$ , 13.  $-8ak^2-4a^2k+12k^3$ ,  
 14.  $27m^4n-45m^3n^3$ , 15.  $-6x^4y^4+8x^3y^5+2x^2y^4$ , 16.  $-8k^4m^4+5k^5m^2-6k^4m^3$ ,  
 17.  $-4x-5$ , 18.  $-8x-2y-1$ , 19.  $a^2+2a$ , 20.  $6x^2-23xy+10y^2$ ,  
 21.  $19a^2b^2-a^3$ , 22.  $2k^3m^2-6k^3m$ , 23.  $-3ab^6$ , 24.  $-2a^2m^4$ , 25.  $21y-7xy$ ,  
 26.  $6a$ , 27.  $8x^2$ , 28.  $16k$ , 29.  $-17a$ .

**כז.** כפול את הרב אברים והבא את התוצאה לצורה הפשוטה ביותר:

- |                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| 1. $(a+1)(a+3)$                   | 2. $(b+4)(b-2)$               |
| 3. $(c-2)(3-c)$                   | 4. $(x+4)(3+2x)$              |
| 5. $(4-3a)(a+2)$                  | 6. $(2m-1)(3-4m)$             |
| 7. $(2x+3y)(x-y)$                 | 8. $(a+2m)(3m-2a)$            |
| 9. $(2x-a)(3a-x)$                 | 10. $(x+1)(x^2-x+1)$          |
| 11. $(a+b)(a+1-b)$                | 12. $(3a+b+4)(a-b)$           |
| 13. $(x+y+1)(x-1)$                | 14. $(a-b-5)(b-5)$            |
| 15. $(k^2+3k+2)(k-2)$             | 16. $(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$  |
| 17. $(a+c+b)(a+b-c)$              | 18. $2(2m+1)(m-3)$            |
| 19. $-(x+7)(4-x)$                 | 20. $-3x(2x+1)(2-x)$          |
| 21. $-x(x^3+1)(2-x)$              | 22. $-(-3m^2-2)(m+1) \cdot 3$ |
| 23. $-\frac{1}{2}a^2(4a+2)(2a-1)$ | 24. $-(b^2-2b-3)(b+3)$        |

25.  $-2(c-3)(c^2-6c+9)$       26.  $2x(x-4y)+(x-y)(2x-3y)$   
 27.  $(a-b)(3a-b)-2b(a+0.5b)$       28.  $(3x+1)(x-2)+(x-4)(2x+5)$   
 29.  $(4a+3)(1-a)+2(a+4)(a-2)$       30.  $(x+7)(1-2x)+2(x+4)(x-3)$   
 31.  $(2m-1)(3-m)-(1-2m)(m-4)$   
 32.  $2(3a+1)(a-1)-(2a+3)(2-a)$   
 33.  $-(b+5)(6-b)-b(b-1)$   
 34.  $(c+1)(c-2)-2(2-3c)(c+2)-4c(c+1)$   
 35.  $(x^2+5)(x^2-x-2)-x(x-5)(1-x)$   
 36.  $(k^2-k)(k^2+k+7)-k^2(2-k)(3-k)$   
 37.  $(x^2+y^2+2xy)(x+y)-3xy(x+y)$   
 38.  $(a+1)(a-1)(a+2)$   
 39.  $(2-b)(b+1)(b+2)$   
 40.  $(3x+1)(x-1)(2-x)$   
 41.  $(x^3+1)(x-1)(1+x+x^2)$   
 42.  $(2a^2+1)(1-2a^2)(1+4a^4)+8a^2(2a^6-1)$

תשובות:

1.  $a^2+4a+3$ , 2.  $b^2+2b-8$ , 3.  $-c^2+5c-6$ , 4.  $2x^2+11x+12$ ,  
 5.  $-3a^2-2a+8$ , 6.  $-8m^2+10m-3$ , 7.  $2x^2+xy-3y^2$ , 8.  $6m^2-am-2a^2$ ,  
 9.  $-2x^2+7ax-3a^2$ , 10.  $x^3+1$ , 11.  $a^2-b^2+a+b$ , 12.  $3a^2-b^2-2ab+4a-4b$ ,  
 13.  $x^2+xy-y-1$ , 14.  $ab-b^2-5a+25$ , 15.  $k^3+k^2-4k-4$ , 16.  $a^8+a^4+1$ ,  
 17.  $a^2+b^2-c^2+2ab$ , 18.  $4m^2-10m-6$ , 19.  $x^2+3x-28$ , 20.  $6x^3-9x^2-6x$ ,  
 21.  $x^5-2x^4+x^2-2x$ , 22.  $9m^3+9m^2+6m+6$ , 23.  $a^2-4a^4$ , 24.  $9+9b-b^2-b^3$ ,  
 25.  $54-54c+18c^2-2c^3$ , 26.  $4x^2-13xy+3y^2$ , 27.  $3a^2-6ab$ , 28.  $5x^2-8x-22$ ,  
 29.  $-2a^2+5a-13$ , 30.  $-11x-17$ , 31.  $1-2m$ , 32.  $8a^2-5a-8$ , 33.  $-30$ ,  
 34.  $3c^2+3c-10$ , 35.  $x^4-3x^2-10$ , 36.  $5k^3-7k$ , 37.  $x^3+y^3$ , 38.  $a^3+2a^2-a-2$ ,  
 39.  $4+4b-b^2-b^3$ , 40.  $-3x^3+8x^2-3x-2$ , 41.  $x^6-1$ , 42.  $1-8a^2$ .

### סעיף 3.5

כז. הבא לצורה הפשוטה ביותר בעזרת נוסחות הכפל המקוצר

1.  $(a+5)(a-5)$
2.  $(x^2-y)(x^2+y)$
3.  $(3b+4)(3b-4)$
4.  $(2x-7y)(7y+2x)$
5.  $(a^3+4)(4-a^3)$
6.  $(x^2y+2a^3)(2a^3-x^2y)$
7.  $(3a^5-7b^2)(7b^2+3a^5)$
8.  $(a^x+b)(a^x-b)$
9.  $(x^3+b^{2a})(x^3-b^{2a})$
10.  $(a^{k+1}-1)(1+a^{k+1})$
11.  $(\frac{a}{5}+4)(\frac{a}{5}-4)$
12.  $(\frac{2a}{3}+\frac{1}{2})(\frac{2a}{3}-\frac{1}{2})$
13.  $(\frac{ab}{2}+c^2)(\frac{ab}{2}-c^2)$
14.  $(\frac{2a^2}{3}+\frac{k}{2})(\frac{2a^2}{3}-\frac{k}{2})$
15.  $(\frac{b}{3}-a^3)(a^3+\frac{b}{3})$
16.  $(\frac{k^3}{7}+\frac{m^2}{5})(\frac{m^2}{5}-\frac{k^3}{7})$
17.  $(a^2-0.1)(a^2+0.1)$
18.  $(3b-1.2)(1.2+3b)$
19.  $(0.5a^4-2)(0.5a^4+2)$
20.  $(\frac{1}{3}a-1\frac{1}{2}b)(\frac{1}{3}a+1\frac{1}{2}b)$
21.  $(x+1)(x-1)(1+x^2)$
22.  $(a+2)(2-a)(a^2+4)$
23.  $(x+5)^2$
24.  $(2a-1)^2$
25.  $(a-3b)^2$
26.  $(x^2+2y)^2$
27.  $(3x^3+1)^2$
28.  $(\frac{a}{2}-1)^2$
29.  $(2x^2-\frac{a}{2})^2$
30.  $(\frac{x}{2}-\frac{3}{x})^2$
31.  $(\frac{a}{2}+b^2)^2$
32.  $(\frac{1}{2a}-a^2)^2$
33.  $(\frac{x^2}{3}+2m)^2$
34.  $(\frac{3}{2x}+\frac{x^2}{3})^2$
35.  $(\frac{ab}{2}+\frac{2}{a})^2$
36.  $(\frac{m^2}{n}-\frac{n^2}{m})^2$
37.  $(a^3-0.5)^2$
38.  $(0.5a+b^2)^2$

39.  $(15b^3 - k)^2$
40.  $(1\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b)^2$
41.  $(2x^2 - 3x)^2$
42.  $(x^3y + 3x^2y^4)^2$
43.  $(2a^2b + \frac{3b^2}{2a})^2$
44.  $(x^a + 5)^2$
45.  $(3a^{2k} - b^3)^2$
46.  $(5a^{k+1} - b^{3k})^2$
47.  $(2x^{a-1} + x^{2-a}y)^2$
48.  $(x + 2y)^3$
49.  $(3x - y)^3$
50.  $(3x^2 + 2)^3$
51.  $(5x - 2x^2)^3$
52.  $(\frac{x}{3} + 3y^2)^3$
53.  $(2x^2y - 3xy^2)^3$
54.  $(\frac{x}{2} + 4x^2)^3$
55.  $(\frac{2a}{b} - \frac{b}{2a})^3$
56.  $(a^k + 2b^3)^3$
57.  $(2a^m - 3a^{m+1})^3$
58.  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
59.  $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
60.  $(x^2 + 3y)(x^4 - 3x^2y + 9y^2)$
61.  $(3x^3 - 2x^2)(9x^6 + 6x^5 + 4x^4)$
62.  $(x + 3 + a)^2$
63.  $(2a + 3x + 4y)^2$
64.  $(x - 2y + 3t)^2$
65.  $(3k - 4t - y)^2$
66.  $(x + 2y)(x - 2y) + 4y^2$
67.  $(3x - 1)(1 + 3x) - x(9x - 1)$
68.  $(2x - 3y)^2 - (2x + 3y)^2$
69.  $(a^2 + 5b)^2 - 5b(2a^2 + 5b)$
70.  $(b^2 + 2c)(2c - b^2) + (b^2 + 2c)^2$
71.  $(9x + y)(x - 4y) - (3x + 2y)(3x - 2y)$
72.  $(5a^2 + 3b)^2 - (3b + 5a)(6ab + 3b)$
73.  $2(8a - 1)(a + 4) - (4a + 1)(4a - 1)$
74.  $(2a + 5)^2 - 2(2a + 3)(a + 4)$
75.  $(3x - 4)(3x + 4) + 3(x + 5)(1 - 3x)$
76.  $(k^2 + 3)^2 + k^2(2 - k)(k - 3)$
77.  $(a + 3b)(3b - a) - 4(\frac{a}{2} - b)^2$
78.  $(3a - 2x)^2 - 4(\frac{3a}{2} - x)(x + \frac{3a}{2})$
79.  $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$
80.  $(2x + y)^3 - 3x(2x + y)^2$
81.  $(a + m)^3 - (a + m)(a^2 - am + m^2)$
82.  $(3x - 2y)^3 - 18xy(2y - 3x)$

83.  $(3m - n)^2 + (2m - 5n)^2 - 13m(m - n)$   
 84.  $(5x^2 + 3y)^2 - (x^2 - 2y)^2 - 6x^2(5y + 4x^2)$   
 85.  $(x + 5y)(x^2 - 5xy + 25y^2) - (x^3 + 100y^3)$   
 86.  $(2x + y + t)^2 - (2x + t)^2$   
 87.  $(a - x - y)^2 + (a - y)(a + y) - a(a - 2x - 2y)$   
 88.  $(a + b)^2 - (a + b + 1)^2 + (a + 2)(b + 2)$   
 89.  $(a + k)^2 - 2(a + k)(a - k) + (k - a)^2$   
 90\*  $(x^m - y^{k-1})(x^m + y^{k-1}) - (x^m - y^{k-1})^2 - 2y^{k-1}(x^m - y^{k-1})$

תשובות:

1.  $a^2 - 25$ , 2.  $x^4 - y^2$ , 3.  $9b^2 - 16$ , 4.  $4x^2 - 49y^2$ , 5.  $16 - a^6$ , 6.  $4a^6 - x^4y^2$ ,  
 7.  $9a^{10} - 49b^4$ , 8.  $a^{2x} - b^2$ , 9.  $x^6 - b^{4a}$ , 10.  $a^{2k+2} - 1$ , 11.  $\frac{a^2}{25} - 16$ ,  
 12.  $\frac{4a^2}{9} - \frac{1}{4}$ , 13.  $\frac{a^2b^2}{4} - c^4$ , 14.  $\frac{4a^4}{9} - \frac{k^2}{4}$ , 15.  $\frac{b^2}{9} - a^6$ , 16.  $\frac{m^4}{25} - \frac{k^6}{49}$ ,  
 17.  $a^4 - 0.01$ , 18.  $9b^2 - 1.44$ , 19.  $0.25a^8 - 4$ , 20.  $\frac{1}{9}a^2 - 2\frac{1}{4}b^2$  21.  $x^4 - 1$ ,  
 22.  $16 - a^4$ , 23.  $x^2 + 10x + 25$ , 24.  $4a^2 - 4a + 1$ , 25.  $a^2 - 6ab + 9b^2$ ,  
 26.  $x^4 + 4x^2y + 4y^2$ , 27.  $9x^6 + 6x^3 + 1$ , 28.  $\frac{a^2}{4} - a + 1$ , 29.  $4x^4 - 2x^2a + \frac{a^2}{4}$ ,  
 30.  $\frac{x^2}{4} - 3 + \frac{9}{x^2}$ , 31.  $\frac{a^2}{4} + ab^2 + b^4$ , 32.  $\frac{1}{4a^2} - a + a^4$ , 33.  $\frac{x^4}{9} + \frac{4mx^2}{3} + 4m^2$ ,  
 34.  $\frac{9}{4x^2} + x + \frac{x^4}{9}$ , 35.  $\frac{a^2b^2}{4} + 2b + \frac{4}{a^2}$ , 36.  $\frac{m^4}{n^2} - 2mn + \frac{n^4}{m^2}$ , 37.  $a^6 - a^3 + 0.25$ ,  
 38.  $0.25a^2 + ab^2 + b^4$ , 39.  $2.25b^6 - 3b^3k + k^2$ , 40.  $2\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{1}{9}b^2$   
 41.  $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$ , 42.  $x^6y^2 + 6x^5y^5 + 9x^4y^8$ , 43.  $4a^4b^2 + 6ab^3 + \frac{9b^4}{4a^2}$ ,  
 44.  $x^{2a} + 10x^a + 25$ , 45.  $9a^{4k} - 6a^{2k}b^3 + b^6$ , 46.  $25a^{2k+2} - 10a^{k+1}b^{3k} + b^{6k}$ ,  
 47.  $4x^{2a-2} + 4xy + x^{4-2a}y^2$ , 48.  $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ , 49.  $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$ ,  
 50.  $27x^6 + 54x^4 + 36x^2 + 8$ , 51.  $125x^3 - 150x^4 + 60x^5 - 8x^6$ ,  
 52.  $\frac{x^3}{27} + x^2y^2 + 9xy^4 + 27y^6$ , 53.  $8x^6y^3 - 36x^5y^4 + 54x^4y^5 - 27x^3y^6$ ,  
 54.  $\frac{x^3}{8} + 3x^4 + 24x^5 + 64x^6$ , 55.  $\frac{8a^3}{b^3} - \frac{6a}{b} + \frac{3b}{2a} - \frac{b^3}{8a^3}$ ,  
 56.  $a^{3k} + 6a^{2k}b^3 + 12a^kb^6 + 8b^9$ , 57.  $8a^{3m} - 36a^{3m+1} + 54a^{3m+2} - 27a^{3m+3}$ ,

58.  $x^3 + 27$ , 59.  $8a^3 - b^3$ , 60.  $x^6 + 27y^3$ , 61.  $27x^9 - 8x^6$ ,  
 62.  $x^2 + 6x + 2ax + a^2 + 6a + 9$ , 63.  $4a^2 + 9x^2 + 16y^2 + 12ax + 16ay + 24xy$ ,  
 64.  $x^2 + 4y^2 + 9t^2 - 4xy + 6xt - 12yt$ , 65.  $9k^2 + 16t^2 + y^2 - 24kt - 6ky + 8ty$ , 66.  $x^2$ ,  
 67.  $x - 1$ , 68.  $-24xy$ , 69.  $a^4$ , 70.  $8c^2 + 4b^2c$ , 71.  $-35xy$ , 72.  $25a^4 - 18ab^2 - 15ab$ ,  
 73.  $62a - 7$ , 74.  $-2a + 1$ , 75.  $-42x - 1$ , 76.  $5k^3 + 9$ , 77.  $5b^2 + 4ab - 2a^2$ ,  
 78.  $8x^2 - 12ax$ , 79.  $6x^2 + 2$ , 80.  $-4x^3 + 3xy^2 + y^3$ , 81.  $3a^2m + 3am^2$ , 82.  $27x^3 - 8y^3$ ,  
 83.  $26n^2 - 13nm$ , 84.  $4x^2y + 5y^2$ , 85.  $25y^3$ , 86.  $y^2 + 4xy + 2ty$ , 87.  $x^2 + 2xy + a^2$ ,  
 88.  $ab + 3$ , 89.  $4k^2$ , 90.  $0$

**כח.** העזר בנוסחת הכפל כדי לחשב את:

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1. $49 \cdot 51 = (50 - 1)(50 + 1) = ?$ | 2. $101 \cdot 99$                  |
| 3. $23 \cdot 17$                        | 4. $1.9 \cdot 2.1$                 |
| 5. $51^2 = (50 + 1)^2 = ?$              | 6. $91^2$                          |
| 7. $79^2$                               | 8. $101^2$                         |
| 9. $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$       | 10. $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$ |

תשובות:

1. 2499, 2. 9999, 3. 391, 4. 3.99, 5. 2601, 6. 8281, 7. 6241, 8. 102.01, 9. 2, 10. 2.

**כט.** נתון  $A - B = 3$ ,  $A + B = 9$

חשב את ערכי הביטויים הבאים בלי לחשב את  $A$  ואת  $B$ .

א.  $A^2 - B^2$     ב.  $(A - B)^2$     ג.  $AB$

תשובות: א. 27, ב. 9, ג. 18.

**ל.** נתון:  $A + B = 4$ ,  $A^2 + B^2 = 10$ . חשב:

א.  $2AB$     ב.  $(A - B)^2$     ג.  $A^2 - B^2$

תשובות: א. 6, ב. 4, ג. 8.

**לא.** נתון  $A + B = 7$ ,  $AB = 10$ . חשב:

א.  $A^2 + B^2$     ב.  $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$     ג.  $A - B$

תשובות: א. 29, ב.  $\frac{7}{10}$ , ג. 3.

לב. נתון:  $A^2 + B^2 = 50$ ,  $AB=25$ . חשב:  $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$

תשובה: 0

לג. נתון:  $A^2 + B^2 = a$ ,  $2AB=a$ . הראה כי  $A=B$ .

לד. נתון כי  $(A+B)^2 = K$ ,  $A^2 + B^2 = K$ . הראה כי, לפחות אחד מהאברים  $B, A$  שווה ל-0.

\*לה. נתון  $(A+B)^2 = m$ ,  $A \neq 0$ . האם יתכן ש-  $AB = \frac{1}{2}m$ ?

תשובה: לא

## סעיף 4

לו. חלק את החד-אבריים הבאים:

1.  $15x:5$

3.  $-12ab:(3b)$

5.  $-3ab:(ab)$

7.  $-18a^2bc^3:(6abc)$

9.  $17t^4x^5y:(-34t^2x^2y)$

11.  $-12a^4k^5:(10a^6k^4)$

13.  $45x^3y^{10}:\left(4\frac{1}{2}x^7y^{10}\right)$

15.  $-3\frac{1}{3}a^3b^{10}:\left(-\frac{2}{3}a^2b^8\right)$

17.  $-39a^{2k}:(-13a^k)$

19.  $-15a^{b+1}k^{c+2}:(3ak^2)$

21.  $-4.8k^3b^2:(-2.4k^{a+3}b)$

23.  $-4a^{3x-4}b^{4-x}:(-2a^{2x-4}b^{3-2x})$

25.  $a^{3x^2+4}x^{a^2+5}:(-a^{2x^2+4}x^{2-a^2})$

2.  $8ab:(4a)$

4.  $-21abc:(-7ac)$

6.  $-2a^2:(-a^2)$

8.  $42x^3y^5:(35x^2y)$

10.  $-36a^2b^3x:(9a^4bx^2)$

12.  $-24a^2b^5:(-32a^6c)$

14.  $-88a^4k^3t^8:(-4.4ak^4t^7)$

16.  $-12k^a:(6k^b)$

18.  $-28m^{3a}:(7m^3)$

20.  $-25x^{2a+3}y^{a-1}:(5x^{a+3}y)$

22.  $34x^{2a+1}y^{3b+2}:(-17x^{a+2}y^{2b-1})$

24.  $-9k^{a^2-a+1}t^{3a-4}:(3k^{a^2-2a}t^{3a-7})$

תשובות:

1.  $3x$ , 2.  $2b$ , 3.  $-4a$ , 4.  $3b$ , 5.  $-3$ , 6.  $2$ , 7.  $-3ac^2$ , 8.  $\frac{6}{5}xy^4$ , 9.  $-\frac{1}{2}t^2x^3$ ,  
 10.  $-\frac{4b^2}{a^2x}$ , 11.  $-\frac{6k}{5a^2}$ , 12.  $\frac{3b^5}{4a^4c}$ , 13.  $\frac{10}{x^4}$ , 14.  $\frac{20a^3t}{k}$ , 15.  $5ab^2$ , 16.  $-2k^{a-b}$ ,  
 17.  $3a^k$ , 18.  $-4m^{3a-3}$ , 19.  $-5a^bk^c$ , 20.  $-5x^ay^{a-2}$ , 21.  $\frac{2b}{k^a}$ , 22.  $-2x^{a-1}y^{b+3}$ ,  
 23.  $2a^xb^{x+1}$ , 24.  $-3k^{a+1}t^3$ , 25.  $-a^{x^2} \cdot x^{2a^2+3}$ .

לז. חלק (רב-אבר בחד-אבר)

- $(4a + 12b - 16x):4$
- $(-3a^2 + 6bc - 9c):(-3)$
- $(-2ax + 8bx - 10cx):(-2x)$
- $(4a^2x - 12a^3x^2 + 8a):(-2a)$
- $(15a^3b^2 - 24a^2b^3 - 9a^4b):(3a^2b)$
- $(-4.5x^2y^5 + 3.5x^5y^2):(-0.5x^2y^2)$
- $-(44a^3b^3c^2 - 33a^4b^2c^3):(-11a^3bc^2)$
- $(-2\frac{1}{2}x^2y^3 + 5x^4y^4 - 7\frac{1}{2}xy^2):(-2\frac{1}{2}xy^2)$
- $(-8a^4x^3y^5 + 12a^6x^4y^3 - 4a^2x^3y^3):(4a^2x^3y^3)$
- $(27k^4t^3 - 9k^5t^4 + 3k^3t^2):(3k^3t^2)$
- $(12a^{k+3} - 8a^4):(4a^3)$
- $(-5a^{3b+4} - 10a^{2b-1} + 15a^{b-5}):(-5a^{b-5})$
- $(14x^{2a+1}y^{a-2} - 21x^{3a-2}y^{2a+4}):(7x^{a+2}y^{a-3})$
- $(18k^{3a-1}t^{a-2} - 12k^{2a-1}t^{2a-3} + 6k^{a-1}t^{a-4}):(6k^{a-1}t^{a-4})$

תשובות:

1.  $a+3b-4x$ , 2.  $a^2-2bc+3c$ , 3.  $a-4b+5c$ , 4.  $-2ax+6a^2x^2-4$ , 5.  $5ab-8b^2-3a^2$ ,  
 6.  $9y^3-7x^3$ , 7.  $4b^2-3abc$ , 8.  $xy-2x^3y^2+3$ , 9.  $-2a^2y^2+3a^4x-1$ ,  
 10.  $9kt-3k^2t^2+1$ , 11.  $3a^k-2a$ , 12.  $a^{2b+9}+2a^{b+4}-3$ , 13.  $2x^{a-1}y-3x^{2a-4}y^{a+7}$ ,  
 14.  $3k^{2a}t^2-2k^at^{a+1}+1$ .

לח. חלק (רב-אבר ברב-אבר)

1.  $(a^2 + 13a + 30):(a + 10)$
2.  $(b^2 - 15b + 36):(b - 3)$
3.  $(c^2 + 5c + 6):(2 + c)$
4.  $(x^2 - 8x - 9):(x + 1)$
5.  $(3a + a^2 - 10):(a - 2)$
6.  $(2a^2 + 9a - 5):(2a - 1)$
7.  $(3x^2 - 14 - 19x):(3x + 2)$
8.  $(a^2 - 3ab - 10b^2):(a + 2b)$
9.  $(12y^2 + x^2 - 7xy):(x - 3y)$
10.  $(2a^2 - 3ab - 2b^2):(a - 2b)$
11.  $(3a^2 - 4ab - 4b^2):(3a + 2b)$
12.  $(4x^3 + 4x^2y - 3xy^2):(2x^2 - xy)$
13.  $(a^4 - 7a^2 + 12):(a^2 - 3)$
14.  $(2x^6 - 5x^3 - 3):(2x^3 + 1)$
15.  $(2a^2b + 5ab + 4a + 10):(2a + 5)$
16.  $(6xy^2 - 4xy - 3y + 2):(3y - 2)$
17.  $(10x^3 - 13x^2 - 5x + 3):(5x^2 + x - 1)$
18.  $(x^3 + 8):(x + 2)$
19.  $(8a^3 - 27):(4a^2 + 6a + 9)$
20.  $(x^4 - 16):(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
21.  $(16a^8 - 1):(2a^2 + 1)$
22.  $(a^4 + a^2 + 1):(a^2 + a + 1)$
23.  $(6x^3 + 15x^2 - 8x - 20):(2x + 5)$
24.  $(5x^2 - 14x - 3):(5x + 1)$

תשובות:

- 1.a+3 , 2.b-12 , 3.c+3 , 4.x-9 , 5.a+5 , 6.a+5 , 7.x-7 , 8.a-5b , 9.x-4y ,  
 10.2a+b , 11.a-2b , 12.2x+3y , 13. $a^2 - 4$  , 14. $x^3 - 3$  , 15.ab+2 , 16.2xy-1 ,  
 17.2x-3 , 18. $x^2 - 2x + 4$  , 19.2a-3 , 20.x-2 , 21. $8a^6 - 4a^4 + 2a^2 - 1$  ,  
 22. $a^2 - a + 1$  , 23. $3x^2 - 4$  , 24.x-3 .

## פרק ג: פרוק לגורמים

**פרוק לגורמים** היא פעולה של הפיכת רב-אבר למכפלה של חד-אבר ברב-אבר, או של רב-אברים. למעשה, זוהי פעולה הפוכה ל"פתיחת סוגריים" - כפל חד-אבר ברב-אבר או כפל רב אברים. קיימות מספר שיטות פרוק לגורמים:

- הוצאת גורם משותף מחוץ לסוגריים.
- פרוק לפי חלוקה לקבוצות.
- פרוק לפי נוסחות.
- פרוק של תלת אבר ריבועי.

### 1. הוצאת גורם משותף

**הגורם המשותף** הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של כל אברי רב-האבר. כדי לפרק רב-אבר לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף מבצעים את הפעולות הבאות:

- מוציאים את המספר הגדול ביותר שמחלק את מקדמי כל האברים.
- מוציאים את האותיות המופיעות בכל האברים, ולוקחים כל אות בחזקה הנמוכה ביותר שבה היא מופיעה ברב-האבר; באמצעות שתי הפעולות הנ"ל מצאנו את הגורם המשותף.
- כותבים את הגורם המשותף שמצאנו בשני השלבים הקודמים, פותחים סוגריים ובתוכם את מנות החילוק של כל אחד מאברי רב-האבר בגורם המשותף.



- $2a + 4b - 6c = 2(a + 2b - 3c)$
- $3ab + 5a^2 = a(3b + 5a)$
- $5a^2x^3 + 10x^2 - 15ax = 5x(a^2x^2 + 2x - 3a)$
- $12a^3b^2 - 6a^4b^3 + 3a^2b = 3a^2b(4ab - 2a^2b^2 + 1)$
- $8a^{2k} + 4a^{k+1} - 2a^k = 2a^k(4a^k + 2a - 1)$
- $a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$
- $k(m - a) + 4(a - m) = k(m - a) - 4(m - a) = (m - a)(k - 4)$
- $(a + k)^2 + a(a + k) - 2k(k + a) = (a + k)[(a + k) + a - 2k] = (a + k)(2a - k)$

## שים לב !

- אם הגורם המשותף זהה לאחד מהאברים המרכיבים את רב-האבר המתפרק, מנת החילוק הנרשמת בתוך הסוגריים היא 1 (דוגמאות 4, 5 - אבר אחרון). הימנע מהטעות הנפוצה שלפיה מתעלמים מאבר כזה ולא רושמים אותו; מספר האברים ברב-האבר זהה למספר האברים בסוגריים.
- הביטויים  $a+k$  ו-  $k+a$  שבדוגמה 8 שווים; לעומתם, הביטויים  $(m-a)$  ו-  $(a-m)$  שבדוגמה 7 נבדלים בסימן, כלומר:  $a-m=-(m-a)$ .

$$ax^2 + bx + c = x \left( ax + b + \frac{c}{x} \right)$$

למעשה, אם יש צורך, אפשר להוציא כל ביטוי מחוץ לסוגריים. למשל:

## 2. פרוק לגורמים לפי חלוקה לקבוצות

- פרוק לגורמים לפי קבוצות מתאים לרב-אבר שמכיל לפחות ארבעה אברים. לפי שיטה זו:
- \* מתחלק רב-האבר למספר קבוצות (בעלות אותו מספר אברים) כשלכל קבוצה גורם משותף.
  - \* אם הביטויים שבתוך כל הסוגריים (המתקבלים אחרי הוצאת הגורמים המשותפים), הם זהים, אפשר להוציא ביטוי זה כגורם משותף (דוגמאות 6-8 בסעיף קודם).

### דוגמאות

- $ak + bk + am + bm = k(a + b) + m(a + b) = (a + b)(k + m)$ 

אותה תוצאה תתקבל, אם נתייחס לזוגות: ראשון - שלישי ושני - רביעי:

 $ak + am + bk + bm = a(k + m) + b(k + m) = (k + m)(a + b)$
- $3ax - 6a^2 + 2bx - 4ab = 3a(x - 2a) + 2b(x - 2a) = (x - 2a)(3a + 2b)$ 

או בצרופים אחרים:

 $3ax + 2bx - 6a^2 - 4ab = x(3a + 2b) - 2a(3a + 2b) = (3a + 2b)(x - 2a)$
- $2a^3b + 6a^2b^2 - 2a^2bc - 3ac^2 - 9bc^2 + 3c^3 =$   
 $= 2a^2b(a + 3b - c) - 3c^2(a + 3b - c) = (a + 3b - c)(2a^2b - 3c^2)$ 

נקבל אותה תוצאה אם נתייחס לשלושה זוגות:

 $2a^3b - 3ac^2 + 6a^2b^2 - 9bc^2 - 2a^2bc + 3c^3 =$   
 $= a(2a^2b - 3c^2) + 3b(2a^2b - 3c^2) - c(2a^2b - 3c^2) = (2a^2b - 3c^2)(a + 3b - c)$

### 3. פרוק לגורמים לפי נוסחות

בפירוק לגורמים לפי נוסחות, נעשה שימוש בנוסחות הכפל, בכיוון הפוך מזה שלמדנו קודם.

כיצד נוהה את הנוסחה שלפיה כדאי לפרק את רב-האבר?  
להלן מספר הנחיות, המקלות עלינו את זיהוי הנוסחה המתאימה.

#### א. אם רב-האבר מכיל הפרש שני ביטויים ריבועיים, נשתמש בנוסחה הראשונה

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

במקרה זה מוציאים את שורשי הביטויים הריבועיים ורושמים מכפלת סכום השורשים בהפרשם,

למשל, בפרוק הביטוי  $x^2 - 4y^2$  שהוא הפרש שני ריבועים, מוציאים את שורשי הביטויים  $x$  ו- $2y$ , ורושמים מכפלת סכום -  $(x+2y)$  בהפרשם -  $(x-2y)$ :  
$$x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$$

#### ב. אם רב-האבר המסודר מכיל שלושה אברים, בודקים התאמה לנוסחות:

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

כלומר: אם האברים הקיצוניים הם ריבועי ביטויים, מוציאים את השורשים, ובודקים אם מכפלת השורשים ב-2 שווה לאבר האמצעי. אם כן, תוצאת הפרוק היא ריבוע הסכום או ההפרש - בהתאם לסימן האבר האמצעי.

למשל:

$$1. \quad x^2 + 6xy^2 + 9y^4 = (x + 3y^2)^2$$

↓      ↑      ↓

$$x \rightarrow 2 \cdot x \cdot 3y^2 \leftarrow 3y^2$$

$$2. \quad 25a^6 - 10a^3 + 1 = (5a^3 - 1)^2$$

↓            ↑      ↓

$$5a^3 \rightarrow 2 \cdot 5a^3 \cdot 1 \leftarrow 1$$

#### ג. כאשר רב-האבר המסודר הוא ממעלה שלישית, ומכיל ארבעה אברים, בודקים התאמה לנוסחה

$$A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$$

למשל:

$$1. \quad 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x + y)^3$$

$$2. \quad 27a^9 - 27a^6 + 9a^3 - 1 = (3a^3 - 1)^3$$

בשימוש בנוסחת ההפרש  $(A - B)^3$ , יש לבדוק אם הסימנים מתאימים!

**ד. כאשר רב-האבר מכיל שני מחוברים המהווים כל אחד חזקה שלישית של ביטוי אלגברי או של מספר, בודקים התאמה לנוסחות 6, 7:**

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

למשל בביטוי:  $x^3 - 8y^6$  מוציאים שורש שלישי של כל אבר:  $x - 2y$  ורושמים בסוגריים את הפרשם (כי בביטוי הנתון רשום הפרש), מוכפל

בסוגריים המכילים את הביטוי:  $x^2 + x \cdot 2y + (2y)^2$ .

$$x^3 - 8y^6 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) \quad \text{בסיכום:}$$

$$27a^6 + 64b^9 = (3a^2 + 4b^3)(9a^4 - 12a^2b^3 + 16b^6) \quad \text{באותו אופן:}$$



**הערה** לפני פירוק לפי נוסחה, יש לבדוק אם ניתן להוציא גורם משותף ורק אחרי הוצאת הגורם המשותף הגדול ביותר, להמשיך לפרק לפי נוסחה.

למשל:

$$1. \quad 5x^2 - 20y^2 = 5(x^2 - 4y^2) = 5(x + 2y)(x - 2y)$$

$$2. \quad a^7 - a^5 = a^5(a^2 - 1) = a^5(a + 1)(a - 1)$$

$$3. \quad 3a^2x + 18ab^2x + 27b^4x = 3x(a^2 + 6ab^2 + 9b^4) = 3x(a + 3b^2)^2$$

$$4. \quad x^7 - 4x^4y + 4xy^2 = x(x^6 - 4x^3y + 4y^2) = x(x^3 - 2y)^2$$

#### 4. פרוק לגורמים של תלת אבר ריבועי - טרינום

בסעיף זה נתייחס לטרינום (תלת-אבר) ריבועי מהסוג:

$$AM^2 + BMN + CN^2$$

$$AM^2 + BM + C$$

או מהסוג:

$$3x^2 + 8xy + 5y^2$$

למשל:

$$7a^2 - 4a - 3$$

כדי לפרק תלת-אבר ריבועי לגורמים יש להקפיד על שלושה שלבים (לא כל תלת-אבר ריבועי ניתן לפרק):

**א. תלת-האבר צריך להיות מסודר בסדר יורד (או עולה) של חזקות אחת האותיות.**

**ב. את האבר האמצעי יש להפריד לשני אברים שמכפלתם שווה למכפלת האברים הקיצוניים, וסכומם האלגברי שווה לאבר האמצעי.**  
**את רב-האבר המתקבל (המכיל ארבעה אברים) מפרקים לגורמים לפי השיטה של חלוקה לקבוצות.**

נתייחס לשתי הדוגמאות הבאות:

$$1. a^2 - 5a + 6 = a^2 - 2a - 3a + 6 = a(a - 2) - 3(a - 2) = (a - 2)(a - 3)$$

$$2. a^2 - 5a - 6 = a^2 - 6a + a - 6 = a(a - 6) + (a - 6) = (a - 6)(a + 1)$$

הסבר

בשתי הדוגמאות, האבר האמצעי זהה  $(-5a)$ . למרות זאת, הוא הופרד בצורה שונה. ההבדל נובע מההבדל במכפלת האברים הקיצוניים:  $(+6a^2)$  בראשון, לעומת  $(-6a^2)$  בשני.

מכפלת שני גורמים היא חיובית  $(+6a^2)$ , כאשר הגורמים שווים סימן. שני אברים שווים סימן, אשר סכומם שווה לאבר האמצעי  $(-5a)$  הם:  $-2a, -3a$ .  
מכפלה שני גורמים היא שלילית  $(-6a^2)$ , כאשר הגורמים שונים סימן. שני אברים שונים סימן אשר סכומם האלגברי שווה לאבר האמצעי  $(-5a)$  הם:  $+a, -6a$ .  
הביטויים  $a$  ו- $-6a$  שונים סימן, ולכן האבר האמצעי שווה להפרש הערכים המוחלטים שלהם.

בסיכום, שלב ב' בפרוק טרינום מתבצע באופן הבא:  
מחפשים את כל זוגות המספרים שמכפלתם שווה למכפלת האברים הקיצוניים (בערך מוחלט), ואז:

- אם מכפלת האברים היא חיובית, בוחרים בזוג המספרים בעלי אותו סימן, שסכומם שווה לאבר האמצעי (סימני שני המספרים שהתקבלו זהה לסימן האבר האמצעי).

- אם מכפלת האברים הקיצוניים היא שלילית, בוחרים בזוג המספרים בעלי סימנים שונים, שהפרש הערכים המוחלטים שלהם שווה לערך המוחלט של האבר האמצעי (סימן המספר הגדול מבין השניים זהה לסימן האבר האמצעי; סימנו של השני - נגדי).

1.  $2x^2 - 7x + 6$

מכפלת האברים הקיצוניים +12.  
נבדוק את המכפלות האפשריות של 12.

$$+12 \left| \begin{array}{l} 1 \cdot 12 \\ 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 \end{array} \right.$$

זוג המספרים בעלי אותו סימן שסכומם -7 הוא -4; -3. ואז:

$$2x^2 - 7x + 6 = 2x^2 - 3x - 4x + 6 = x(2x - 3) - 2(2x - 3) = (2x - 3)(x - 2)$$

2.  $10x^2 - x - 2$

ואילו בטרינום:

$$-20 \left| \begin{array}{l} 1 \cdot 20 \\ 2 \cdot 10 \\ 4 \cdot 5 \end{array} \right.$$

המכפלה -20 נבדוק את כל המכפלות האפשריות שתוצאתן 20. זוג המספרים בעלי סימנים שונים שהפרשם 1 הם 4 ו-5. ובהתחשב בסימן של -1, המספרים הם -5, 4 לכן:

$$10x^2 - x - 2 = 10x^2 - 5x + 4x - 2 = 5x(2x - 1) + 2(2x - 1) = (2x - 1)(5x + 2)$$

3.  $2x^2 + 23xy + 30y^2 =$

$$\begin{aligned} &= 2x^2 + 20xy + 3xy + 30y^2 = \\ &= 2x(x + 10y) + 3y(x + 10y) = \\ &= (x + 10y)(2x + 3y) \end{aligned}$$

$$+60 \left| \begin{array}{l} 1 \cdot 60 \\ 2 \cdot 30 \\ 3 \cdot 20 \end{array} \right.$$

4.  $3x^2 + 5xy - 12y^2 =$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 + 9xy - 4xy - 12y^2 = \\ &= 3x(x + 3y) - 4y(x + 3y) = \\ &= (x + 3y)(3x - 4y) \end{aligned}$$

$$-36 \left| \begin{array}{l} 1 \cdot 36 \\ 2 \cdot 18 \\ 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 9 \end{array} \right.$$

## פרוק מיידי

**פרוק מיידי של טרינום מתאים למקרה שהמקדם הראשון ברב-האבר המסודר הוא 1.**

למשל, בדוגמה האחרונה שבה המקדם הראשון הוא 1, המספרים (-9) ו-(+8) שמצאנו, הם גם מקדמי המחובר השני בשני זוגות הסוגריים. כלומר, אפשר לדלג על שני השלבים האמצעיים.

מכינים את תבנית שני זוגות הסוגריים :  
 "יוצקים" לתוכם את מקדמי  $y$  שמצאנו :  
 $(x - y)(x - y)$   
 $(x - 9y)(x + 8y)$

6.  $a^2 + 13a + 42 = (a + 6)(a + 7)$

באותו אופן :

$$\begin{array}{r|l} +42 & 1 \cdot 42 \\ & 2 \cdot 21 \\ & 3 \cdot 14 \\ & 6 \cdot 7 \end{array}$$

וגם :

7.  $b^2 - b - 2 = (b - 2)(b + 1)$

אם לאברי התלת-אבר יש גורם משותף, מוצאים קודם את הגורם המשותף מחוץ לסוגריים, ובודקים אפשרות להמשיך לפרק את הביטוי שבתוך הסוגריים, לפי השיטה האחרונה. למשל :

8.  $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x - 1)(x - 3)$

**הצלחת! פרקתי אותו לאזרחים...**



# תרגילים

## סעיף 1

א. פרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף מחוץ לסוגריים

- $2a + 4b$
- $3x + 6y - 9k$
- $ax + ay$
- $mx + m$
- $2xy + 4xt$
- $6ak + 3bk$
- $4ab + 2bc + 6b$
- $16ax - 8bx + 4x$
- $20kt + 10abk - 5k$
- $3ax^2 - 5bx^2$
- $8a^3b - 4a^3c + 6a^3d$
- $15a^2c - 10a^2bc$
- $a^5 - 2a$
- $9x^5 - 27x^2$
- $34m^3 - 17m^2$
- $12x^4 + 6x^3 - 18x$
- $4a^4 - 8a^3 + 2a$
- $9a^6 + 6a^4 - 3a^2$
- $14x^2y^3 + 7x^4y^2 - 21x^5$
- $39a^2b^3 + 26ab^4 - 13b^5$
- $12a^2b - 18a^2b^3 + 6a^2b^5$
- $56x^2y^3 + 21x^3y^4 - 7x^4y^5$
- $18a^3b^4 - 9a^2b^2 - 3a^2b$
- $22x^4y - 33x^3y^2 + 11x^2y^5$
- $34a^5bc^3 - 17a^4b^2c^5 + 51a^2b^3c^6$
- $45a^9x^8y^3 - 36a^7x^6y^2 + 9a^6x^4$
- $12ab^3k^4 - 20a^4b^2k^3 + 28a^2b^3k^3$
- $45m^3k^{10}t - 18m^4k^9t^2 - 9m^3k^8t$
- $2x^m - ax^m$
- $ab^k + 5b^k - b^k m$
- $2x^{a+1} + bx^a + 3x^a$
- $ak^{m+2} - bk^{m+1} + ck^m$
- $ax^{3k} + bx^{2k} - cx^k$
- $6a^2b^{3m+1} - 8b^{2m} - 2b^m$
- $15a^{k+4}b^{4k} - 25a^{k+2}b^{3k} + 5a^{k+1}b^k$
- $a(b+c) + 5(b+c)$
- $a^2(m-1) + b(m-1) - (m-1)c$
- $x(m-n+k) - 2y(m-n+k)$
- $x(y^2 - 8) + (y^2 - 8)$
- $k^5(a-b) - (a-b)$
- $a(x+y) + b(y+x) - c(x+y)$
- $m(a-b) + n(b-a) + 3(a-b)$
- $x(k-3t) - y(-k+3t) + 5(k-3t)$
- $a(4x-1) - b(1-4x)$
- $(m+1)^2 - m(m+1)$
- $2(a-b)^3 + 2b(a-b)^2$

תשובות:

- $2(a+2b)$  , 2.  $3(x+2y-3k)$  , 3.  $a(x+y)$  , 4.  $m(x+1)$  , 5.  $2x(y+2t)$  ,  
6.  $3k(2a+b)$  , 7.  $2b(2a+c+3)$  , 8.  $4x(4a-2b+1)$  , 9.  $5k(4t+2ab-1)$  ,

10.  $x^2(3a-5b)$ , 11.  $2a^3(4b-2c+3d)$ , 12.  $5a^2c(3-2b)$ , 13.  $a(a^4-2)$ ,  
 14.  $9x^2(x^3-3)$ , 15.  $17m^2(2m-1)$ , 16.  $6x(2x^3+x^2-3)$ ,  
 17.  $2a(2a^3-4a^2+1)$ , 18.  $3a^2(3a^4+2a^2-1)$ , 19.  $7x^2(2y^3+x^2y^2-3x^3)$ ,  
 20.  $13b^3(3a^2+2ab-b^2)$ , 21.  $6a^2b(2-3b^2+b^4)$ , 22.  $7x^2y^3(8+3xy-x^2y^2)$   
 23.  $3a^2b(6ab^3-3b-1)$ , 24.  $11x^2y(2x^2-3xy+y^4)$ ,  
 25.  $17a^2bc^3(2a^3-a^2bc^2+3b^2c^3)$ , 26.  $9a^6x^4(5a^3x^4y^3-4ax^2y^2+1)$ ,  
 27.  $4ab^2k^3(3bk-5a^3+7ab)$ , 28.  $9m^3k^8t(5k^2-2mkt-1)$ ,  
 29.  $x^m(2-a)$ , 30.  $b^k(a+5-m)$ , 31.  $x^a(2x+b+3)$ , 32.  $k^m(ak^2-bk+c)$   
 33.  $x^k(ax^{2k}+bx^k-c)$ , 34.  $2b^m(3a^2b^{2m+1}-4b^m-1)$ ,  
 35.  $5a^{k+1}b^k(3a^3b^{3k}-5ab^{2k}+1)$ , 36.  $(b+c)(a+5)$ , 37.  $(m-1)(a^2+b-c)$ ,  
 38.  $(m-n+k)(x-2y)$ , 39.  $(y^2-8)(x+1)$ , 40.  $(a-b)(k^5-1)$ ,  
 41.  $(x+y)(a+b-c)$ , 42.  $(a-b)(m-n+3)$ , 43.  $(k-3t)(x+y+5)$ ,  
 44.  $(4x-1)(a+b)$ , 45.  $(m+1)$ , 46.  $2a(a-b)^2$

**ב. העזר בפרוק לגורמים כדי לחשב בדרך היעילה ביותר (ללא שמוש במחשב)**

- |  |  |
|--|--|
| 1.. $142 \cdot 8 + 142 \cdot 2$                            | 2. $217 \cdot 17 - 117 \cdot 17$   |
| 3. $25 \cdot 39 + 25 \cdot 61$                             | 4. $\frac{1}{2} \cdot 151 + \frac{1}{2} \cdot 49$  |
| 5. $5 \cdot 1\frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3}$            | 6. $23 \cdot 48 + 23 \cdot 17 + 23 \cdot 35$   |
| 7. $5.6 \cdot 27 + 5.6 \cdot 13 - 5.6 \cdot 30$            | 8. $16 \cdot \frac{2}{3} + 16 \cdot 6\frac{2}{3} + 16 \cdot 2\frac{2}{3}$                        |
| 9. $35 \cdot 29 + 35 \cdot 47 + 76 \cdot 21 + 76 \cdot 44$ | 10. $2\frac{1}{7} \cdot 58 - 2\frac{1}{7} \cdot 50 + 8 \cdot \frac{4}{7} + 8 \cdot 7\frac{2}{7}$ |

**תשובות:**

1. 1420 , 2. 1700 , 3. 2500 , 4. 100 , 5. 10 , 6. 2300 , 7. 56 ,  
 8. 160 , 9. 7600 , 10. 80

1.  $ax + ay + 2x + 2y$
2.  $mx - nx + am - an$
3.  $ak + at + 3bk + 3bt$
4.  $-bm + 2ab + 2ac - cm$
5.  $2ab - 3b^2 + 4a^2 - 6ab$
6.  $x^2 - 2x + 3x - 6$
7.  $a^2 + 3ab + 4ab + 12b^2$
8.  $x^2 + 5xy + 10y^2 + 2xy$
9.  $5a^2 + ax - 10ax - 2x^2$
10.  $m^2 - mx - 7mx + 7x^2$
11.  $6m^2 - 15mn + 8mn - 20n^2$
12.  $7x^2 - 3xy + 7x - 3y$
13.  $5x^2y + 3x - 5xy^2 - 3y$
14.  $8bx - 15am - 10bm + 12ax$
15.  $14ay - 3kx + 7ax - 6ky$
16.  $6a^2x - 5t^2 - 15a^2t + 2tx$
17.  $x + y + xy + 1$
18.  $3a^3 + 3a^2 + 2a + 2$
19.  $6x^3 - 9x^2 - 4x + 6$
20.  $5x^4 + 7x^2 - 15x^2 - 21$
21.  $14x^4 - 21x^2 - 3 + 2x^2$
22.  $3a^2y - xy + 15a^4 - 5a^2x$
23.  $12a^3 - 20ab - 5bc + 3a^2c$
24.  $18a^4 + 6a^2b - 15a^2c - 5bc$
25.  $16ax - 24a^3 - 2mx + 3a^2m$
26.  $-b^3 + 2ab^2 + 2ac - bc$
27.  $x^5 - x^3y + x^2 - y$
28.  $18a^6 - 2a^3 + 9a^3b - b$
29.  $21x^3 + 14x^2y^2 - 15xy^2 - 10y^4$
30.  $am + bm + cm + 2a + 2b + 2c$
31.  $ax - ay + 2x - 2y - bx + by$
32.  $a^2b + a + ab^2 + b - 2ab - 2$
33.  $m^3 + mn^2 - m - m^2n - n^3 + n$
34.  $x^3 + 3x^2 + xy^3 + 3y^3 - 2x - 6$
35.  $x^3 + x^2y^2 - x^2 - xy - y^3 + y$
36.  $ax - bx + a^2 - b^2$
37.  $m^2 - n^2 + a^2m - a^2n$
38.  $a^2 - ab - ka^2 + kb^2$
39.  $a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b$
40.  $m^2 - 2m + 1 + mn - n$
41.  $x^2 - 4xy + 4y^2 + (2y - x)^3$
42.  $5x^4 + 7x^2 - 5x^2y^2 - 7y^2$
43.  $27x^3 + 18x^2y^2 - 12xy^2 - 8y^4$
44.  $54a^6 - 2a^3 + 27a^3b - b$
- 45\*  $32x^5 - 8x^3 + 4x^2 - 1$
- 46\*  $x^4 + x^2 + 1$

תשובות

1.  $(x+y)(a+2)$  , 2.  $(m-n)(x+a)$  , 3.  $(k+t)(a+3b)$  , 4.  $(b+c)(2a-m)$  ,
5.  $(2a-3b)(b+2a)$  , 6.  $(x-2)(x+3)$  , 7.  $(a+3b)(a+4b)$  , 8.  $(x+5y)(x+2y)$  ,
9.  $(5a+x)(a-2x)$  , 10.  $(m-x)(m-7x)$  , 11.  $(2m-5n)(3m+4n)$  ,
12.  $(7x-3y)(x+1)$  , 13.  $(5xy+3)(x-y)$  , 14.  $(2b+3a)(4x-5m)$  ,

15.  $(7a-3k)(2y+x)$ , 16.  $(3a^2+t)(2x-5t)$ , 17.  $(1+y)(x+1)$ , 18.  $(a+1)(3a^2+2)$ ,  
 19.  $(2x-3)(3x^2-2)$ , 20.  $(x^2-3)(5x^2+7)$ , 21.  $(2x^2-3)(7x^2+1)$ ,  
 22.  $(3a^2-x)(y+5a^2)$ , 23.  $(3a^2-5b)(4a+c)$ , 24.  $(3a^2+b)(6a^2-5c)$ ,  
 25.  $(2x-3a^2)(8a-m)$ , 26.  $(2a-b)(b^2+c)$ , 27.  $(x^2-y)(x+1)(x^2-x+1)$ ,  
 28.  $(9a^3-1)(2a^3+b)$ , 29.  $(3x+2y^2)(7x^2-5y^2)$ , 30.  $(a+b+c)(m+2)$ ,  
 31.  $(x-y)(a-b+2)$ , 32.  $(ab+1)(a+b-2)$ , 33.  $(m^2+n^2-1)(m-n)$ ,  
 34.  $(x+3)(x^2+y^3-2)$ , 35.  $(x+y^2-1)(x^2-y)$ , 36.  $(a-b)(x+a+b)$ ,  
 37.  $(m-n)(a^2+m+n)$ , 38.  $(a-b)(a-ka-kb)$ , 39.  $(a+b)(a+b+2)$ ,  
 40.  $(m-1)(m+n-1)$ , 41.  $(x-2y)(x-2y-1)$ , 42.  $(5x^2+7)(x-y)(x+y)$ ,  
 43.  $(3x+2y^2)(3x-2y)(3x+2y)$ , 44.  $(2a^3+b)(3a-1)(9a^2+3a+1)$ ,  
 45.  $(2x-1)(2x+1)^2(4x^2-2x+1)$ , 46.  $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ .

### סעיף 3

ד. פרק לגורמים בעזרת נוסחות הכפל המקוצר

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| 1. $a^2-16$                            | 2. $49-9x^2$                      |
| 3. $4b^4-81c^2$                        | 4. $9x^2y^4-\frac{1}{4}$          |
| 5. $25a^6-\frac{1}{9}b^4c^2$           | 6. $a^2b^4x^6-144$                |
| 7. $a^4-1$                             | 8. $16-x^4$                       |
| 9. $2x^2-18$                           | 10. $4x-x^3$                      |
| 11. $3a^3-27a$                         | 12. $a^5-a$                       |
| 13. $32x-2x^5$                         | 14. $\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{8}$ |
| 15. $a^2+6a+9$                         | 16. $b^2-12b+36$                  |
| 17. $9x^2-6xy+y^2$                     | 18. $4a^2+12ab+9b^2$              |
| 19. $25x^2-20xy^2+4y^4$                | 20. $x^2-x+\frac{1}{4}$           |
| 21. $4a^2-\frac{4}{3}ab+\frac{b^2}{9}$ | 22. $2b^2-12bm+18m^2$             |

23.  $20a^5 + 60a^3b^2 + 45ab^4$       24.  $27x^3 - 18x^2 + 3x$   
 25.  $m^5 - 8m^3 + 16m$       26.  $\frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{8}$   
 27.  $4x^9 - x^6 + \frac{x^3}{16}$       28.  $a^7 - \frac{1}{2}a^5 + \frac{1}{16}a^3$   
 29.  $64x^3 + 48x^2 + 12x + 1$       30.  $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$   
 31.  $125a^6 - 150a^4b^3 + 60a^2b^6 - 8b^9$       32.  $24x^9 - 36x^6y + 18x^3y^2 - 3y^3$   
 33.  $x^3 + 8y^3$       34.  $27a^3 - b^6$   
 35.  $8b^9 + 125$       36.  $2x^3 - 128$   
 37.  $a^5 + a^2$       38.  $m^9 - \frac{1}{64}$   
 39.  $a^6 + b^6$       40.  $x^6 - 64$   
 41.  $(a^2 + b^2)^2 - 4a^4$       42.  $81a^6 - (9a^3 + 1)^2$   
 43.  $25a^4 - (5a^2 - 1)^2$       44.  $a^2 - 2ab + b^2 - 9$   
 45.  $16a^4 + 6a^2b - 9b^2$       46.  $4m^2(a - b) + (b - a)$   
 47.  $m - n + 16a^2(n - m)$       48.  $m^3 + m^2 - m - 1$   
 49.  $a^3 + a^2m - am^2 - m^3$       50.  $a^2 + 2ab + b^2 - ka - kb$   
 51.  $8a^3 - 2a - (2a - 1)^2$       52.  $25m^3 - 25m^2 - m + 1$   
 53.  $a^4b^2 - a^2b^4 + b^2 - a^2$       54.  $(a + b)^3 - a^3 - b^3$   
 55.  $(m + n - k)^2 - (m - n + k)^2$       56.  $(m^2 + m + 1)^2 - (m^2 - m + 1)^2$   
 57.  $(m + n + a + b)^2 - (a + b - m - n)^2$       58.  $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$   
 59.  $[(a^2 + 1)x^2 - 1]^2 - [(a^2 - 1)x^2 + 1]^2$   
 60.  $[(a^2 + b^2)m^2 - c]^2 - [(a^2 - b^2)m^2 + c]^2$

### תשובות

1.  $(a - 4)(a + 4)$  , 2.  $(7 - 3x)(7 + 3x)$  , 3.  $(2b^2 - 9c)(2b^2 + 9c)$  ,  
 4.  $(3xy^2 - \frac{1}{2})(3xy^2 + \frac{1}{2})$  , 5.  $(5a^3 - \frac{1}{3}b^2c)(5a^3 + \frac{1}{3}b^2c)$  , 6.  $(ab^2x^3 - 12)(ab^2x^3 + 12)$  ,  
 7.  $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$  , 8.  $(2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$  , 9.  $2(x - 3)(x + 3)$  ,  
 10.  $x(2 - x)(2 + x)$  , 11.  $3a(a - 3)(a + 3)$  , 12.  $a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$  ,  
 13.  $2x(2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$  , 14.  $\frac{1}{8}(2a - b)(2a + b)$  , 15.  $(a + 3)^2$  , 16.  $(b - 6)^2$  ,  
 17.  $(3x - y)^2$  , 18.  $(2a + 3b)^2$  , 19.  $(5x - 2y^2)^2$  , 20.  $(x - \frac{1}{2})^2$  , 21.  $(2a - \frac{b}{3})^2$  ,  
 22.  $2(b - 3m)^2$  , 23.  $5a(2a^2 + 3b^2)^2$  , 24.  $3x(3x - 1)^2$  , 25.  $m(m - 2)^2(m + 2)^2$  ,

26.  $\frac{1}{8}(2x-y)^2$ , 27.  $x^3(2x^3 - \frac{1}{4})^2$ , 28.  $a^3(a - \frac{1}{2})^2(a - \frac{1}{2})^2$ , 29.  $(4x+1)^3$ ,  
 30.  $(2a-3b)^3$ , 31.  $(5a^2 - 2b^3)^3$ , 32.  $3(2x^3 - y)^3$ , 33.  $(x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ ,  
 34.  $(3a-b^2)(9a^2 + 3ab^2 + b^4)$ , 35.  $(2b^3 + 5)(4b^6 - 10b^3 + 25)$ ,  
 36.  $2(x-4)(x^2 + 4x + 16)$ , 37.  $a^2(a+1)(a^2 - a + 1)$ , 38.  $(m^3 - \frac{1}{4})(m^6 + \frac{1}{4}m^3 + \frac{1}{16})$ ,  
 39.  $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$ , 40.  $(x-2)(x+2)(x^4 + 4x^2 + 16)$ ,  
 41.  $(a+b)(b-a)(3a^2 + b^2)$ , 42.  $-(18a^3 + 1)$ , 43.  $10a^2 - 1$ , 44.  $(a-b+3)(a-b-3)$ ,  
 45.  $(4 - a^2 + 3b)(4 - a^2 - 3b)$ , 46.  $(a-b)(2m+1)(2m-1)$ , 47.  $(m-n)(1+4a)(1-4a)$ ,  
 48.  $(m-1)(m+1)^2$ , 49.  $(m-1)(a+m)^2$ , 50.  $(a+b)(a+b-k)$ , 51.  $(2a-1)(4a^2 + 1)$ ,  
 52.  $(5m+1)(5m-1)(m-1)$ , 53.  $(a+b)(a-b)(ab+1)(ab-1)$ , 54.  $3ab(a+b)$ , 55.  $4m(n-k)$   
 56.  $4m(m^2 + 1)$ , 57.  $4(a+b)(m+n)$ , 58.  $4a^2(a+b)(b-c)$ ,  
 59.  $4a^2x^2(x-1)(x+1)$ , 60.  $4a^2m^2(b^2m^2 - c)$

ה. העזר בפרוק לפי נוסחות כדי לחשב בדרך היעילה ביותר (ללא שימוש במחשבון).

$$\text{למשל: } 33^2 - 23^2 = (33 - 23)(33 + 23) = 10 \cdot 56 = 560$$

- |  |   |
|--|---|
| 1. $58^2 - 48^2$   | 2. $79^2 - 21^2$                                      |
| 3. $6.5^2 - 3.5^2$   | 4. $9.3 \cdot 10.7 = (10 - 0.7)(10 + 0.7) = ?$        |
| 5. $106 \cdot 94$  | 6. $999 \cdot 1001$                                   |
| 7. $13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 3 + 3^2 = (13 - 3)^2 = ?$  | 8. $5.1^2 + 2 \cdot 5.1 \cdot 4.9 + 4.9^2$            |
| 9. $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 6\frac{1}{3} + \left(6\frac{1}{3}\right)^2$ | 10. $\frac{123^2 - 23^2}{146}$                        |
| 11. $\frac{5.9^2 - 4.1^2}{18}$   | 12. $\frac{47^2 - 26^2}{50^2 - 23^3}$                 |
| 13. $\frac{224 \cdot 14 - 224 \cdot 9}{117^2 - 107^2}$   | 14. $\frac{118^2 + 22 \cdot 118 + 11^2}{86^2 - 43^2}$ |

### תשובות

1. 1060, 2. 5800, 3. 30, 4. 99.51, 5. 9964, 6. 999,999, 7. 100, 8. 100,  
 9. 100, 10. 100, 11. 1, 12.  $\frac{7}{9}$ , 13.  $\frac{1}{2}$ , 14. 3

ו. בטא את רב-האברים הבאים כחזקה של ביטוי :

$$1. \frac{49a^2}{4} - ab + \frac{b^2}{49}$$

$$3. a - 2\sqrt{a} + 1$$

$$5. \frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}$$

$$7. 3m^2 - 2\sqrt{6mn} + 2n^2$$

$$9. \frac{m^3}{27} - \frac{m^2}{a} + \frac{9m}{a^2} - \frac{27}{a^3}$$

$$2. \frac{4a^2}{9} + ab^2 + \frac{9b^4}{16}$$

$$4. a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$6. 2 - \frac{a^2 + 6am + m^2}{(a+m)^2}$$

$$8^*. 5m + 2\sqrt{10mn} + 2n$$

$$10. \frac{a^9}{216} + \frac{a^6b^2}{6} + 2a^3b^4 + 8b^6$$

### תשובות

$$1. \left(\frac{7a}{2} - \frac{b}{7}\right)^2 \quad 2. \left(\frac{2a}{3} + \frac{3b^2}{4}\right)^2 \quad 3. (\sqrt{a} - 1)^2 \quad 4. (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \quad 5. \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

$$6. \left(\frac{a-m}{a+m}\right)^2 \quad 7. (\sqrt{3m} - \sqrt{2n})^2 \quad 8. (\sqrt{5m} + \sqrt{2n})^2 \quad 9. \left(\frac{m}{3} - \frac{3}{a}\right)^3 \quad 10. \left(\frac{a^3}{6} + 2b^2\right)^3$$

ז. פרק לגורמים את תלת-האברים (טרינום) הבאים :

$$1. a^2 + 6a + 8$$

$$2. b^2 + 7b + 10$$

$$3. x^2 - 7x + 12$$

$$4. a^2 - 9a + 20$$

$$5. k^2 + 8k + 15$$

$$6. m^2 - 12m + 20$$

$$7. x^2 + 10x + 21$$

$$8. a^2 + 10ab + 16b^2$$

$$9. k^2 - 11km + 18m^2$$

$$10. x^2 - 11xy + 10y^2$$

$$11. a^2 + 8am + 7m^2$$

$$12. b^2 - 13bk + 30k^2$$

$$13. a^2 + 3a - 10$$

$$14. x^2 + 7x - 30$$

$$15. x^2 - 4x - 12$$

$$16. m^2 - 9m - 22$$

$$17. a^2 - 10a - 24$$

$$18. a^2 - 8a - 9$$

$$19. x^2 + 7x - 8$$

$$20. x^2 - 13x - 30$$

$$21. a^2 - 7ab - 18b^2$$

$$22. x^2 + 6xy - 27y^2$$

$$23. k^2 - 11kt - 26t^2$$

$$24. a^2 - 17am - 60m^2$$

$$25. a^2 - 3ab - 28b^2$$

$$26. a^2 + 14ax - 15x^2$$

$$27. m^2 + 23mx - 50x^2$$

$$28. 8 - 6x + x^2$$

$$29. 12 - 7a + a^2$$

$$30. 3x^2 + 8x + 4$$

$$31. 2a^2 - 9a + 9$$

$$32. 5x^2 - 12x + 4$$

33.  $8a^2 + 14ab + 3b^2$

35.  $4a^2 - 11ak - 3k^2$

37.  $9k^2 + 20ks + 4s^2$

39.  $10a^2 - ab - 2b^2$

41.  $6m^2 - 13mn + 6n^2$

43.  $9x^2 - 18xa + 5a^2$

45.  $25x^6 - 10x^3 - 3$

47.  $8 - 6x - 5x^2$

49.  $2x^2 - 14xy + 24y^2$

51.  $3x^5 - 7x^4y - 6x^3y^2$

53\*.  $7a^4 - 12a^2 + 5$

34.  $3m^2 + 22mn + 7n^2$

36.  $6x^2 - 19xy - 7y^2$

38.  $5a^2 - 14ab - 3b^2$

40.  $15c^2 - cd - 2d^2$

42.  $33x^2 + 2xy - 3y^2$

44.  $7a^4 + 12a^2 + 5$

46.  $3a^4 - 18a^2b + 24b^2$

48.  $6 - 15a^2 - 9a^4$

50.  $x^3 - 9x^2 + 20x$

52.  $2a^3 - 7a^2b + 3ab^2$

54\*.  $4x^4 - 37x^2 + 9$

תשובות

1.  $(a+2)(a+4)$  , 2.  $(b+5)(b+2)$  , 3.  $(x-4)(x-3)$  , 4.  $(a-4)(a-5)$  ,

5.  $(k+3)(k+5)$  , 6.  $(m-10)(m-2)$  , 7.  $(x+3)(x+7)$  , 8.  $(a+2b)(a+8b)$  ,

9.  $(k-9m)(k-2m)$  , 10.  $(x-10y)(x-y)$  , 11.  $(a+7m)(a+m)$  ,

12.  $(b-10k)(b-3k)$  , 13.  $(a+5)(a-2)$  , 14.  $(x+10)(x-3)$  , 15.  $(x-6)(x+2)$

16.  $(m-11)(m+2)$  , 17.  $(a-12)(a+2)$  , 18.  $(a-9)(a+1)$  , 19.  $(x+8)(x-1)$  ,

20.  $(x-15)(x+2)$  , 21.  $(a-9b)(a+2b)$  , 22.  $(x+9y)(x-3y)$  ,

23.  $(k-13t)(k+2t)$  , 24.  $(a-20m)(a+3m)$  , 25.  $(a-7b)(a+4b)$  ,

26.  $(a+15x)(a-x)$  , 27.  $(m+25x)(m-2x)$  , 28.  $(x-4)(x-2)$  ,

29.  $(a-4)(a-3)$  , 30.  $(3x+2)(x+2)$  , 31.  $(a-3)(2a-3)$  , 32.  $(x-2)(5x-2)$  ,

33.  $(2a+3b)(4a+b)$  , 34.  $(m+7n)(3m+n)$  , 35.  $(a-3k)(4a+k)$  ,

36.  $(2x-7y)(3x+y)$  , 37.  $(9k+2s)(k+2s)$  , 38.  $(a-3b)(5a+b)$  ,

39.  $(2a-b)(5a+2b)$  , 40.  $(5c-2d)(3c+d)$  , 41.  $(2m-3n)(3m-2n)$  ,

42.  $(3x+y)(11x-3y)$  , 43.  $(3x-5a)(3x-a)$  , 44.  $(a^2+1)(7a^2+5)$  ,

45.  $(5x^3-3)(5x^3+1)$  , 46.  $3(a^2-2b)(a^2-4b)$  , 47.  $(4-5x)(2+x)$  ,

48.  $3(1-3a^2)(2+a^2)$  , 49.  $2(x-3y)(x-4y)$  , 50.  $x(x-4)(x-5)$  ,

51.  $x^3(x-3y)(3x+2y)$  , 52.  $a(a-3b)(2a-b)$  , 53.  $(a-1)(a+1)(7a^2-5)$  ,

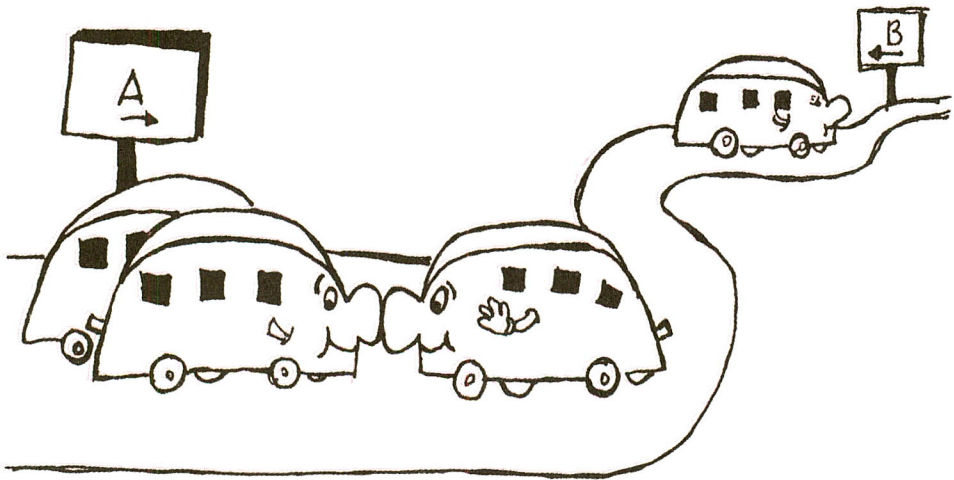
54.  $(x-3)(x+3)(2x-1)(2x+1)$  .

ח. הוכח בעזרת פרוק לגורמים, כי לכל ערך טבעי של  $n$

1. הביטוי  $n^2 + n$  מתחלק ב-2.
- רמז: מכפלה של שני מספרים עוקבים  $n$  ו- $(n+1)$  מכילה תמיד מספר זוגי.
2. הביטוי  $3n^2 - 3n$  מתחלק ב-6.
3. הביטוי  $n^2 + 3n + 2$  מתחלק ב-2.
4. הביטוי  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.
5. הביטוי  $5n^2 + 25n + 30$  מתחלק ב-10.
6. הביטוי  $2n^3 - 2n$  מתחלק ב-12.
7. הביטוי  $3n^3 - 3n$  מתחלק ב-18.
8. הביטוי  $(n^2 + 2n)(n^2 - 1)$  מתחלק ב-24.
- 9\*. הביטוי  $n^3 - 4n$  מתחלק ב-48.
- 10\*. הביטוי  $n^5 - 5n^3 + 4n$  מתחלק ב-120.

### חידה

החל מ-7:00 יוצא כל דקה אוטובוס מתחנה A לכיוון תחנה B הנמצאת במרחק 60 ק"מ מתחנה A. מהירות האוטובוסים 60 קמ"ש. בשעה 8:00 יוצא אוטובוס מ-B ל-A, אף הוא במהירות 60 קמ"ש. כמה אוטובוסים הוא פוגש בדרכו?



תשובה: 61 אוטובוסים.  
 הסבר: אחד כשהוא יוצא (זה שיצא מ-7:00) ועוד 60 אוטובוסים - כל דקה אחד.

## פרק ד: פעולות בשברים אלגבריים

### 1. תכונות השברים

**שבר אלגברי** הוא מנה של שני ביטויים אלגבריים. ראינו שההגבלה של פעולת החילוק היא שאין לחלק באפס (הפעולה אינה מוגדרת), לכן, לגבי כל שבר אלגברי יש לקבוע את תחום ההגדרה. למשל, תחום ההגדרה של  $\frac{2}{a-1}$  הוא  $a \neq 1$ , כי  $a - 1 \neq 0$ .

**כפל או חילוק של המונה והמכנה של שבר באותו מספר או אותו ביטוי (שונים מ-0) אינו משנה את ערך השבר, כלומר:**

$$\frac{A}{B} = \frac{AK}{BK} = \frac{A:K}{B:K} \quad K \neq 0$$

לפעולת הכפל קוראים **הרחבה** של השבר ואילו לפעולת החילוק - **צמצום**. תכונות אלה של השבר מאפשרות לפשט במידה רבה את הפעולות בשברים אלגבריים.

תכונת הצמצום מאפשרת להביא שבר לצורה הפשוטה ביותר.

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n} = \frac{1}{A^{n-m}} \quad \text{אפשר להעזר בכלל החזקות}$$

### 2. צמצום שברים אלגבריים

צמצום שבר הוא בר ביצוע, רק כאשר השבר מפורק לגורמים. כדי לצמצם שבר אלגברי, שבו המונה והמכנה או שניהם הם סכומים אלגבריים, יש להביאם קודם לצורת מכפלה, ע"י פרוק לגורמים.

למשל, את השבר  $\frac{2b+2y}{4b+4y}$  ניתן לצמצם, רק אחרי פרוק לגורמים (בתנאי ש:

$$\frac{2b+2y}{4b+4y} = \frac{2(b+y)}{4(b+y)} = \frac{1}{2} \quad \text{מתקבל: } (b+y \neq 0)$$

**יש להיזהר מטעות של "צמצום" ביטויים הקשורים בפעולות חיבור אלגברי, גם אם אלו מכפלות.**

למשל, בשבר  $\frac{2ab+1}{3ab}$  לא ניתן לצמצם את  $ab$ , כי הפעולה האחרונה במונה היא חיבור, ואי אפשר לפרק ביטוי זה לגורמים.

בסיכום, שיטת העבודה מכילה שני שלבים:

- א. פרוק לגורמים של המונים ושל המכנים, לפי השיטות המתאימות.  
 ב. צמצום הביטויים המתאימים, תוך ציון תחום ההצבה.

### דוגמאות

1.  $\frac{2a}{4b} = \frac{a}{2b}$  תחום ההצבה:  $b \neq 0$

2.  $\frac{5a^2bc}{2ac} = \frac{5ab}{2}$  תחום ההצבה:  $a, c \neq 0$

3.  $\frac{5x^2(a+3b)}{10x(a+3b)} = \frac{x}{2}$  תחום ההצבה:  $x \neq 0, a \neq -3b$

4.  $\frac{ax+ay}{bx+by} = \frac{a(x+y)}{b(x+y)} = \frac{a}{b}$   $x \neq -y, b \neq 0$

5.  $\frac{3a-3b}{a^2-ab} = \frac{3(a-b)}{a(a-b)} = \frac{3}{a}$   $a \neq b, a \neq 0$

6.  $\frac{x^2-y^2}{2x^2-2xy} = \frac{(x+y)(x-y)}{2x(x-y)} = \frac{x+y}{2x}$   $x \neq y, x \neq 0$

אם שני הפרשים מכילים אותם גדלים בשינוי סדר, כדאי להוציא גורם משותף שלילי מאחד מהם ואז נקבל ביטויים זהים שניתן לצמצם:

7.  $\frac{2b-2a}{a^2-b^2} = \frac{2(b-a)}{(a-b)(a+b)} = \frac{-2(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{-2}{a+b}$   $a \neq b, a \neq -b$

8.  $\frac{a^2+6a+9}{3a^3+9a^2} = \frac{(a+3)^2}{3a^2(a+3)} = \frac{a+3}{3a^2}$   $a \neq -3, a \neq 0$

בסעיפים הבאים נלמד לבצע פעולות בשברים אלגבריים. היות שפעולת החיבור האלגברי מורכבת יותר מפעולות הכפל והחילוק, נחרוג הפעם מהסדר המקובל ונלמד מהקל אל הכבד.

### 3. כפל וחילוק שברים אלגבריים

\* **כפל של שניים או יותר שברים אלגבריים, מתקבל שבר שהמונה שלו הוא מכפלת מוני השברים המוכפלים והמכנה הוא מכפלת מכניהם, כלומר:**

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

\* **בחילוק של שני שברים אלגבריים, כופלים את השבר הראשון (המחולק) בשבר ההפוך לשני (המחלק), כלומר:**

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

\* **בסיום של פעולת הכפל יש לצמצם כל מה שאפשר - כל אחד מהמונים של מכפלת השברים בכל אחד ממכניה:**



$$1. \frac{a(x-y)}{(2a-b)} \cdot \frac{b(2a-b)^2}{b^2(x-y)} = \frac{a(2a-b)}{b} \quad b \neq 0, x \neq y, 2a \neq b$$

$$2. \frac{ma+mb}{6a-6b} \cdot \frac{3a-3b}{na+nb} = \frac{m(a+b)}{6(a-b)} \cdot \frac{3(a-b)}{n(a+b)} = \frac{m}{2n} \quad a \neq \pm b, n \neq 0$$

$$3. \frac{ax+ay}{3b} \cdot \frac{6b^2}{2bx+2by} = \frac{a(x+y)}{3b} \cdot \frac{6b^2}{2b(x+y)} = a \quad b \neq 0, x \neq y$$

$$4. \frac{3mn+3n^2}{2m^2-2n^2} \cdot \frac{m^2-2mn+n^2}{6n^2} = \frac{3n(m+n)}{2(m+n)(m-n)} \cdot \frac{(m-n)^2}{6n^2} = \frac{m-n}{4n} \quad m \neq \pm n, n \neq 0$$

$$5. \frac{k^2-7k+10}{2k-4} \cdot \frac{4k+20}{k^2-25} = \frac{(k-2)(k-5)}{2(k-2)} \cdot \frac{4(k+5)}{(k+5)(k-5)} = 2, \quad k \neq -5, 2, 5$$

במידה ורוב המרכיבים שבתרגיל לא מתפרקים מיידית, כדאי להוציא מהתרגיל את הביטוי שפרוקו מצריך מספר שלבים, ולהחזירו לתרגיל לאחר הפירוק.

מיותר לגרור את כל הביטויים על פני מספר שלבים.

$$6. \frac{2a^2 - 3a - 9}{4a^2 - 9} \cdot \frac{(4a - 6)}{a^2 - 5a + 6} = \frac{(a - 3)(2a + 3)}{(2a + 3)(2a - 3)} \cdot \frac{2(2a - 3)}{(a - 2)(a - 3)} = \frac{2}{a - 2}$$

$a \neq -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3$

את המונה הראשון פרקנו בנפרד:

$$2a^2 - 3a - 9 = 2a^2 - 6a + 3a - 9 = 2a(a - 3) + 3(a - 3) = (a - 3)(2a + 3)$$

$$7. \frac{4a - 2b}{b^2(x - y)^3} \cdot \frac{(2a - b)^2}{b(3x - 3y)} = \frac{2(2a - b)}{b^2(x - y)} \cdot \frac{3b(x - y)^3}{(2a - b)^2} = \frac{6(x - y)^2}{b(2a - b)}$$

$b \neq 0, x \neq y, 2a \neq b$

$$8. \frac{a^2 + 9a + 20}{2a^2 - 32} \cdot \frac{3a^2 + 14a - 5}{a^2 - 8a + 16} = \frac{a^2 + 9a + 20}{2a^2 - 32} \cdot \frac{a^2 - 8a + 16}{3a^2 + 14a - 5} =$$

$$= \frac{(a + 4)(a + 5)}{2(a - 4)(a + 4)} \cdot \frac{(a - 4)^2}{(a + 5)(3a - 1)} = \frac{a - 4}{2(3a - 1)} \quad a \neq -5, -4, 4, \frac{1}{3}$$

$$3a^2 + 14a - 5 = 3a^2 + 15a - a - 5 = 3a(a + 5) - (a + 5) = (a + 5)(3a - 1)$$

פרקנו את המכנה הימני והצבנו את התוצאה המתקבלת בביטוי המקורי.

אם אחד מהשברים האלגבריים מופיע בחזקה, יש לבצע תחילה את פעולת החזקה (לפי כללי חזקות), ואחר כך את פעולת הצמצום. למשל:

$$9. \left[ \frac{(x + y)^2}{m - n} \right]^2 \cdot \frac{2x + 2y}{5m - 5n} = \frac{(x + y)^4}{(m - n)^2} \cdot \frac{5(m - n)}{2(x + y)} = \frac{5(x + y)^3}{2(m - n)}$$

$m \neq n, x \neq -y$

## 4. חיבור וחסור של שברים אלגבריים

אפשר לבצע פעולת חיבור או חיסור של שברים אלגבריים רק כאשר מכני השברים

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7} \quad \text{זהים. למשל:}$$

תכונת "ההרחבה" של שברים מאפשרת להפוך שברים בעלי מכנים שונים, לבעלי אותו מכנה - מכנה משותף.

$$\text{למשל, כדי לחבר } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \text{ אפשר לעשות את ההרחבה } \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} \text{ לשבר הראשון, ואת ההרחבה } \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} \text{ לשבר השני.}$$

$$\text{באופן כזה, מתקבל סכום של שברים, בעלי אותו מכנה: } \frac{3}{6} + \frac{4}{6}; \text{ אז ניתן לבצע את פעולת החיבור ע"י חיבור המונים וכתיבת המכנה שהתקבל } \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}.$$

באותו אופן, ניתן היה להרחיב את השבר הראשון במספר 6, ואת השני ב-4, ולהגיע למכנה משותף 12, או את הראשון ב-18 ואת השני ב-12 (מכנה משותף 36), וכו'. אך הרחבת השברים תהיה נוחה ביותר כאשר המכנה המשותף הוא **הכפולה המשותפת המינימלית** - הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של כל המכנים. נסמנה בקיצור **כמ"מ**.

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של קבוצת מספרים היא מכפלת כל הגורמים הראשוניים השונים של המספרים, כשכל גורם ראשוני מופיע בחזקה הגבוהה ביותר שבה הוא מופיע בתרגיל.

הכפולה המשותפת המינימלית של 2, 3 היא  $2 \cdot 3 = 6$ .  
הכמ"מ של 8, 12 היא 24.

הסבר:  $2^3 = 8$ ,  $2^2 \cdot 3 = 12$ , הגורמים הראשוניים הם 2 ו-3, החזקות הגבוהות ביותר  $3^1$  ו- $2^3$  ומכפלתם 24.

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 10 = 2 \cdot 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 \quad \text{הכמ"מ של 12, 18, 10 היא 180}$$

ראה נספח בסעיף 5.

באותו אופן ניתן למצוא את הכפולה המשותפת המינימלית של ביטויים אלגבריים. לשם כך, יש לפרק את הביטויים אלגבריים לגורמים ולנהוג כנ"ל. למשל הכמ"מ של

$$2ab \text{ ו- } 4ac \text{ היא } 4abc, \text{ הכמ"מ של } 4y^2, 3xy^3, 2x^2y \text{ היא } 12x^2y^3.$$

1. 
$$\begin{cases} 2x - 2 = 2(x - 1) \\ 6x^2 - 6x = 6x(x - 1) \\ 3x^2 = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow 6x^2(x - 1) \quad \text{הכמ"מ}$$
2. 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \\ x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \\ 4x - 4y = 4(x - y) \end{cases} \Rightarrow 4(x + y)^2(x - y) \quad \text{הכמ"מ}$$
3. 
$$\begin{cases} x^2 - xy = x(x - y) \\ x^3 = x^3 \\ x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \end{cases} \Rightarrow x^3(x - y)^2 \quad \text{הכמ"מ}$$
4. 
$$\begin{cases} 3a + 6 = 3(a + 2) \\ a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 \\ 2a^2 + 4a = 2a(a + 2) \end{cases} \Rightarrow 6a(a + 2)^2 \quad \text{הכמ"מ}$$
5. 
$$\begin{cases} 5x^2 - 5 = 5(x + 1)(x - 1) \\ 2x^2 - 4x + 2 = \\ = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2 \\ x^3 + x^2 = x^2(x + 1) \end{cases} \Rightarrow 10x^2(x + 1)(x - 1)^2 \quad \text{הכמ"מ}$$
6. 
$$\begin{cases} a^2 + 6a + 8 = (a + 2)(a + 4) \\ 2a^2 + 10a + 12 = 2(a^2 + 5a + 6) = \\ = 2(a + 2)(a + 3) \end{cases} \Rightarrow 2(a + 2)(a + 3)(a + 4) \quad \text{הכמ"מ}$$

$$7. \begin{cases} 3a^2 + 5a - 2 = 3a^2 + 6a - a - 2 = \\ = (3a - 1)(a + 2) \\ 9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2 \\ 4a + 8 = 4(a + 2) \end{cases} \Rightarrow 4(a + 2)(3a - 1)^2 \quad \text{הכמ"מ}$$

$$8. \begin{cases} 5x^2 + x - 4 = 5x^2 + 5x - 4x - 4 = 5x(x + 1) - 4(x + 1) = \\ = (x + 1)(5x - 4) \\ 25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4) \\ 50x^2 + 40x + 32 = 2(5x + 4)^2 \end{cases} \Rightarrow 2(5x + 4)^2(5x - 4)(x + 1) \quad \text{הכמ"מ:}$$

**בחיבור שברים, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של מכני השברים משמשת כמכנה משותף - מ"מ. המנה בין המ"מ, לכל אחד מהמכנים, מעידה על מידת הרחבת השבר המתאים.**

למשל, בחיבור השברים  $\frac{2}{3a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{2a}$  הכמ"מ הוא  $6a^2$ . המנה  $6a^2 : 3a = 2a$  היא

$$\frac{2a}{3a} = \frac{2 \cdot 2a}{3a \cdot 2a}$$

המנה  $6a^2 : a^2 = 6$  היא מידת ההרחבה של השבר השני והמנה  $6a^2 : 2a = 3a$  היא מידת ההרחבה של השבר השלישי. הביטוי יראה כך:

$$\frac{2a}{3a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{2a} = \frac{2 \cdot 2a}{3a \cdot 2a} + \frac{3 \cdot 6}{a^2 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3a}{2a \cdot 3a} = \frac{4a + 18 - 3a}{6a^2} = \frac{a + 18}{6a^2}$$

באופן מעשי, פעולת החיבור של שברים אלגבריים נעשית בארבעה שלבים:

- א. פירוק מכני השברים לגורמים ראשוניים, אם ניתן.
- ב. מציאת המכנה המשותף (מ"מ), שהוא הכמ"מ של מכני השברים, ורישומו כמכנה משותף בשלב הבא של הפיתרון. במקביל - קביעת גורם הרחבת השברים, ע"י מנות החילוק של המ"מ בכל אחד מהמכנים. את גורם ההרחבה רושמים באלכסון משמאל לכל מונה.
- ג. רישום תוצאות מכפלות המונים בגורם ההרחבה המתאים על קו שבר אחד.
- ד. כינוס אברים דומים במונה, עם המ"מ.
- ה. אם מתאפשר - צמצום השבר המתקבל.

נדגים שלבים אלה על התרגיל האחרון (שלב א' נחסך כי המכנים מפורקים לגורמים - חד אברים).

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{3a} + \frac{6}{a^2} - \frac{3a}{2a} &= \dots\dots\dots \text{שלב ב:} \\ &= \frac{2 \cdot 2a + 3 \cdot 6 - 1 \cdot 3a}{6a^2} = \\ &= \frac{4a + 18 - 3a}{6a^2} = \dots\dots\dots \text{שלב ג:} \\ &= \frac{a + 18}{6a^2} \dots\dots\dots \text{שלב ד:} \end{aligned}$$

**הערות** 

1. סימן (-) לפני קו שבר, כמו סימן (-) לפני סוגריים המכילים את המונה.
2. אם המונה של שבר, רשומה מכפלה של מספר גורמים, הקפד לא להכפיל את כל גורמי המונה בגורם ההרחבה של השבר. יש להכפיל בגורם זה. למשל, המונה הראשון בסכום הבא היא המכפלה  $2(a+1)$

$$\frac{2(a+1)}{a-1} + \frac{a-1}{3} = \frac{3 \cdot 2(a+1) + (a-1)^2}{3(a-1)} = \frac{6(a+1) + (a-1)^2}{3(a-1)}$$

- בעת הרחבת השבר ב-3, אין להכפיל גם את 2 וגם את  $(a-1)$  ב-3; כותבים  $3 \cdot 2(a+1)$  או  $6(a+1)$ , וכו'.
3. אם אחד מהמחבורים הוא שלם (ללא מכנה), נוח לרשום אותו כשבר שמכנהו 1 כך יקל שלב הרחבת השברים (ראה דוגמה 6 בהמשך).
  4. את המונה המתקבל בשלב ד' כדאי לנסות לפרק לגורמים, שכן יתכן וניתן לצמצם אותו ואת המכנה המשותף.
  5. בכל מקרה אין צורך "לפתוח סוגריים" במכנה המשותף, אלא להשאירו מפורק לגורמים.

**דוגמאות** 

1.  $\frac{6}{12} \cdot \frac{a-2}{18} - \frac{4}{18} \cdot \frac{2a-3}{8} - \frac{9}{8} \cdot \frac{3(1-a)}{8} =$  שלב א'

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 18 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \Rightarrow 2^3 \cdot 3^2 = 72 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

מ"מ

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6(a-2) - 4(2a-3) - 27(1-a)}{72} && \dots\dots\dots \text{שלב ב (שים לב להערות 1,2)} \\
 &= \frac{6a - 12 - 8a + 12 - 27 + 27a}{72} = && \dots\dots\dots \text{שלב ג} \\
 &= \frac{25a - 27}{72} && \dots\dots\dots \text{שלב ד}
 \end{aligned}$$

2.  $\frac{3a}{2a} - \frac{1}{2a} - \frac{2a}{3a} - \frac{1}{3a} - \frac{6}{a^2} - \frac{2(2-a)}{a^2} = a \neq 0$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3a - 2a(a-1) - 12(2-a)}{6a^2} = \\
 &= \frac{3a - 2a^2 + 2a - 24 + 12a}{6a^2} = \\
 &= \frac{-2a^2 + 17a - 24}{6a^2}
 \end{aligned}$$

3.  $\frac{3}{a+1} - \frac{a-3}{2a+2} - \frac{a}{a-1} = a \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{a+1} - \frac{a-3}{2(a+1)} - \frac{a}{a-1} = \\
 &= \frac{6(a-1) - (a-1)(a-3) - 2a(a+1)}{2(a+1)(a-1)} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{6a - 6 - (a^2 - 3a - a + 3) - 2a^2 - 2a}{2(a+1)(a-1)} = \text{שים לב להערות 1,2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6a - 6 - a^2 + 4a - 3 - 2a^2 - 2a}{2(a+1)(a-1)} = \\
 &= \frac{-3a^2 + 8a - 9}{2(a+1)(a-1)}
 \end{aligned}$$

$$4. \frac{2}{a-2} + \frac{3}{4-2a} + \frac{a}{3a+6} =$$

את המכנה  $4-2a$  נפרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף  $(-2)$ ; ע"י כך מתקבל בתוך הסוגריים גורם  $(a-2)$ , זהה לזה שבמכנה הראשון. הסימן  $(-)$  הופך את הסימן הרשום לפני קו השבר.

$$= \frac{6(a+2)^1}{a-2} - \frac{3(a+2)^1}{2(a-2)} + \frac{2(a-2)^1}{3(a+2)} = \quad a \neq \pm 2$$

$$= \frac{12(a+2) - 9(a+2) + 2a(a-2)}{6(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{12a + 24 - 9a - 18 + 2a^2 - 4a}{6(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{2a^2 - a + 6}{6(a-2)(a+2)}$$

$$5. \frac{x}{4x+4} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{x^2+x} = \quad x \neq 0, -1$$

$$= \frac{x^1}{4(x+1)} - \frac{1^{2(x+1)^1}}{2x} + \frac{3^4}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2(x+1) + 12}{4x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2 + 12}{4x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 10}{4x(x+1)}$$

$$6. \frac{5a^2-1}{a^2-3a} - \frac{a+1}{2a^2} - 5 = \quad a \neq 0, -3$$

$$= \frac{2a^1}{5a^2-1} - \frac{a^{-3}}{a+1} - \frac{2a^2(a-3)^1}{5} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2a(5a^2 - 1) - (a - 3)(a + 1) - 10a^2(a - 3)}{2a^2(a - 3)} = \\
&= \frac{10a^3 - 2a - (a^2 - 2a - 3) - 10a^3 + 30a^2}{2a^2(a - 3)} = \\
&= \frac{10a^3 - 2a - a^2 + 2a + 3 - 10a^3 + 30a^2}{2a^2(a - 3)} = \\
&= \frac{29a^2 + 3}{2a^2(a - 3)}
\end{aligned}$$

$$7. \frac{1}{b^2 - 5b} - \frac{1}{2b + 10} + \frac{b}{b^2 - 25} = \quad b \neq 0, \pm 5$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(b+5)/1}{b(b-5)} - \frac{b(b-5)/1}{2(b+5)} + \frac{2b/b}{(b+5)(b-5)} = \\
&= \frac{2(b+5) - b(b-5) + 2b^2}{2b(b+5)(b-5)} = \\
&= \frac{2b + 10 - b^2 + 5b + 2b^2}{2b(b+5)(b-5)} = \\
&= \frac{b^2 + 7b + 10}{2b(b+5)(b-5)} = \frac{(b+2)(b+5)}{2b(b+5)(b-5)} = \frac{b+2}{2b(b-5)}
\end{aligned}$$

## 5. נספח - חישוב הכמ"מ של מספרים, לצורך קביעת המכנה

### המשותף.

פעולה זו, של בחירת כל גורם ראשוני בחזקה הגבוהה ביותר, מתבצעת בצורה מעשית בשיטה הבאה:

רושמים את המספרים הנתונים זה ליד זה ומחלקים אותם במספרים ראשוניים, לפי סדר גודל: 2, 3, 5, וכו', עד שמנות החילוק האחרונות הן 1.

מכפלת המחלקים מהווה את הכמ"מ.

נחשב את הכמ"מ של 30, 6, 15, 12.

$$\begin{array}{r|l}
6 & 15 & 12 & 30 & 2 \\
3 & 15 & 6 & 15 & 2 \\
3 & 15 & 3 & 15 & 3 \\
1 & 5 & 1 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

הגורם הראשוני שמחלק לפחות אחד מהמספרים הוא 2.

30, 12, 6 מתחלקים ב-2. כותבים את מנות החילוק בשורה הבאה.

15 אינו מתחלק, לכן מעתיקים אותו גם לשורה הבאה.

עדיין יש מספר שמתחלק ב-2; לכן חוזרים על הפעולה.

במנות שנתקבלו, אין אף לא מספר אחד שמתחלק ב-2.

לכן עוברים למספר הראשוני הבא - 3, שמחלק לפחות אחד מהמספרים, וכו'.  
 כאשר מגיעים למצב שבו כל המנות שוות ל-1, מכפילים את המספרים שבעמודה הימנית ומקבלים  
 את הכמ"מ  $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$  (גורם שחוזר, כותבים אותו בחזקה).

**דוגמאות :**

1.

20	24	15	2
10	12	15	2
5	6	15	2
5	3	15	3
5	1	5	5
1	1	1	

הכמ"מ  $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

2.

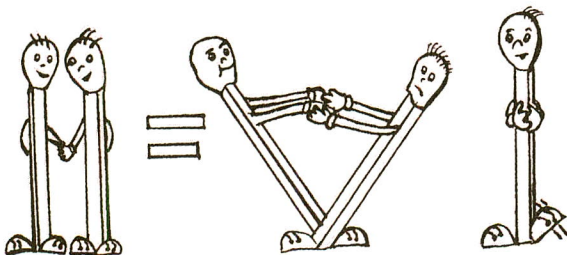
45	18	30	2
45	9	15	3
15	3	5	3
5	1	5	5
1	1	1	

הכמ"מ  $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

3.

36	28	18	21	2
18	14	9	21	2
9	7	9	21	3
3	7	3	7	3
1	7	1	7	7
1	1	1	1	

הכמ"מ  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$



**חידה**  
 לפני 5 אפרוים  
 האסודרים באופן כזה,  
 שהתוצאה היא פסוק  
 שקר.  
 הלל אפרור אחד בלבד,  
 והפוק את הפסוק  
 לאמת.

שים אחד מהגפרורים שבאגף שמאל במאוזן, מעל הגפרור הימני שבאגף ימין ותקבל  $\sqrt{1} = 1$ .

## תרגילים

### סעיפים 1-3

א. בצע את פעולות הכפל והחילוק, וצמצם את השברים. ציין את תחום ההצבה

1.  $\frac{10ab}{2}$

3.  $\frac{-8abc}{4bc}$

5.  $2mnt \cdot \frac{4c}{8ct}$

7.  $\frac{4mn}{-8mk} : \frac{6n}{12nk}$

9.  $\frac{4x^3y^5}{2x^2y}$

11.  $\frac{-17x^4m^5y}{-34x^2m^3}$

13.  $\frac{3a^3k^5}{2m^2} \cdot \frac{4m^3k}{a^2k^2}$

15.  $\frac{16x^3y^5}{4x^2y} \cdot \frac{1}{2xy}$

17.  $\frac{6a^2(2a-3b)}{3a(2a-3b)}$

19.  $\frac{18xy}{6axy+6bxy}$

21.  $\frac{2x+6y}{x+3y}$

2.  $\frac{15xy}{3x}$

4.  $\frac{-12mkt}{-6mnt}$

6.  $\frac{5ab}{3bc} \cdot \frac{6c}{10a}$

8.  $\frac{2ab}{3b} : 4a$

10.  $\frac{18a^3bc}{-6ab^2d}$

12.  $\frac{36a^2b^3x^5}{45a^3x^4}$

14.  $\frac{-12a^3b^4}{8a^6} : \frac{6b^4}{a^3}$

16.  $\frac{-44a^3b^5c^4}{8a^2b^2} : 11a^2b^3c$

18.  $\frac{4xy(3x+y)}{2y(3x+y)}$

20.  $\frac{9mk+9nk}{3ak}$

22.  $\frac{3a-9b}{4a-12b}$

$$23. \frac{ax + bx}{ay^2 + by^2}$$

$$25. \frac{ab + ac - ad}{b + c - d}$$

$$27. \frac{2x^2y(4x + y)}{2xy(y + 4x)}$$

$$29. \frac{15a^3(x - a)}{-5a^2(a - x)}$$

$$31. \frac{2x^2y - 2xy^2}{y^3 - xy^2}$$

$$33. \frac{5(x + y)}{10x^2} \cdot \frac{8x^3y}{4(x + y)}$$

$$35. \frac{2x + 4y}{2x - 4y} \cdot \frac{3x - 6y}{2y + x}$$

$$37. \frac{x^2 - 16}{2x - 8}$$

$$39. \frac{3a^2 - 48}{a^2 - 8a + 16}$$

$$41. \frac{5x^2 - 20}{4 + 2x}$$

$$43. \frac{a^2 - 4a + 4}{4 - 2a}$$

$$45. \frac{3x^2 - 75}{25 - 10x + x^2}$$

$$47. \frac{a^3 - 1}{a - 1}$$

$$49. \frac{a^3 + 1}{a^2 + 2a + 1}$$

$$51. \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$

$$53. \frac{a^3 - 1}{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}$$

$$24. \frac{2a^2b - 2a}{a^3b - a^2}$$

$$26. \frac{ax^2 + bx^2 + 6x^2}{2a + 2b + 12}$$

$$28. \frac{10a^3b^5(a - 2b)}{5a^2b^3(2b - a)}$$

$$30. \frac{3k - 6t}{4t - 2k}$$

$$32. \frac{9m^4n - 3m^5}{2mn^4 - 6n^5}$$

$$34. \frac{a(a^2 + b^2)}{a^3(b + c)} \cdot \frac{a^5(b + c)}{a^2 + b^2}$$

$$36. \frac{5x^2 - 15xy}{5x^4} \cdot \frac{2x - 6y}{2x^3}$$

$$38. \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

$$40. \frac{2k^2 - 28k + 98}{2k^2 - 98}$$

$$42. \frac{2a^2 - 50}{10 - 2a}$$

$$44. \frac{x^2 - 6x + 9}{9 - 3x}$$

$$46. \frac{4x^2 - 12x + 9}{9 - 4x^2}$$

$$48. \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$$

$$50. \frac{a^3 - 2a^2 + 4a}{a^3 + 8}$$

$$52. \frac{m^2 - k^2}{m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3}$$

$$54. \frac{5a - 10}{a^2 - 4} \cdot \frac{a^2 + 4a + 4}{a^2 + 2a}$$

$$55. \frac{3a^2 - 27}{3a^2 - 9a} : \frac{4a^3 + 12a^2}{8a^3}$$

$$56. \frac{a^3 - a^2}{a^3 - 1} \cdot \frac{2a^2 + 2a + 2}{2a}$$

$$57. \frac{5a^2 - 125}{25a - 125} \cdot \frac{20a^4 + 100a^3}{2a^2 + 20a + 50}$$

$$58. \frac{2x^2 - 98}{4x + 28} : (x^2 - 14x + 49)$$

$$59. (25x^2 - 10x + 1) : \frac{50x^2 - 2}{40x + 8}$$

$$60. \frac{2x^4 - 32}{4x^2 + 16} \cdot \frac{25}{5x - 10}$$

## תשובות

1.  $5ab$  2.  $5y$ ,  $x \neq 0$  3.  $-2$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  4.  $\frac{2k}{n}$ ,  $m, n, t \neq 0$   
5.  $mn$ ,  $c \neq 0$ ,  $t \neq 0$  6.  $1$ ,  $a, b, c \neq 0$  7.  $-n$ ,  $m, k, n \neq 0$   
8.  $\frac{1}{6}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  9.  $2xy^4$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  10.  $-\frac{3a^2c}{bd}$ ,  $a, b, d \neq 0$   
11.  $\frac{1}{2}x^2m^2y$ ,  $x \neq 0$ ,  $m \neq 0$  12.  $\frac{4b^3x}{5a}$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \neq 0$   
13.  $6ak^4m$ ,  $m \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $k \neq 0$  14.  $-\frac{1}{4}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$   
15.  $2y^3$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  16.  $-\frac{c^3}{2a}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$   
17.  $2a$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq \frac{3b}{2}$  18.  $2x$ ,  $y \neq 0$ ,  $y \neq -3x$  19.  $\frac{3}{a+b}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $a \neq -b$   
20.  $\frac{3(m+n)}{a}$ ,  $a \neq 0$ ,  $k \neq 0$  21.  $2$ ,  $x \neq -3y$  22.  $\frac{3}{4}$ ,  $a \neq 3b$   
23.  $\frac{x}{y^2}$ ,  $y \neq 0$ ,  $a \neq -b$  24.  $\frac{2}{a}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq \frac{1}{b}$  25.  $a$ ,  $b+c-d \neq 0$   
26.  $\frac{x^2}{2}$ ,  $a+b \neq -6$  27.  $x$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $y \neq -4x$   
28.  $-2ab^2$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq 2b$  29.  $3a$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq x$  30.  $-1\frac{1}{2}$ ,  $k \neq 2t$   
31.  $-\frac{2x}{y}$ ,  $y \neq 0$ ,  $x \neq y$  32.  $-\frac{3m^4}{2n^4}$ ,  $n \neq 0$ ,  $m \neq 3n$  33.  $xy$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq -y$   
34.  $a^3$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq -c$ ,  $a = b \neq 0$  35.  $3$ ,  $x \neq \pm 2y$  36.  $1$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq 3y$   
37.  $\frac{x+4}{2}$ ,  $x \neq 4$  38.  $\frac{x-3}{x+3}$ ,  $x \neq \pm 3$  39.  $\frac{3(a+4)}{a-4}$ ,  $a \neq 4$  40.  $\frac{k-7}{k+7}$ ,  $k \neq \pm 7$   
41.  $\frac{5(x-2)}{2}$ ,  $x \neq -2$  42.  $-(a+5)$ ,  $a \neq 5$  43.  $\frac{2-a}{2}$ ,  $a \neq 2$  44.  $\frac{3-x}{3}$ ,  $x \neq 3$   
45.  $\frac{3(x+5)}{x-5}$ ,  $x \neq 5$  46.  $\frac{3-2x}{3+2x}$ ,  $x \neq \pm 1.5$  47.  $a^2 + a + 1$ ,  $a \neq 1$   
48.  $x - 2$ ,  $-\infty < x < \infty$  49.  $\frac{a^2 - a + 1}{a + 1}$ ,  $a \neq -1$  50.  $\frac{a}{a + 2}$ ,  $a \neq -2$   
51.  $\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$ ,  $x \neq 1$  52.  $\frac{m-k}{(m+k)^2}$ ,  $m \neq -k$  53.  $\frac{a^2+a+1}{(a-1)^2}$ ,  $a \neq 1$

54.  $\frac{5}{a}$ ,  $a \neq \pm 2$ ,  $a \neq 0$     55.  $2$ ,  $a \neq \pm 3$ ,  $a \neq 0$     56.  $a$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$   
 57.  $2a^3$ ,  $a \neq \pm 5$     58.  $\frac{1}{2(x-7)}$ ,  $x \neq \pm 7$     59.  $4(5x-1)$ ,  $x \neq \pm \frac{1}{5}$   
 60.  $\frac{5(x+2)}{2}$ ,  $x \neq 2$

ב. העזר בפרוק טרינום כדי לצמצם את השברים.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 6}$   | 2. $\frac{a^2 - 9a + 20}{a^2 - 5a}$  |
| 3. $\frac{a^2 + 7a + 6}{a^2 - 1}$  | 4. $\frac{a^3 + 6a^2 + 9a}{a^2 - 4a - 21}$   |
| 5. $\frac{k^2 - 7k - 30}{k^2 - k - 90}$  | 6. $\frac{2x^2 + 2x - 60}{x^2 + 12x + 36}$   |
| 7. $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 - 13x - 6}$  | 8. $\frac{3x^2 - 2x - 16}{3x^2 - 11x + 8}$   |
| 9. $\frac{x^2 - 7x + 6}{2x^2 - 72} \cdot \frac{4x + 24}{2}$  | 10. $\frac{a^2 + 9a + 18}{a^2 + 6a} \cdot \frac{a^3 - 3a^2}{a^2 - 9}$                      |
| 11. $\frac{x^2 - 11x + 30}{x^2 - 10x + 25}$  | 12. $\frac{9x^2 - 6x + 1}{3x^2 - 7x + 2} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{4x - 12}$               |
| 13. $\frac{49x^2 - 1}{7x^2 + 20x - 3}$   | 14. $\frac{x^2 - 2x - 35}{x^2 - 6x - 7} \cdot \frac{x^2 - 4x - 5}{2x^2 - 50}$              |
| 15. $\frac{x^2 - 6x - 40}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{x^3 + 4x^2}{3x - 30}$                               | 16. $\frac{12x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 11x + 6} \cdot \frac{3x^2 - 5x - 2}{6x^2 - 24x + 24}$    |
| 17. $\frac{x^4 - 1}{2x^2 + x - 3} : \frac{2x^2 + 2}{4x + 6}$   | 18. $\frac{2x^2 + 3x - 35}{2 - 2x} \cdot \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x^2 - 9x + 7}$              |
| 19. $(x^3 + 25x^2) : \frac{x^2 + 50x + 625}{x^2 + 21x - 100}$  | 20. $\frac{4 - x}{x^2 + 21x - 100} : \frac{1}{x^3 + 25x^2}$                                |
| 21. $\frac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + 5x + 3} \cdot \frac{6x + 6}{x - 1} \cdot \frac{2x^2 - 5x - 12}{3x + 15}$ | 22. $\frac{3x - 9}{x^2 - 4} \cdot \frac{2x^2 + 10x + 12}{x^2 - 9} : \frac{1}{x^2 + x - 6}$ |

תשובות

1.  $\frac{x-3}{3}$ ,  $x \neq 2$     2.  $\frac{a-4}{a}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 5$     3.  $\frac{a+6}{a-1}$ ,  $a \neq \pm 1$ ,  
 4.  $\frac{a(a+3)}{a-7}$ ,  $a \neq 7$ ,  $a \neq -3$     5.  $\frac{k+3}{k+9}$ ,  $k \neq 10$ ,  $k \neq -9$     6.  $\frac{2(x-5)}{x+6}$ ,  $x \neq -6$

7.  $\frac{x-1}{x-3}$ ,  $x \neq -\frac{2}{5}$ ,  $x \neq 3$    8.  $\frac{x+2}{x-1}$ ,  $x \neq \frac{8}{3}$ ,  $x \neq 1$    9.  $x-1$ ,  $x \neq \pm 6$   
 10.  $a$ ,  $a \neq -6$ ,  $a \neq \pm 3$ ,  $a \neq 0$    11.  $\frac{x-6}{x-5}$ ,  $x \neq 5$   
 12.  $\frac{3x-1}{4}$ ,  $x \neq \frac{1}{3}$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \neq 3$    13.  $\frac{7x+1}{x+3}$ ,  $x \neq \frac{1}{7}$ ,  $x \neq -3$   
 14.  $\frac{1}{2}$ ,  $x \neq 7$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq \pm 5$    15.  $\frac{x^2}{3}$ ,  $x \neq -4$ ,  $x \neq 10$   
 16.  $6$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \neq \frac{3}{4}$ ,  $x \neq -\frac{1}{3}$    17.  $(x+1)$ ,  $x \neq -\frac{3}{2}$ ,  $x \neq 1$   
 18.  $-2(x+5)$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq \frac{7}{2}$    19.  $x^2(x-4)$ ,  $x \neq -25$   
 20.  $-x^2$ ,  $x \neq -25$ ,  $x \neq 4$ ,  $x \neq 0$    21.  $2(x-4)$ ,  $x \neq \pm 1$ ,  $x \neq -5$ ,  $x \neq -\frac{3}{2}$   
 22.  $6(x+3)$ ,  $x \neq \pm 2$ ,  $x \neq \pm 3$

ג. בצע את הפעולות הרשומות והבא לצורה הפשוטה ביותר

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$                | 2. $\frac{a}{3} + \frac{a-4}{2}$                              |
| 3. $\frac{a-2}{5} + \frac{3a+4}{2} + \frac{a}{4}$           | 4. $\frac{m+1}{6} - \frac{2m}{3} + \frac{m+7}{2}$             |
| 5. $\frac{3a-1}{8} - \frac{a+1}{6} - \frac{a}{12}$          | 6. $\frac{a}{6} - \frac{3-a}{9} + \frac{a-4}{3}$              |
| 7. $\frac{3n-1}{8} - \frac{2(n-1)}{6} + \frac{3(n-1)}{12}$  | 8. $\frac{4(1-k)}{9} - \frac{3(3-k)}{8} - \frac{5(2k+1)}{12}$ |
| 9. $\frac{3-a}{15} - \frac{5(3-a)}{12} - \frac{5(2a-1)}{6}$ | 10. $-\frac{a+1}{18} - \frac{3(a-7)}{50} + \frac{1-2a}{12}$   |
| 11. $\frac{a}{2} + \frac{3-a}{a} - \frac{1}{a}$             | 12. $\frac{3}{a} + \frac{2}{3a} - \frac{1}{6a}$               |
| 13. $\frac{2}{3x} - \frac{a}{x} + \frac{a}{2x}$             | 14. $\frac{1}{m} + \frac{m}{2} - \frac{4}{5m}$                |
| 15. $\frac{2}{3ab} + \frac{5}{3am} - \frac{1}{a}$           | 16. $\frac{5a}{b^2} - \frac{3}{2bm} + m$                      |
| 17. $\frac{4ab}{c} + \frac{3ac}{2b} - 5b$                   | 18. $2m - \frac{ab}{3m} + m^2$                                |
| 19. $a + \frac{a(a-2)}{3a}$                                 | 20. $\frac{b-5}{3b} - \frac{b-1}{6b^2}$                       |
| 21. $\frac{5}{2a} + \frac{3-a}{3a^2} - \frac{a+2}{6a}$      | 22. $\frac{2b-1}{5b^2} - \frac{2(b+2)}{5b} + \frac{b-3}{b}$   |

$$23. \frac{a}{a+1} + \frac{3a}{2a+2}$$

$$25. \frac{4k}{k-1} + \frac{3k}{1-k}$$

$$27. \frac{6}{2a-3} - \frac{5}{6-4a} - \frac{2}{6a-9}$$

$$29. \frac{1}{2a^2-abc} + \frac{2}{b^2c^2-2abc}$$

$$31. \frac{m+n}{(m-n)^2} - \frac{1}{n-m}$$

$$33. \frac{2x}{3(x-1)^2} + \frac{3}{5(1-x)}$$

$$35. \frac{5}{x+2} - \frac{4}{3x} + \frac{3}{x}$$

$$37. \frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}$$

$$39. \frac{2}{x(x-1)} - \frac{3}{x(2x+1)}$$

$$41. \frac{4}{(x+1)(x-2)} - \frac{3}{x(x-2)}$$

$$43. \frac{3}{(x+1)(x-4)} - \frac{2}{x(1+x)} - \frac{1}{x(4-x)}$$

$$44. \frac{2}{x(2x+3)} + \frac{4}{x(3-x)} - \frac{1}{(2x+3)(x-3)}$$

$$45. \frac{k}{2k^2-k} - \frac{3}{4k} + \frac{k}{1-2k}$$

$$47. \frac{a}{a-5} - \frac{a^2}{a^2-25}$$

$$49. \frac{5}{2a+2} + \frac{2}{a-1} - \frac{3a}{a^2-1}$$

$$51. \frac{2a}{a^2+4a} - \frac{a+1}{2a^2-32} - \frac{5}{3a-12}$$

$$53. \frac{x+1}{x^2+4x+4} - \frac{3}{2x+4} + \frac{x-2}{x^2+2x}$$

$$24. \frac{3b}{b-1} - \frac{5}{b} + 2$$

$$26. \frac{4a-3}{4a-2} - \frac{a}{1-2a}$$

$$28. \frac{a}{ab-b^2} - \frac{b}{a^2-ab}$$

$$30. \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a-1)^2}$$

$$32. \frac{3}{2(x-3)} + \frac{4.5}{(x-3)^2}$$

$$34. \frac{1}{5-2a} - \frac{5}{(2a-5)^2}$$

$$36. \frac{1}{x-1} - \frac{2}{3x-3} + \frac{3}{2x}$$

$$38. \frac{2}{3x} - \frac{5}{2x-1} + \frac{1}{x+2}$$

$$40. \frac{1}{x(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x-1)}$$

$$42. \frac{a}{a^2+5a} - \frac{2}{2a+10} - \frac{3}{2a}$$

$$46. \frac{k+1}{6k} - \frac{k+3}{2k^2-4k} - \frac{k}{6-3k}$$

$$48. \frac{x^2+1}{x^2-9} - \frac{3x+1}{3x+9}$$

$$50. \frac{3}{a-3} - \frac{2}{3a+9} - \frac{a-5}{2a^2-18}$$

$$52. \frac{2x+3}{x^2-25} - \frac{5}{x+5} + \frac{3}{10-2x}$$

$$54. \frac{a+2}{a^2-9} - \frac{a-1}{a^2+3a} - \frac{1}{6-2a}$$

$$55. \frac{a}{x^2-49} - \frac{a}{x^2+14x+49}$$

$$57. \frac{2x}{x^2-9} - \frac{x-2}{x^2+6x+9} - \frac{3}{6-2x}$$

$$59. \frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{2a+1}{a^2-4} + \frac{a}{a^2+4a+4}$$

$$61. \frac{3}{a^2+2a+4} + \frac{5-3a}{a^3-8}$$

$$63. \frac{2b}{b+2} + \frac{b}{b+5} - \frac{3b^2}{b^2+7b+10}$$

$$65. \frac{a}{a^2-7a+10} + \frac{5a}{2a^2-50}$$

$$67. \frac{2}{4x^2-1} - \frac{1}{2x^2+3x-2}$$

$$69. \left( \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a} \right) : \frac{b}{a^2-b^2}$$

$$71. \frac{2}{1-a} - \frac{a^2-5a+6}{a^2-1} \cdot \frac{a+1}{a-3}$$

$$73. \left( \frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1} \right) : \left( \frac{a^2}{a^2-1} - 1 \right)$$

$$75. \left( \frac{m^2+1}{m^2-1} + 1 \right) : \left( \frac{4}{m+1} - \frac{2}{m-1} - \frac{6}{1-m^2} \right)$$

$$76. \left( \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{x-y}{2a+2b} : \frac{x^2-y^2}{a+b} \right) \cdot \frac{2x+2y}{2+x-y}$$

$$77. \left( \frac{a}{ax-x^2} + \frac{x}{ax^2-2a^2x+a^3} : \frac{1}{x-a} \right) : \frac{a^3+x^3}{ax}$$

$$78. \left[ \frac{(x+2)^2-x^2}{4x^2-4} - \frac{3}{x^3-x^2} : \frac{1}{x} \right] : \frac{x-3}{x^2-2x+1}$$

$$56. \frac{a-5}{a^2-12a+36} + \frac{a}{a^2-36} - \frac{2}{6+a}$$

$$58. \frac{a+1}{a^2-10a+25} - \frac{2}{5-a} + \frac{a}{25-a^2}$$

$$60. \frac{x^2+x}{x^3-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$62. \frac{a}{a^3-27} - \frac{1}{a^2-9}$$

$$64. \frac{3x}{x^2-9x+20} + \frac{5}{2x-8} + \frac{4}{5-x}$$

$$66. \frac{b+3}{b^2-6b+5} - \frac{b+1}{b^2+2b-3}$$

$$68. \frac{3}{3x^2-13x-10} + \frac{1}{25-x^2}$$

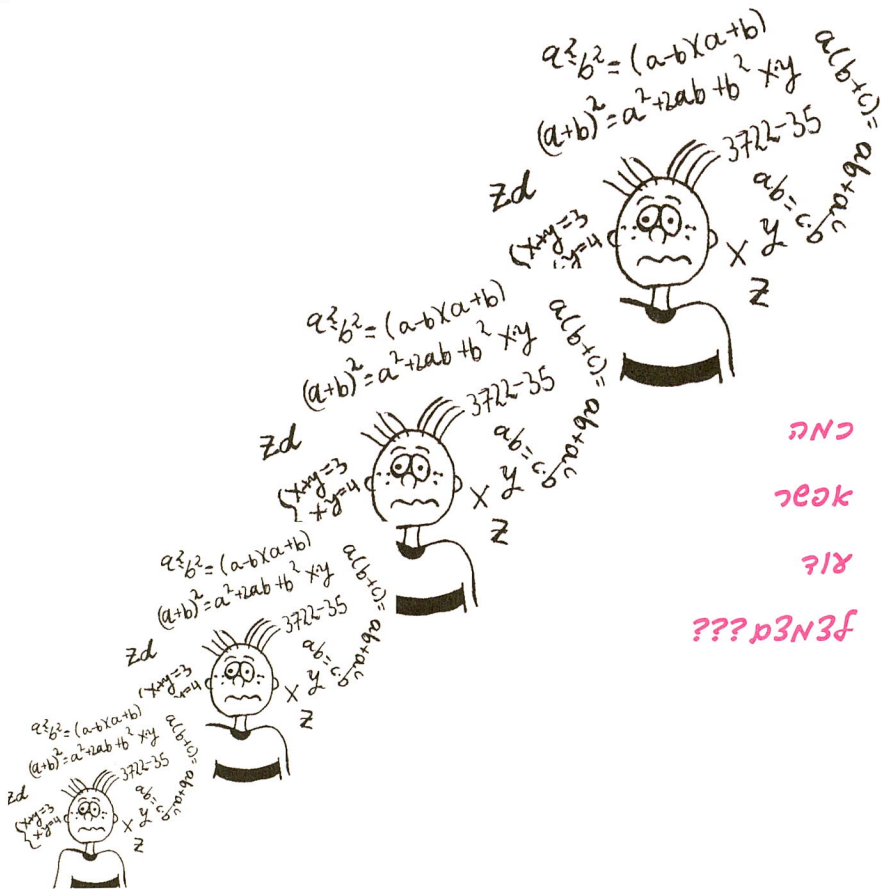
$$70. \frac{2x}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{x^2+3x} + \frac{4x}{3x+9}$$

$$72. \frac{xy^2-m^2x}{yn^2-y} : \frac{y-m}{n+1} + \frac{x}{1-n}$$

$$74. \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) : \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right)$$

1.  $\frac{a+b-c}{2}$  2.  $\frac{5a-12}{6}$  3.  $\frac{39a+32}{20}$  4.  $\frac{11}{3}$  5.  $\frac{3a-7}{24}$  6.  $\frac{11a-30}{18}$  7.  $\frac{7n-1}{24}$   
 8.  $\frac{-65k-79}{72}$  9.  $\frac{-79a-13}{60}$  10.  $\frac{-254a+403}{900}$  11.  $\frac{a^2-2a+4}{2a}$   
 12.  $\frac{7}{2a}$ ,  $a \neq 0$  13.  $\frac{4-3a}{6x}$ ,  $x \neq 0$  14.  $\frac{5m^2+2}{10m}$ ,  $m \neq 0$   
 15.  $\frac{2m+5b-3bm}{3abm}$ ,  $a, b, m \neq 0$  16.  $\frac{10am-3b+2b^2m^2}{2b^2m}$ ,  $b, m \neq 0$   
 17.  $\frac{8ab^2+3ac^2-10b^2c}{2bc}$ ,  $b, c \neq 0$  18.  $\frac{6m^2-ab+3m^3}{3m}$ ,  $m \neq 0$  19.  $\frac{4a-2}{3}$ ,  $a \neq 0$   
 20.  $\frac{2b^2-11b+1}{6b^2}$ ,  $b \neq 0$  21.  $\frac{-a^2+11a+6}{6a^2}$ ,  $a \neq 0$  22.  $\frac{3b^2-17b-1}{5b^2}$ ,  $b \neq 0$   
 23.  $\frac{5a}{2(a+1)}$ ,  $a \neq -1$  24.  $\frac{5b^2-7b+5}{b(b-1)}$ ,  $b \neq 0, b \neq 1$  25.  $\frac{k}{k-1}$ ,  $k \neq 1$   
 26.  $\frac{3}{2}$ ,  $a \neq \frac{1}{2}$  27.  $\frac{47}{6(2a-3)}$ ,  $a \neq 1\frac{1}{2}$  28.  $\frac{a+b}{ab}$ ,  $a, b \neq 0, a \neq b$   
 29.  $-\frac{1}{abc}$ ,  $a, b, c \neq 0, 2a \neq bc$  30.  $\frac{a}{(a-1)^2}$ ,  $a \neq 1$  31.  $\frac{2m}{(m-n)^2}$ ,  $m \neq n$   
 32.  $\frac{3x}{2(x-3)^2}$ ,  $x \neq 3$  33.  $\frac{x+9}{15(x-1)^2}$ ,  $x \neq 1$  34.  $\frac{-2a}{(2a-5)^2}$ ,  $a \neq 2.5$   
 35.  $\frac{20x+10}{3x(x+2)}$ ,  $x \neq 0, -2$  36.  $\frac{11x-9}{6x(x-1)}$ ,  $x \neq 0, 1$   
 37.  $\frac{2x^2+10x-18}{x(x-2)(x+3)}$ ,  $x \neq 0, 2, -3$  38.  $\frac{-5x^2-27x-4}{3x(2x-1)(x+2)}$ ,  $x \neq 0, \frac{1}{2}, -2$   
 39.  $\frac{x+5}{x(x-1)(2x+1)}$ ,  $x \neq 0, 1, -\frac{1}{2}$  40.  $\frac{3x-1}{x(x+3)(x-1)}$ ,  $x \neq 0, -3, 1$   
 41.  $\frac{x-3}{x(x-2)(x+1)}$ ,  $x \neq 0, 2, -1$  42.  $\frac{-3}{2a}$ ,  $a \neq 0, -5$  43.  $\frac{2x+9}{x(x+1)(x-4)}$ ,  $x \neq 0, -1, 4$   
 44.  $\frac{-7x-18}{x(2x+3)(x-3)}$ ,  $x \neq 0, -\frac{3}{2}, 3$  45.  $\frac{-4k^2-2k+3}{4k(2k-1)}$ ,  $k \neq 0, \frac{1}{2}$   
 46.  $\frac{3k^2-4k-11}{6k(k-2)}$ ,  $k \neq 0, 2$  47.  $\frac{5a}{a^2-25}$ ,  $a \neq \pm 5$  48.  $\frac{8x+6}{3(x^2-9)}$ ,  $x \neq \pm 3$   
 49.  $\frac{3a-1}{2(a^2-1)}$ ,  $a \neq \pm 1$  50.  $\frac{11a+81}{6(a^2-9)}$ ,  $a \neq \pm 3$  51.  $\frac{-a-91}{6(a^2-16)}$ ,  $a \neq \pm 4$   
 52.  $\frac{-9x+41}{2(x^2-25)}$ ,  $x \neq \pm 5$  53.  $\frac{x^2-4x-8}{2x(x+2)^2}$ ,  $x \neq 0, -2$   
 54.  $\frac{a^2+15a-6}{2a(a^2-9)}$ ,  $x \neq 0, \pm 3$  55.  $\frac{14a}{(x-7)(x+7)^2}$ ,  $x \neq \pm 7$   
 56.  $\frac{19a-102}{(a+6)(a-6)^2}$ ,  $x \neq \pm 6$  57.  $\frac{5(x^2+8x+3)}{2(x+3)^2(x-3)}$ ,  $x \neq \pm 3$

58.  $\frac{2a^2 + 11a - 45}{(a-5)^2(a+5)}$ ,  $a \neq \pm 5$     59.  $\frac{-a^2 + 16a + 4}{(a-2)^2(a+2)^2}$ ,  $a \neq \pm 2$     60.  $\frac{1}{1-x^3}$ ,  $x \neq 1$
61.  $\frac{1}{8-a^3}$ ,  $a \neq 2$     62.  $\frac{-9}{(a^3-27)(a+3)}$ ,  $a \neq \pm 3$     63.  $\frac{12b}{(b+5)(b+2)}$ ,  $b \neq -5, -2$
64.  $\frac{3x+7}{2(x-4)(x-5)}$ ,  $x \neq 4, 5$     65.  $\frac{7a^2}{2(a-2)(a^2-25)}$ ,  $a \neq 2, \pm 5$
66.  $\frac{10b+14}{(b-5)(b+3)(b-1)}$ ,  $b \neq 5, -3, 1$     67.  $\frac{3}{(4x^2-1)(x+2)}$ ,  $x \neq \pm \frac{1}{2}, -2$
68.  $\frac{13}{(3x+2)(x^2-25)}$ ,  $a \neq -\frac{2}{3}, \pm 5$     69.  $\frac{a-b}{2}$ ,  $a \neq \pm b$
70.  $\frac{10}{3}$ ,  $x \neq 5, 0, -3$     71.  $\frac{a}{1-a}$ ,  $a \neq \pm 1, \pm 3$     72.  $\frac{mx}{y(n-1)}$ ,  $y \neq 0, n \neq \pm 1, y \neq m$
73.  $2a^2$ ,  $a \neq \pm 1$     74.  $2x-1$ ,  $x \neq 0, 1$     75.  $m$ ,  $m \neq \pm 1, 0$
76.  $\frac{1}{x-y}$ ,  $x \neq \pm y, a \neq -b, x-y \neq -2$     77.  $\frac{1}{a^2-ax+x^2}$ ,  $a, x \neq 0, x \neq \pm a$
78.  $\frac{x-1}{x}$ ,  $x \neq \pm 1, 0, 3$



1.  $\frac{a^3}{a-1} - \frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}$
2.  $\frac{6a+3b}{a^2-b^2} : \frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}$
3.  $\frac{a^3+a^2+a}{a-1} \cdot \frac{3}{2a^2+2a+2}$
4.  $\frac{2ab-a^2+a-2b}{a} \cdot \frac{1}{6b-3a} - \frac{4}{3a}$
5.  $a^2 - \frac{a^2-2ab+b^2}{a-2b} \cdot \frac{a^3-4ab^2}{b^2+a(a-2b)}$
6.  $\frac{2}{a+b} : \frac{a^2+b^2}{b} + \frac{a}{a^2+b^2} \cdot \frac{a-b}{a^2+ab}$
7.  $\frac{a}{a^2+ab} - \frac{a^2+ab+b^2}{a^3+ab^2+2a^2b} + \frac{a}{(a+b)^2}$
8.  $(a^2 + \frac{1}{a}) : (a-1 + \frac{1}{a})$
9.  $\left( \frac{2}{m+2} - \frac{3}{m-2} + \frac{10}{m^2-4} \right) \cdot \frac{m^2-4m+4}{m}$
10.  $\left( \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a} \right) : \frac{2b}{a^2-b^2}$
11.  $\left( \frac{3m}{k^2-m^2} - \frac{3}{m-k} \right) : \frac{6m+3k}{m^2+2mk+k^2}$
12.  $\left( m - \frac{m-1}{m+1} \right) : \left[ \frac{m(m-1)}{m+1} + 1 \right]$
13.  $\left( \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right) : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right)$
14.  $\left( \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) : \left( \frac{a^2+b^2}{2ab} + 1 \right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$
15.  $\left( \frac{k+3}{2k+2} - \frac{6}{2k^2-2} + \frac{k+1}{2-2k} \right) : \frac{3}{4k^2-4}$
16.  $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a^3+b^3}{ab^2} : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a}{b^2} \right)$
17.  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{2}{(a+b)^3} + \frac{1}{(a+b)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$
18.  $\frac{a}{a+b} : \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) \cdot \frac{a^2-b^2}{ab}$
19.  $\left( \frac{2a}{a-b} - \frac{a+b}{a} \right) \cdot \frac{a-b}{a^2+b^2} + \left( \frac{b}{2} - \frac{1+b^2}{2b-1} \right) : \frac{b+2}{1-2b}$
20.  $\left( \frac{1-a^2}{1-a^3} + \frac{1-a}{1-a+a^2} \right) : \left( \frac{1+a}{1+a+a^2} - \frac{1-a^2}{1+a^3} \right)$
21.  $\left[ \left( \frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n} \right) : \frac{m+n}{mn} \right] \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) + \frac{3-4mn}{(m+n)^2}$
22.  $\left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{k^2} \right) \left( \frac{a+k}{a^2+ak+k^2} + \frac{(a+k)^2+2a^2}{k^3-a^3} - \frac{1}{k-a} \right)$

$$23. \left[ \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right) k + \left( \frac{k}{m} - \frac{m}{k} \right) : (k+m) \right] : \frac{k+1}{m}$$

$$24. \left[ \frac{a^2 - x^2}{ax} - \frac{1}{a+x} \left( \frac{a^2}{x} - \frac{x^2}{a} \right) \right] : \frac{a-x}{a}$$

$$25. 1 : \left[ a + 1 : \left( 1 - \frac{a+1}{a-3} \right) \right]$$

### תשובות

$$1. a^2 + 2 \quad 2. \frac{3a+3b}{a-b} \quad 3. \frac{3}{2(a-1)} \quad 4. \frac{a-5}{3a} \quad 5. -2ab \quad 6. \frac{1}{a^2+b^2} \quad 7. \frac{a-b}{a(a+b)}$$

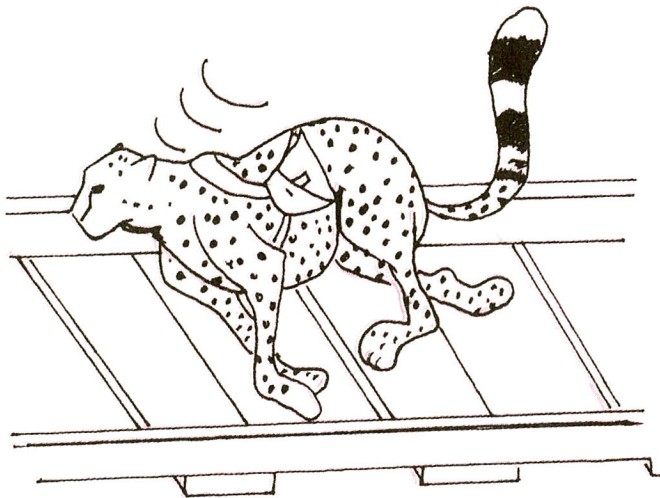
$$8. (a+1) \quad 9. \frac{2-m}{m+2} \quad 10. \frac{a-b}{4} \quad 11. \frac{k+m}{k-m} \quad 12. 1 \quad 13. \frac{a^2+b^2}{2ab} \quad 14. \frac{a+b}{a-b} \quad 15. -6\frac{2}{3}$$

$$16. a \quad 17. \frac{1}{a^2b^2} \quad 18. \frac{a}{a-b} \quad 19. \frac{a+2}{2a} \quad 20. \frac{1}{a^3} \quad 21. \frac{3}{(m+n)^2} \quad 22. \frac{a+k}{a^2k^2}$$

$$23. \frac{k-m}{k} \quad 24. \frac{a}{a+x} \quad 25. \frac{4}{3(a+1)}$$

חידה

פנתר רץ על השלבים של מסיבת רכבת. בכל פעם, שהוא שומע את רגליו פועצות במסיבה הוא מאביר את מהירותו. האם יפסיק אי פעם להאיץ?



תשובה: כן. הסבר: כאשר יעבור את מהירות הקול, לא ישמע את הרגליים מכות במסילה.

## פרק ה': משוואה ממעלה ראשונה

### 1. תבנית פסוק.

**תבנית פסוק** מורכבת משני ביטויים אלגבריים (תבניות מספר) שיש ביניהן קשר של שיויון או של אי-שיויון.

למשל:  $a+2=b$ ,  $3m-5n=4$ ,  $x+y=z$ ,  $a>3$ ,  $a-c<d$

אם נסמן את הביטויים האלגבריים ב-A וב-B, הקשר ביניהם יכול להיות אחד מתבניות הפסוק הבאות:

**שיויון:**  $A=B$  (A שווה B)

**אי-שיויון:**  $A \neq B$  (A שונה מ-B)

$A > B$  (A גדול מ-B)

$A \geq B$  (A גדול או שווה ל-B)

$A < B$  (A קטן מ-B)

$A \leq B$  (A קטן או שווה ל-B)

כל צד של התבנית נקרא "אגף". למשל, B נמצא באגף ימין, ו-A באגף שמאל.

### 2. השויון

#### 2.1 תכונות השויון

נציג מספר תכונות של השויון:

**א. הוספת או חיסור ערכים שווים לשני אגפי השויון, אינם מפריים את השויון.**

כלומר, אם  $A=B$  אז  $A \pm C = B \pm C$

**ב. הכפלת שני אגפי שויון באותו מספר אינה מפרה את השויון.**

כלומר, אם  $A=B$  אז  $A \cdot C = B \cdot C$

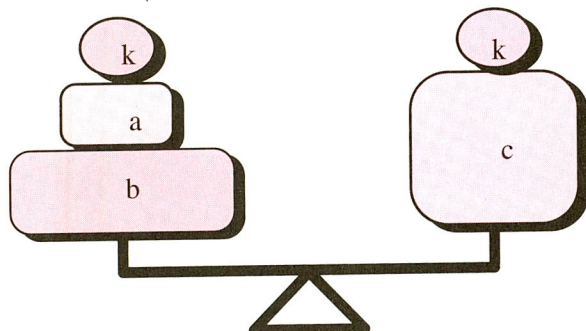
**ג. חילוק שני אגפי שויון באותו מספר השונה מאפס, אינה מפרה את השויון.**

כלומר, אם  $A=B$  ו- $C \neq 0$  אז  $A:C = B:C$

אפשר להדגים את התכונות הנ"ל בעזרת מאזניים הנמצאים במצב של שיווי משקל. למשל, אם המאזניים נמצאים במצב של איזון, כאשר על כף אחת נמצאות המשקולות a ו-b ועל הכף השניה - המשקולת c ומוסיפים לשתי כפות המאזניים משקולות שוות - k, המאזניים ישארו במצב של שיווי משקל.

$$a + b = c \Leftrightarrow a + b + k = c + k \Leftrightarrow 2(a + b + k) = 2(c + k)$$

הסימן  $\Leftrightarrow$  מעיד על כך, שמהשוויון השמאלי אפשר לקבל את הימני ומהימני את השמאלי.



## 2.2 סוגי שוויון

קיימים שני סוגים של שוויון: זהות ומשוואה.  
**זהות** - שוויון שכל ערך של האותיות המופיעות בו מאמת אותו.  
**משוואה** - שוויון שרק קבוצה סופית של ערכי האותיות מאמתים את השוויון.  
 האות (או האותיות) המופיעה במשוואה נקראת **נעלם**, והערך המספרי שמציבים במקום הנעלם נקרא **פתרון** המשוואה או **שורש** המשוואה.  
 משוואות בעלות אותם פתרונות נקראות **משוואות שקולות**.

 דוגמאות לזהויות:

1.  $3a + 5b = 3(a + b) + 2b$
2.  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3.  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad x \neq 1$

כל ערך שנמצא בתחום ההצבה של הזהויות הנ"ל מאמת את השוויון.

 דוגמאות למשוואות:

1.  $x + 2 = 5$  זו משוואה, כי ערכים כמו  $x = 1, 2, 10$  לא מאמתים את השוויון; לעומתם,  $x = 3$  מאמת את השוויון. זה פתרון המשוואה.

2.  $x^2 + 12 = 7x$  זו משוואה, כי הערכים  $x=1, 2$  אינם מאמתים את השוויון, ואילו הערכים  $x=3, 4$  כן מאמתים אותו. אלו פתרונות של המשוואה.

### 3. משוואות ממעלה ראשונה

#### 3.1 פתרון משוואות ממעלה ראשונה

**מעלת** המשוואה זו החזקה הגבוהה ביותר של האות המופיעה בה (כנעלם).

במשוואה **ממעלה ראשונה**, החזקה הגבוהה ביותר של הנעלם היא 1.

**לפתור משוואה**, פרושו למצא את ערך הנעלם המאמת את המשוואה.

הצבת מספר המאמת את השוויון הופך משוואה לשוויון בין מספרים; היות שהמשוואה היא שוויון, אפשר להשתמש בתכונות השוויון ליצירת משוואות שקולות וע"י כך לפתור את המשוואה. בסיום הפתרון יהיה רשום  $x$  באגף אחד וערכו באגף השני.

למשל, במשוואה  $x+2=5$

המספר  $+2$  באגף שמאל "מפריע" לקבלת הפתרון (כי  $x$  צריך להיות לבדו), נסיר את "גורם הפרעה" שהוא **חיבור המספר 2 ל- $x$**  ע"י הפעלת הפעולה הנגדית - **חיסור המספר 2 משני האגפים**.

מתקבלת משוואה שקולה  $x+2-2=5-2$  או  $x=3$

באותה צורה אם  $x-3=7$

נבטל את "גורם הפרעה" - **חיסור המספר 3 מ- $x$** , ע"י הפעלת הפעולה הנגדית -

**חיבור 3 לשני האגפים**:  $x-3+3=7+3$  או  $x=10$

במשוואה  $2x=8$  נפעיל את הפעולה הנגדית לפעולת הכפל ב-2 ע"י חילוק

שני האגפים ב-2:  $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x=4$

ובמשוואה  $\frac{x}{3}=5$  נפעיל את הפעולה הנגדית לפעולת החילוק ב-3, על שני

האגפים  $\frac{x}{3} \cdot 3 = 5 \cdot 3$  או  $x=15$

**באופן מעשי אפשר לבצע את הפעולה המבטלת את "גורם הפרעה" באגף שמאל בצורה סמויה (בלי לכתוב אותה) ולהפעיל את הפעולה ההפוכה על אגף ימין.**

למשל, במשוואה:  $x+5=9$  נפעיל על אגף ימין את הפעולה הנגדית **לחיבור 5**:  $+5$

מתקבל  $x=9-5$  או  $x=4$ .

ובמשוואה  $-8x=24$  נפעיל על אגף ימין את הפעולה הנגדית **לכפל ב-(-8)**,

מתקבל  $x=24:(-8)$  או  $x=-3$ .

אם יש יותר מגורם אחד שמפריע למציאת הפתרון, מפעילים על האגף הימני פעולות הפוכות, בסדר הופך לסדר שבו הן הופעלו על הנעלם באגף שמאל.

למשל, במשוואה  $2x+3=11$  רשום בעצם כפול את x ב-2 ולתוצאה תחבר 3.  
 לכן, נפעיל על אגף ימין קודם פעולה נגדית לפעולה האחרונה - חיסור 3:

$$2x = 11 - 3 \Rightarrow 2x = 8$$

$$x = 8 : 2 = 4$$

ואחר כך את החילוק ב-2

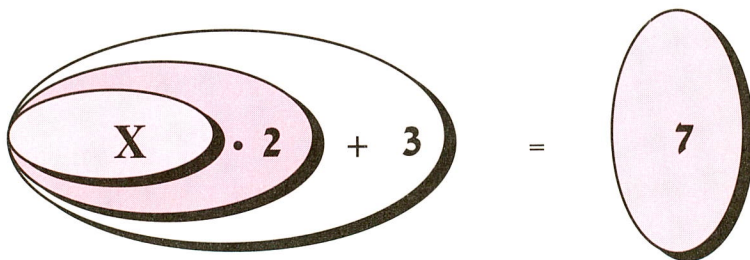
ובמשוואה  $\frac{x}{2} - 3 = 1$  רשום בעצם: חלק את x ב-2 ומהתוצאה חסר 3.

לפיכך, מפעילים קודם פעולה נגדית לאחרונה  $\frac{x}{2} = 1 + 3 = 4$  ואחר כך פעולה נגדית

$$\text{לחילוק ב-2} \quad x = 4 \cdot 2 = 8$$

אם במשוואה, הנעלם מופיע בשני האגפים, יש לרכז את האברים המכילים את הנעלם באגף אחד (מקובל באגף שמאל) ואת האברים החופשיים - המספרים באגף ימין.

בצורה דמיונית אפשר לומר שהנעלם "עטוף" בשכבות שונות, וכדי להגיע אליו יש "לקלף" את השכבות; ברור, שצריך להתחיל מקילוף השכבה החיצונית ולהגיע בהדרגה לשכבה הקרובה אליו ביותר.



כאשר מעבירים אבר מאגף לאגף, יש להעבירו בפעולה נגדית.

$$8x = 5x + 6$$

למשל, במשוואה מרכזים את האברים המכילים את הנעלם באגף שמאל:

$$8x - 5x = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

ואז פותרים כמקודם.



1.  $2x + 3 - 4x = 12 - 5x$

$$2x - 4x + 5x = 12 - 3$$

$$3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

אם במשוואה מופיעים אברים זהים בשני האגפים נח לבטל אותם (ע"י פעולה הפוכה של אותו אבר משני האגפים) מתקבלת משוואה יותר פשוטה.

2.  $3x - 5 + 8x + 1 = 3 + 8x - 2 + 1$

למשל:

$$3x = 5 + 3 - 2$$

$$3x = 6 \quad /:3$$

$$x = 2$$

3. במשוואה הבאה פותחים סוגריים תחילה :

$$5(x+2) - 2x = 4(2x-5)$$

$$5x + 10 - 2x = 8x - 20$$

$$3x - 8x = -20 - 10$$

$$-5x = -30 \Rightarrow x = \frac{-30}{-5} = 6$$

במשוואות המכילות שברים, מכפילים את שני אגפי המשוואה במספר שהוא המכנה המשותף (הכפולה המשותפת הקטנה ביותר) של כל מכני המשוואה.

$$4. \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x = \frac{7}{2}$$

נתונה המשוואה

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{7}{2}$$

שאפשר לכתוב אותה גם בצורה

המכנה המשותף הוא 6, כלומר מכפילים את

כל המחוברים במשוואה בשני האגפים ב- 6 :

$$3 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{2x}{3} = 3 \cdot \frac{7}{2}$$

את פעולת הצמצום אפשר לעשות בצורה סמויה, כלומר לרשום ליד כל מונה את הגורם הכופל אותו - שהוא מנת החילוק של המכנה המשותף - מ"מ במכנה של אותו שבר.

$$5. \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \cdot 2x = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \quad / \cdot 6 \quad \text{מ"מ}$$

$$3x + 4x = 21$$

$$7x = 21 \quad /:7$$

$$x = 3$$

באותו אופן במשוואה :

$$6. \frac{2}{9} \cdot 2x + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{18}{3} \quad / \cdot 18$$

$$4x + 15 + 9x = 54$$

$$13x = 39$$

$$x = 3$$

## שים לב

במשוואות, המכנה המשותף נרשם ליד המשוואה, להבדיל מהצורה שבה נהגנו בחיבור שברים (פרק ג'), וזאת משום שבמשוואות מכפילים את שני האגפים באותו ביטוי (המכנה המשותף).

מומלץ לחזור על ההערות (א-ג) שבפרק הנ"ל.

$$7. \quad \frac{72}{2} - \frac{8}{9} \cdot \frac{x+5}{9} - \frac{9}{8} \cdot \frac{x-4}{8} = \frac{12}{6} \cdot \frac{2+x}{6} \quad / \cdot 72$$

$$144 - 8(x+5) - 9(x-4) = 12(2+x)$$

$$144 - 8x - 40 - 9x + 36 = 24 + 12x$$

$$144 - 40 + 36 - 24 = 12x + 8x + 9x$$

$$116 = 29x \quad / : 29$$

$$x = 4$$

כאן יותר נוח לרכז את האברים המכילים את הנעלם באגף ימין

$$8. \quad \frac{15}{4} \cdot \frac{3(7x-4)}{4} - \frac{12}{5} \cdot \frac{3x+2}{5} = \frac{15}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{20}{3} \cdot \frac{2(5x-2)}{3} \quad / \cdot 60$$

$$45(7x-4) - 12(3x+2) = 15 \cdot 13 - 40(5x-2)$$

$$315x - 180 - 36x - 24 = 195 - 200x + 80$$

$$315x - 36x + 200x = 195 + 80 + 180 + 24$$

$$479x = 479 \Rightarrow x = 1$$

$$9. \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{5(x-2)}{3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{x+1}{5} - \frac{15}{15} \cdot (4x-1) = 0 \quad / \cdot 15$$

$$25(x-2) - 3(x+1) - 15(4x-1) = 0$$

$$25x - 50 - 3x - 3 - 60x + 15 = 0$$

$$-38x - 38 = 0$$

$$-38x = 38 \quad / : (-38)$$

$$x = -1$$

הערה: מתיחסים לביטוי  $(4x-1)$  כאילו היה כתוב  $\frac{4x-1}{1}$

$$10. \quad 5 \left( \frac{x}{3} - \frac{x}{6} \right) - (3-x) = 11 - \frac{3(x-2)}{4}$$

$$\frac{4}{3} \frac{5x}{3} - \frac{2}{6} \frac{5x}{6} - \frac{12}{(3-x)} = \frac{12}{11} - \frac{3(x-2)}{4} \quad / \cdot 12$$

$$20x - 10x - 12(3-x) = 132 - 9(x-2)$$

$$10x - 36 + 12x = 132 - 9x + 18$$

$$22x + 9x = 150 + 36$$

$$31x = 186 \quad /:31$$

$$x = 6$$

**הערה:** כדי שלא נטפל פעמיים במכנה משותף, פתחנו תחילה את הסוגריים הראשונים.

המשוואה הבאה היא סוג של שיויון הנקרא **פרופורציה** (שיויון בין שני שברים). אחת התכונות של פרופורציה היא שמכפלות האברים האלכסוניים שוות. תכונה זו נובעת מהתכונה השניה של השויון.

11.  $\frac{x-3}{2} = \frac{2x+1}{5}$

$$5(x-3) = 2(2x+1)$$

$$5x - 15 = 4x + 2$$

$$5x - 4x = 2 + 15$$

$$x = 17$$

### 3.2 חקירת משוואה ממעלה ראשונה

בפתרון משוואה ממעלה ראשונה עם נעלם אחד, יתכנו שלושה מקרים:

- א. **למשוואה פתרון יחיד.**
- ב. **למשוואה אין פתרון כלל.**
- ג. **למשוואה אינסוף פתרונות - כל מספר הוא פתרון.**

א. כל הדוגמאות שראינו למעלה שייכות למקרה הראשון.

ב. המשוואה הבאה מדגימה את המקרה השני:

$$3x + 5 = 6 + 3x$$

$$3x - 3x = 6 - 5$$

$$0 \cdot x = 1$$

כדי לקבל את ערך הנעלם, צריך לחלק את שני אגפי המשוואה ב-0 ופעולה זו אינה מוגדרת. לכן, למשוואה זו אין פתרון.

ג. נדגים את המקרה השלישי

$$3x + 8 = x + 2(x + 4)$$

$$3x + 8 = x + 2x + 8$$

$$3x - x - 2x = 8 - 8$$

$$0 \cdot x = 0$$

כל ערך שמציבים במקום  $x$  יקיים את השוויון (שכן מכפלת כל מספר ב-0 שווה ל-0). כלומר יש אינסוף פתרונות והשוויון הנ"ל הוא בעצם זהות.

## 4. מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים

כפי שהגדרנו, משוואה היא סוג של שוויון שבו, לא כל ערך שמציבים במקום האותיות מאמת את השוויון. ראינו שלמשוואה עם נעלם אחד יש לכל היותר ערך אחד שמאמת את השוויון.

נתיחס למשוואה הבאה המכילה שני נעלמים

$$x + y = 7$$

אם נציב בה את זוג המספרים  $x = 2, y = 5$  נקבל שוויון, כי

$$2 + 5 = 7$$

כלומר הזוג הזה של מספרים מהווה פתרון למשוואה הנתונה.

במקום לרשום:  $x = 2, y = 5$  נהוג לסמן בקצור  $(2,5)$ , כאשר המספר הראשון - השמאלי - מציין את הערך של  $x$ .

גם הזוג  $x = 4, y = 3$  או  $(4,3)$  - מאמת את המשוואה, וכך גם הזוג  $(-3,10)$ . אפשר למצוא זוגות ערכים נוספים שמהווים פתרון למשוואה הנתונה. למרות זאת, השוויון הנ"ל איננו זהות, שכן יש ערכים שאינם מאמתים אותו, כמו למשל  $(1,8)$ , כי  $1 + 8 \neq 7$  או  $(-15,4)$ , כי  $-15 + 4 \neq 7$ .

גם למשוואה  $x - y = 1$  אינסוף פתרונות:  $(2,1)$ ,  $(0,-1)$ ,  $(4,3)$ ,  $(105,104)$ , וכו'.

זוג המספרים  $(4,3)$  מהווה פתרון גם למשוואה הראשונה וגם לשנייה. אם נמשיך לחפש, לא נמצא זוג נוסף של מספרים שיפתור את שתי המשוואות. משוואה אחת עם שני נעלמים היא **בלתי מסוימת** (אין לה פתרון מסוים). כדי לקבל פתרון מסוים במקרה של שני נעלמים, נחוצות שתי משוואות - מערכת משוואות.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

במקרה הנ"ל אומרים **שלמערכת המשוואות:**

**יש פתרון והוא  $(4,3)$ .**

הסימון  $\left\{ \begin{array}{l} \text{שמשמאל לשתי משוואות בשני נעלמים מציין שזו מערכת משוואות} \\ \text{ואם קיים זוג מספרים שמאמת את שתי המשוואות הוא נקרא} \end{array} \right.$  **פתרון המערכת.**

ברור שאין זה מעשי למצוא פתרון של מערכת בצורה נסיונית.

כעיקרון המתמטיקה בנויה בצורה כזו שמנסים לפתור בעיה חדשה, ע"י מציאת הקשר שלה לבעיה אחרת שאותה הצלחנו לפתור. במקרה של פתרון מערכת משוואות, הדרך היא לעבור משתי משוואות המכילות כל אחת שני נעלמים לשתי משוואות שכל אחת מכילה נעלם אחד - אחת את  $x$  והאחרת את  $y$ , כי משוואה כזאת הצלחנו לפתור. ניתן להשיג את המטרה הנ"ל באמצעות שתי שיטות עיקריות: שיטת השוואת המקדמים ושיטת ההצבה. במהלך הפתרון נעזרים בתכונות השוויון, מתוך ידיעה שלמשוואות שקולות פתרונות זהים.

## 4.1 שיטת השוואת המקדמים

לפי שיטה זו, יש להגיע למצב שבו אחד הנעלמים הוא בעל מקדמים נגדיים בשתי המשוואות. באופן כזה, בחיבור המשוואות מתבטל נעלם זה ונשארת משוואה אחת עם נעלם אחד בלבד.

נדגים את השיטה. נתיחס למערכת המשוואות שהצגנו לעיל:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

לנעלם  $y$  יש מקדמים בעלי ערכים נגדיים בשתי המשוואות. בראשונה  $+1$  ובשניה  $-1$ . אם נחבר את שתי המשוואות זו לזו, אגף לאגף, הנעלם  $y$  יתבטל.

$$x + y + x - y = 7 + 1$$

המשוואה שהתקבלה מכילה רק את הנעלם  $x$ , והיא שקולה למשוואות שבמערכת,  $2x = 8 \Rightarrow x = 4$

אם מציבים ערך זה במקום  $x$  באחת המשוואות מתקבלת משוואה עם נעלם אחד,

$$\begin{cases} x = 4 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (4;3) \quad \text{הפעם } y:$$

הזוג  $(4,3)$  הוא פתרון המערכת.

ברור שאפשר באותה מידה לבטל את  $x$ , ולקבל משוואה עם הנעלם  $y$ .

את תוצאת חיבור המשוואות אפשר לרשום ישירות מתחת למערכת באופן הבא:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ + \\ \hline 2x / = 8 \end{array}$$

הקו הנטוי / מצביע על כך שהערך  $y$  התבטל

$$1. \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ x + 2y = 7 \quad / \cdot (-1) \end{cases}$$

1. חיבור המשוואות במקרה זה לא היה מביא לביטול נעלם כלשהו.  
כפל המשוואה השנייה (או הראשונה) ב- (-1) יביא את המערכת למצב:

$$+ \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ -x - 2y = -7 \end{cases}$$


---


$$2x \quad / = 6$$

מחיבור המשוואות מתקבלת המשוואה שפתרונה:  $x = 3$   
ומהצבת  $x = 3$  במשוואה השנייה מתקבל  $3 + 2y = 7$  שפתרונה  $y = 2$ . לפיכך פתרון המערכת (3;2).

נחזור למערכת הנ"ל. כדי ליצור מצב שבו מתבטל הנעלם  $x$ , נכפיל את המשוואה השנייה ב- (-3) ונקבל:

$$+ \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ -3x - 6y = -21 \end{cases}$$


---

$$/ \quad -4y = -8$$

מתקבלת המשוואה ובה רק הנעלם  $y$

$$\underline{y = 2}$$

הצבת  $y = 2$  באחת המשוואות נותנת משוואה עם נעלם  $x$  בלבד שפתרונה  $x = 3$ . פתרון המערכת (3;2). בדוק!

$$2. \begin{cases} 2x + 3y = 3 \quad / \cdot 3 \\ 3x + 4y = 5 \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

כפל המשוואה הראשונה ב- 3 והשנייה ב- (-2) מביאה למצב שבו  $x$  הוא בעל מקדמים נגדיים (+6) ו- (-6). אילו כפלנו את המשוואה הראשונה ב- 4 ואת השנייה ב- (-3) היה מקבל  $y$  מקדמים נגדיים.

$$+ \begin{cases} 6x + 9y = 9 \\ -6x - 8y = -10 \end{cases}$$


---

$$/ \quad \underline{y = -1} \Rightarrow \underline{x = 3}$$

פתרון המערכת: (3;-1)

המספרים שבהם יש להכפיל את המשוואות נקבעים בצורה דומה לזו שבקביעת מכנה משותף - הכפולה המשותפת המינימלית של 2 ו- 3 היא 6. ולכן הכפלנו את המשוואות בהתאם. נראה זאת גם בדוגמה הבאה.

$$3. \begin{cases} 14x + 9y = 4 & / \cdot 2 \\ 35x - 6y = -47 & / \cdot 3 \end{cases}$$

נבטל את  $y$ . הכפולה המשותפת המינימלית של 9 ו-6 היא 18. לכן מכפילים את המשוואה הראשונה ב-2 ( $18 : 9 = 2$ ) ואת השנייה ב-3 ( $18 : 6 = 3$ ) מתקבלת המערכת:

$$\begin{cases} 28x + 18y = 8 \\ 105x - 18y = -141 \end{cases} \quad \text{פתרון המערכת } (-1; 2)$$

$$133x = -133 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

### הערות

1. אפשר לחשב את ערך הנעלם השני, גם ע"י שימוש חוזר בשיטת השוואת מקדמים. למשל, בדוגמה האחרונה אפשר להכפיל את המשוואה הראשונה ב-5, ואת השנייה ב-(-2) - כדי להגיע לכמ"מ 70. ע"י כך מחשבים את  $y$  באופן בלתי תלוי בערך של  $x$ . המערכת תראה כך:

$$\begin{cases} 14x + 9y = 4 & / \cdot 2 & / \cdot 5 \\ 35x - 6y = -47 & / \cdot 3 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70x + 45y = 20 \\ -70x + 12y = 94 \end{cases}$$

$$/ \quad 57y = 114 \Rightarrow y = 2$$

2. כאשר בוחרים בשיטה זו, לביטול של נעלם אחד בלבד, **בוחרים בנעלם עם מקדמים יותר קטנים.**
3. אפשר לבדוק את הפתרון, ע"י הצבת הערכים שהתקבלו בתוך המשוואות ובדיקה אם הם אכן מאמתים אותן.

### חידה

מטוס טס ליעד מסויים עם הרוח ושב לבסיסו בכיוון נגדי לרוח. פעם אחרת טס המטוס בעת שאין רוח כלל. האם תארך הדרך הלאה ושוב אותו זמן כמו בטיסה הקודמת?

תשובה: לא. בעת שאין רוח, הזמן יהיה קצר יותר (רמז: העזר בפתרון בעיות הספק בפרק י"א).

## 4.2 שיטת ההצבה

לפי שיטה זו מבודדים אחד מהנעלמים ממשוואה אחת ומציבים אותו במשוואה האחרת. באופן כזה המשוואה האחרת מכילה רק את הנעלם השני.



$$1. \begin{cases} 2x + 5y = 18 \\ x = 4 \end{cases}$$

במקרה זה ערכו של  $x$  נתון במפורש. הצבתו במשוואה הראשונה נותנת משוואה עם נעלם אחד -  $y$ . מתקבל  $y = 2$ . פתרון המערכת:  $(4; 2)$

$$2. \begin{cases} 3x - 7y = 5 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

נציב את  $x$  מהמשוואה השנייה שבה הוא כבר מבודד, למשוואה הראשונה. מתקבל:

$$3(y + 3) - 7y = 5$$
$$3y + 9 - 7y = 5$$
$$-4y = -4 \Rightarrow \underline{y = 1} \Rightarrow x = y + 3 = 1 + 3 = 4$$

את הערך שהתקבל עבור  $y$  מציבים בביטוי של  $x$ . פתרון המערכת:  $(4; 1)$

$$3. \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 5y = 17 + x \end{cases}$$

הביטוי  $5y$  חוזר בשתי המשוואות ולכן אפשר להציב במשוואה הראשונה, את הביטוי  $17 + x$  מהמשוואה השנייה:

$$2x + 17 + x = 11$$
$$3x = -6 \Rightarrow \underline{x = -2} \Rightarrow y = 3 \quad (-2; 3) \text{ : פתרון המערכת}$$

$$4. \begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 7x + 3y = 20 \end{cases}$$

נבודד את  $y$  מהמשוואה הראשונה  $y = \frac{5x - 6}{2}$  ונציבו במשוואה השנייה:

$$7x + 3 \cdot \frac{5x - 6}{2} = 20 \quad / \cdot 2$$

$$14x + 15x - 18 = 40$$

$$29x = 58 \Rightarrow \underline{x = 2} \Rightarrow \underline{y = -2} \quad (2; -2) \text{ : פתרון המערכת}$$

נוח לבודד את הנעלם בעל המקדם הקטן ביותר - בערכו המוחלט. כך שאחרי ההצבה במשוואה האחרת המכונה המשותף הוא המספר הקטן ביותר האפשרי.

## הערות

- א.** שיטת ההצבה נוחה במיוחד, כאשר אחד הנעלמים מבודד כבר במערכת המשוואות המקורית. ברוב המקרים האחרים נוח יותר לעבוד בשיטת השוואת מקדמים.
- ב.** במערכות המשוואות שבהן טיפלו עד כאן (שהיו ממעלה ראשונה), היתה למשוואות צורה נורמלית  $Ax + By + C = 0$  (או  $Ax + By = C$  או  $y = ax + b$ ).
- אם במערכת מופיעה לפחות משוואה אחת שאיננה בעלת צורה כני"ל, יש לבצע את הפעולות האלגבריות המתאימות (ביטול מכנים, פתיחת סוגריים, כינוס אברים דומים, צמצום שני האגפים - במידה וניתן, וכו') כדי להביא לצורה זו, ורק אחר כך לפתור את המערכת בשיטה הרצויה. למשל, במערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2(x + y) - 5(y + 3) = 7 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

למרות שהמשוואה השניה מוכנה לשיטת ההצבה, אין להציב את הביטוי של  $y$  לתוך המשוואה הראשונה, אלא רק אחרי שהיא טובא לצורה:  $2x - 3y = 22$ . בדוק!

- ג.** כדי למנוע בלבול בין הנעלמים, חשוב להקפיד שהנעלמים יהיו רשומים בשתי המשוואות באותו הסדר -  $x$  מתחת ל- $x$ , ו- $y$  מתחת ל- $y$ .

נדגים פתרון של שתי מערכות משוואות שאינן בעלות צורה נורמלית:

$$1. \begin{cases} 4(x - 5) + 5(y - 1) = 5 \\ 6(x - 7) - 7(y - 3) = -5 \end{cases}$$

כדי להביא את המשוואות לצורה הפשוטה ביותר יש לפתוח סוגריים, לרכז את הנעלמים באגף שמאל, את המספרים באגף ימין ולכנס אברים דומים:

$$\begin{cases} 4x - 20 + 5y - 5 = 5 \\ 6x - 42 - 7y + 21 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 30 & / \cdot 3 \\ 6x - 7y = 16 & / \cdot -2 \end{cases}$$

את המערכת שהתקבלה נפתור בשיטת השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 12x + 15y = 90 \\ -12x + 14y = -32 \end{cases}$$

$$/ \quad 29y = 58 \Rightarrow \underline{y = 2} \Rightarrow \underline{x = 5} \quad (5; 2) \quad \text{פתרון המערכת:}$$

במערכת הבאה יש לבטל תחילה את המכנים. מחיחסים למספרים 1 כאל שברים

$$\frac{1}{1} : 1$$

$$2. \begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{5}{4}y - 1 = 20 & / \cdot 20 \\ \frac{1}{4}x = \frac{2}{2}y - 1 - 4 & / \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y + 5 = 20 \\ x = 2y - 2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 15 \\ x = 2y - 6 \end{cases}$$

$$4(2y - 6) - 5y = 15$$

$$8y - 24 - 5y = 15$$

$$3y = 39 \Rightarrow \underline{y = 13} \Rightarrow \underline{x = 20} \quad (20; 13) : \text{פתרון המערכת}$$

## 5. חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה - מספר פתרונות

למערכת משוואות ממעלה ראשונה שלושה מקרים אפשריים לגבי מספר הפתרונות:

א. **למערכת המשוואות פתרון יחיד**, שהוא זוג מסודר של מספרים  $(x, y)$ .  
ראינו זאת בכל הדוגמאות שהוצגו לעיל.

ב. **למערכת המשוואות אין פתרון**.  
אם למשוואה המתקבלת לאחר הפעלת אחת מהשיטות הנ"ל אין פתרון גם למערכת המקורית אין פתרון (שהרי הן שקולות).

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{למשל:}$$

$$\underline{\quad \quad \quad} / \quad / = 2$$

כלומר, התקבל:  $0 = 2$  שפרושו - אין פתרון  
ואמנם לא יתכן שאותו ביטוי ישווה גם ל-5 וגם ל-3

ג. **למערכת המשוואות מספר אינסופי של פתרונות**.  
אם למשוואה המתקבלת כתוצאה מהפעלת אחת מהשיטות (השוואת מקדמים או הצבה) יש אינסוף פתרונות, גם למערכת המקורית אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -2x + 6y = 10 \quad / :2 \\ x - 3y = -5 \end{array} \right. \quad \text{למשל:} \\ + \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y = 5 \\ x - 3y = -5 \end{array} \right. \\ \hline \quad \quad \quad / \quad / \quad / \end{array} \quad \text{או } 0 = 0$$

ניתן לזהות בקלות מערכות שלהן אינסוף פתרונות, כי הן מורכבות ממשוואות שאחת היא כפולה של האחרת במספר כלשהו. בעצם מגיעים למשוואה אחת עם שני נעלמים, וכבר ראינו שהיא בלתי מסוימת. במקרה הנ"ל המשוואה השנייה היא כפולה של הראשונה ב- (-1). ואז מצמצמים משוואה אחת ב- 2 קיבלנו את המשוואה השנייה.

**באופן כללי, למערכת המשוואות**

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

**יש פתרון יחיד, כאשר:**

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

**אין פתרון, כאשר:**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

**מספר אינסופי של פתרונות, כאשר:**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

## 6. מערכת של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים

מערכת משוואות בשלושה נעלמים צריכה להכיל שלוש משוואות (מספר המשוואות כמספר הנעלמים).

העיקרון של מציאת קשר בין בעיה חדשה לבעיה דומה שבאה על פתרונה עובד גם במקרה זה. כלומר, ממערכת של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים עוברים למערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, שכן נושא זה כבר נלמד. גם לפתירת מערכת כזאת יש אותן שתי שיטות עיקריות, כמו במערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים: שיטת השוואת מקדמים ושיטת ההצבה.

$$\begin{cases} 3x + 5y - 7z = -6 & / \cdot 4 \\ 5x + 4y + 3z = 15 & / \cdot (-5) \\ x - z = -1 \end{cases}$$

נעבור לשתי משוואות בשני נעלמים, שהם  $x, z$  כי המשוואה השלישית מכילה רק את שני הנעלמים הנ"ל. לכן נבטל משתי המשוואות הראשונות את  $y$ .

$$\begin{cases} 12x + 20y - 28z = -24 \\ -25x - 20y - 15z = -75 \end{cases}$$

$$\hline -13x \quad / \quad -43z = -99$$

משוואה זו מצטרפת למשוואה השלישית (במערכת הנתונה) ויוצרת את המערכת:

$$\begin{cases} -13x - 43z = -99 \\ x - z = -1 & / \cdot 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13x - 43z = -99 \\ 13x - 13z = -13 \end{cases}$$

$$/ \quad -56z = -112 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 1$$

מציבים ערכים אלו באחת המשוואות המכילות את  $y$  ומקבלים  $y = 1$  פתרון המערכת הוא:  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x - 4y + 3z = 4 \\ 5x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$$

במקרה זה כל המשוואות מכילות את שלושת הנעלמים. נבטל נעלם אחד, נניח את  $z$  למטרה זו נקח פעם אחת את 2 המשוואות הראשונות ופעם את המשוואה הראשונה עם השלישית.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 & / \cdot 3 \\ x - 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 & / \cdot -2 \\ 5x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y - 3z = -6 \\ x - 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 6y + 2z = 4 \\ 5x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$$

$$\hline 7x + 5y \quad / \quad = -2$$

$$\hline x - 3y \quad / \quad = -4$$

מתקבלת מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{cases} 7x+5y = -2 \\ x-3y = -4 \quad / \cdot -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+5y = -2 \\ -7x+21y = 28 \end{cases}$$

$$/ \quad 26y = 26$$

$$\underline{y=1} \Rightarrow \underline{x=-1}$$

מציבים ערכים אלה באחת מהמשוואות הנתונות, למשל בראשונה ומקבלים:

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - z = -2 \Rightarrow \underline{z=3}$$

פתרון המערכת הוא:  $(-1, 1, 3)$ .

**חידה**

**צמרת החכם אומר לנתם: אני יכול להוכיח לך  $2=3$ .**

**איך? שאלתם במהט הערצה.**

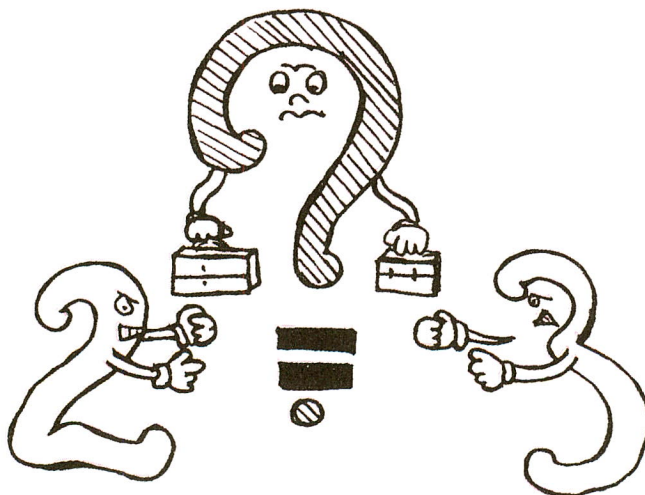
**הנה יש לי שוויון:  $2a+9=3a+6$**

**אמנו אני מקבל:  $2a-6=3a-9$**

**ואחרי פירוק לאורחית:  $2(a-3)=3(a-3)$**

**כעת אצמצם ב-  $a-3$  ואקבל:  $2=3$**

**האם היתה הצדקה למהט הערצה של נתם?**



תשובה: לא. אין לצמצם בביטוי שמכיל את הנעלם, כי יתכן שהוא מתאפס. ואמנם זה מה שקורה במשוואה זו. בדוק?

# תרגילים

## סעיפים 1-3

א. פתור את המשוואות.

1.  $x + 5 = 9$

3.  $x - 2 = 6$

5.  $x - 0.8 = 1.2$

7.  $2 - x = 0$

9.  $-3x = 15$

11.  $2x = 1.6$

13.  $\frac{x}{2} = 5$

15.  $\frac{x}{-3} = 4$

17.  $\frac{-3x}{2} = 0$

19.  $3 + 4x = -5$

21.  $-2x + 3 = -9$

23.  $2 - 3x = -7$

25.  $5x + 3 = 2x + 15$

27.  $3x - 7x = 6x + 9x$

29.  $x - 7 + 3x = 3 + 4x - 10$

31.  $5x - 3 + 6x = x + 2$

33.  $6x - 5 + 3x + 6 = 5x + 4x$

35.  $4x - 7 + x - 3 = 3x - 7 + 4x$

37.  $12x + 4 - x - 5 = 4x - 5 - x$

39.  $5 + x^2 - x = x^2 + 2$

41.  $2 - 3x^2 + 5x = x - 6 - 3x^2$

43.  $2x^2 + 5x - 3 = 5x + 2x^2$

45.  $3(5 - x) + 4x = 12$

2.  $4 + x = -1$

4.  $x + 0.5 = 1.5$

6.  $x - 5 = 0$

8.  $2x = 12$

10.  $-x = 8$

12.  $0.3x = 6$

14.  $\frac{x}{0.5} = 10$

16.  $\frac{-2x}{3} = 6$

18.  $\frac{2x + 5}{2} = 5.5$

20.  $5x - 6 = 9$

22.  $3x + 0.8 = 2.3$

24.  $-5 - 8x = 3$

26.  $4x + 3 - x = 7 + x + 6$

28.  $2x - 5 + x = 3x + 1$

30.  $3 + x - 7x = 6 + x + 4$

32.  $4x + 3x - 2 = x + 5 + x - 7$

34.  $x + 2 + 5x - 3 = 2x - 1 + 4x$

36.  $2x + 5 - 3x + 7 = 8 - 3x + 2x$

38.  $8 - 3x + 4x - 7 = 4x + 1 - 3x$

40.  $4x + 5 - x^2 = 3x - x^2 + 1$

42.  $3x - 5x^2 + 2 = 2 - x - 5x^2$

44.  $2(3x + 1) - 2 = 12$

46.  $5 + 4(2 - 3x) = 1$

47.  $1 - 3(5x - 3) = x - 6$
49.  $2x + 3(x - 2) = 5(x + 1)$
51.  $7(3x + 1) = 49$
53.  $-21(3x + 1 - x) = 63$
55.  $10(3 - x) - 20(x + 4) = 40$
57.  $50(4x + 5) - 125 = 75(3x + 2)$
59.  $0.7x - 0.2 = 1.8 - 0.3x$
61.  $0.3(x - 1) + 0.4(x + 2) = 1.2$
63.  $8(5 - 3x) - 5(x - 4) + 2(x - 3) = 0$
65.  $5x - (2x + 3) \cdot 3 = 2(x - 1) - 1$
67.  $2x - 2(2.5 + 5x) - 5(4 - x) = 0$
69.  $2x - 5(3x + 4) \cdot 2 - (5 - x) = 0$
71.  $(x - 3)(x + 3) = (x - 1)^2$
73.  $(x - 2)(x + 3) = (x + 5)(x - 1) - 4$
75.  $3x + 5[4(x - 2) + 28] = 79$
48.  $x - (4 - x) = 3(x - 1)$
50.  $10(x - 5) = 20$
52.  $-15(2 + 3x - 7) = -30$
54.  $7(5x + 12) - 7(9x + 1) = 7$
56.  $33(2x - 7) - 99(2 - x) = 66$
58.  $0.5x + 0.3x = 0.8$
60.  $0.02x + 0.4 = 2.4 - 0.03x$
62.  $0.02x - 0.05(2x + 3) = 1$
64.  $3x - 1.6 + (2x + 3) \cdot 4 = x + 4.4$
66.  $(4 - x) \cdot 2 - (3x - 1) \cdot 5 = x + 3$
68.  $3(x - 5) + 2(x - 1) \cdot 3 = 4x - 1$
70.  $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 4x + 7$
72.  $(2x + 1)(1 - x) = (1 - 2x)(x + 1)$
74.  $x + 5[2 + 3(x - 2)] = 4$
76.  $6 - 5[x + 3(x - 7)] = 1$
77.  $4[9 - (8 + x)] - [(x - 6)5 + 3x] + 2 = 0$
78.  $50 - 2[2(3 - 2x) - 5(x - 2)] + 3x = -3$
79.  $3x - [4(x - 2) - 3x]5 - 2(7x - 2) = 6x$
80.  $5 + 2[x - 3(x + 4) - 5] - 3[4x - 1 - 3(x + 3)] = 2x$
81.  $2x - 3[(x + 1)3 - 0.2] = 3.6 - [2(x + 3) - x]2$
82.  $5 - \{1 - 2[x - 3(x + 1)] + 5x\} = 3(3x - 1)$
83.  $2\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 3\left(\frac{x}{3} + 2\right) = 0$
84.  $5\left(x - \frac{2}{5}\right) - 4\left(\frac{x}{2} - 5\right) = 6$
85.  $4\left(\frac{x}{2} - 3\right) - 8 = 5(x - 4) - 3x$
86.  $5 - 6\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + 9x = -4$
87.  $5(3 - x) - 10\left(\frac{3x}{5} + \frac{1}{2}\right) = 2 - 11x$
88.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}$

89.  $\frac{x}{6} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

91.  $\frac{x}{4} - \frac{2x}{3} = 5$

93.  $\frac{2x}{9} - \frac{5}{6} + \frac{x}{2} = \frac{11}{18}$

95.  $\frac{x}{2} + \frac{x}{14} - 1\frac{1}{2} = \frac{3x}{7}$

97.  $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{8} + \frac{7}{12} = x + \frac{1}{24}$

99.  $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} - \frac{13}{30} = 8 - \frac{5x}{6}$

101.  $\frac{7x}{8} + \frac{3}{16} - \frac{5x}{12} + \frac{5}{6} + \frac{9x}{16} = 0$

103.  $\frac{2x}{17} - 1\frac{1}{2} + \frac{3x}{4} - x = \frac{5}{34} - \frac{9x}{68}$

105.  $-\frac{3x}{20} - 8\frac{3}{4} + \frac{5x}{12} = \frac{4x}{15} - \frac{11}{4}$

90.  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$

92.  $\frac{3x}{5} + \frac{x}{2} = \frac{2}{5} + x$

94.  $\frac{3x}{10} + 1 - \frac{x}{15} = \frac{x}{5}$

96.  $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x - 1\frac{2}{3} = \frac{5}{6}x$

98.  $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{28} - \frac{4}{21} = x + \frac{5}{14}$

100.  $\frac{3}{8}x - 1\frac{4}{5} + \frac{3}{10}x = \frac{17}{20} + 2x$

102.  $\frac{3x}{11} - \frac{23}{33} + \frac{5x}{22} + 1 = 2x + \frac{10}{33}$

104.  $\frac{9x}{13} - 5\frac{1}{26} + \frac{3x}{4} = \frac{19}{26}$

תשובות.

1. 4, 2.-5, 3.8, 4. 1, 5. 2, 6.5, 7. 2, 8. 6, 9. -5, 10. -8, 11.0.8,  
 12. 20, 13. 10, 14. 5, 15. -12, 16. -9, 17. 0, 18. 3, 19. -2, 20. 3,  
 21. 6, 22. 0.5, 23. 3, 24. -1, 25. 4, 26. 5, 27. 0, 28.  $\phi$ ,  
 29. אינסוף פתרונות, 30. -1, 31. 0.5, 32. 0, 33.  $\phi$ , 34. אינסוף פתרונות, 35. 1.5,  
 36.  $\phi$ , 37. -0.5, 38. כל מספר ממשי, 39. 3, 40. -4, 41. -2, 42. 0, 43.  $\phi$ ,  
 44. 2, 45. -3, 46. 1, 47. 1, 48. -1, 49.  $\phi$ , 50. 7, 51. 2, 52.  $2\frac{1}{3}$ , 53. -2,  
 54.  $2\frac{1}{2}$ , 55. -3, 56. 3, 57. -1, 58. 1, 59. 2, 60. 40, 61. 1,  
 62.  $-14\frac{3}{8}$  או -14.375, 63. 2, 64. -0.6, 65. -2, 66.  $\frac{2}{9}$ , 67.  $-8\frac{1}{3}$ ,  
 68. 4, 69.  $-1\frac{2}{3}$ , 70. 2, 71. 5, 72. 0, 73. 1, 74.  $1\frac{1}{2}$ , 75.  $-\frac{41}{23}$ ,  
 76. 5.5, 77. 3, 78. -1, 79. 2, 80.  $\frac{1}{9}$ , 81. 0, 82.  $\frac{1}{18}$ , 83. -2, 84. -4, 85.  
 כל מספר ממשי, 86. -3, 87.  $\phi$ , 88. 1, 89. -1, 90. 12, 91. -12,  
 92. 4, 93. 2, 94. -30, 95.  $10\frac{1}{2}$ , 96. -4, 97. 1, 98. -2, 99. 5.5,  
 100. -2, 101. -1, 102. 0, 103.  $\phi$ , 104. 4, 105.  $\phi$ .

ב. העזר בתכונות הפרופורציה כדי לפתור את המשוואות הבאות.

$$1. \frac{5}{x} = \frac{4}{5}$$

$$3. \frac{3x}{7} = \frac{5}{2}$$

$$5. \frac{3}{0.5x} = \frac{20}{x-7}$$

$$7. \frac{0.8}{5x-1} = 0.2$$

$$9. \frac{4x-3}{2x+1} = 7$$

$$11. \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+5}{x}$$

$$13. \frac{3-2x}{x+1} = \frac{6x-1}{1-3x}$$

$$2. \frac{3}{5x} = 2$$

$$4. \frac{2x}{3} = \frac{x-1}{4}$$

$$6. \frac{2x-1}{5} = \frac{3x+4}{3}$$

$$8. \frac{2x+3}{x-1} = 7$$

$$10. \frac{3x+2}{2x-3} = \frac{4}{7}$$

$$12. \frac{2x+1}{x+13} = \frac{2x}{x+10}$$

$$14. \frac{2x+3}{x+2} = \frac{4x-1}{2x-3}$$

תשובות:

1.  $6\frac{1}{4}$ , 2. 0.3, 3.  $5\frac{5}{6}$ , 4.  $-\frac{3}{5}$ , 5. -3, 6.  $-2\frac{5}{9}$ , 7. 1, 8. 2, 9. -1,  
10. -2, 11.  $-1\frac{2}{3}$ , 12. 2, 13.  $\frac{1}{4}$ , 14. -1.

ג. פתור את המשוואות הבאות:

$$1. \frac{x+1}{3} + \frac{x-5}{5} = 2$$

$$3. \frac{x-3}{4} - \frac{x+9}{6} = -2$$

$$5. \frac{4x-5}{9} - \frac{5x-4}{6} = -3$$

$$7. \frac{5x+18}{6} - \frac{5-6x}{5} = 2$$

$$9. \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+4}{21} = \frac{6-3x}{7}$$

$$11. \frac{3x-2}{3} - \frac{x+7}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{x-7}{6}$$

$$13. 1 - \frac{5x-4}{4} - \frac{2x+1}{2} = \frac{4x+1}{3}$$

$$15. \frac{3x+2}{2} - \frac{2(2x-5)}{3} = 9$$

$$2. \frac{4-x}{2} + \frac{x-3}{3} = 1$$

$$4. \frac{4x+3}{4} - \frac{2x-9}{5} = 3$$

$$6. \frac{5x-6}{6} - \frac{8x+2}{5} + 6 = 0$$

$$8. \frac{x+3}{12} - \frac{3-13x}{18} = x$$

$$10. \frac{3x-1}{4} - \frac{4-2x}{7} = \frac{5x-5}{-8}$$

$$12. \frac{2x-3}{12} - \frac{x}{2} = 2 - \frac{5x-6}{24}$$

$$14. \frac{12x+13}{2} + \frac{4x+1}{6} - \frac{11+8x}{9} = 4$$

$$16. \frac{5(x-3)}{6} - \frac{x+5}{5} = 2\frac{5}{6}$$

- $$17. \frac{3(x-1)}{5} - \frac{5(x+5)}{6} = 10\frac{2}{5}$$
- $$18. \frac{2(x-7)}{6} - \frac{7(x-1)}{8} = -4\frac{1}{6}$$
- $$19. \frac{5(x+1)}{4} - \frac{x+1}{2} - \frac{2(x-1)}{3} = -1\frac{1}{3}$$
- $$20. \frac{x+2}{4} - \frac{2(5x+14)}{5} = \frac{3(x+3)}{2} - 7$$
- $$21. \frac{5(x-1)}{4} + \frac{x-4}{5} - \frac{4(x-3)}{3} = 3$$
- $$22. \frac{2(x+2)}{5} - \frac{x-2}{4} - \frac{4(x-1)}{3} = 5$$
- $$23. \frac{x+3}{6} - 2(x-1) + \frac{3x-1}{3} = 1 - \frac{5x+1}{2}$$
- $$24. \frac{4(x-1)}{3} - 3(x+1) - \frac{x-1}{5} = \frac{-2}{5}$$
- $$25. \frac{3(7x+2)}{4} - 2(4x+3) + \frac{13(x+1)}{2} = -9\frac{1}{4}$$
- $$26. \frac{8(x+6)}{3} - \frac{7(x-1)}{4} = 15 - \frac{6(x+3)}{5}$$
- $$27. \frac{5(x+8)}{3} + \frac{x+5}{5} - 10 = \frac{7(x+1)}{4} - 2(x+4)$$
- $$28. 2(x+1) + \frac{2(2x+1)}{3} - \frac{3-x}{4} + 8 = 5x$$
- $$29. \frac{5}{6}(x+1) - 4(x+3) = \frac{1}{2}(x+9) - 10$$
- $$30. \frac{3}{5}(2x-1) - 3(x-4) - \frac{1}{8}(8-3x) = -1$$
- $$31. \frac{x+3}{4} - 4(x+4) = \frac{5x+2}{6} + 2\frac{3}{4}$$
- $$32. \frac{x-1}{3} - \frac{x+11}{2} = \frac{x-3}{4} - (x+1)$$
- $$33. \frac{5(x+1)}{2} - \frac{x+4}{6} - 7(x-1) = \frac{6-4x}{4}$$
- $$34. 3(x+2) - \frac{7(x+1)}{8} - \frac{x-5}{6} = 3\frac{1}{2}x - 1\frac{3}{4}$$

$$35. \frac{x}{2} + 5 + \frac{2(x-1)}{9} - \frac{5+x}{8} - \frac{x-4}{12} = \frac{3}{8}$$

$$36. 9\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{5}\right) - 6x = 3$$

$$37. 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) - 2(x-10) = 1$$

$$38. 2\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + \frac{x}{10} + 11 = 0$$

$$39. 5\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) - \frac{11}{6}(x-12) + 20 = 0$$

$$40. 5\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) - 1\frac{1}{2} - \frac{11(x-1)}{12} = 2x$$

$$41. \frac{11x-4}{6} - \left(11 - \frac{7x-4}{5}\right) = 10(2x-4.6)$$

$$42. \frac{x+7}{7} - 2\left(\frac{8x}{3} - 2\right) = x+5$$

$$43. 4 - 3\left(\frac{x+1}{2} - \frac{x-5}{3}\right) = 2x$$

$$44. 2x - 7 - x\left(\frac{2x-3}{2} - \frac{3x+1}{3}\right) = \frac{6-x}{6}$$

$$45. \frac{3(x-2)}{10} - \left[\frac{3(2x+1)}{20} - \frac{11(x+1)}{3} + 9\frac{1}{4}\right] = \frac{2x+1}{5}$$

$$46. \frac{8x-15}{21} - 2\left\{\frac{5-x}{7} - \left[x - \frac{2(2x-1)}{3}\right]\right\} = 0$$

$$47. \frac{11+15x}{10} = 2 - 3\left\{\frac{2x-1}{4} - \left[\frac{1}{5} + \frac{4(x-1)}{5}\right]\right\}$$

$$48. 1\frac{5}{6} - \left\{\frac{x-4}{3} - 5\left[\frac{x+5}{2} + \frac{2(x+1)}{3}\right]\right\} = 10 + \frac{5x+19}{4}$$

$$49. 2 + \frac{3x+5}{3} - \left\{\frac{3(x-3)}{5} - 2\left[\frac{3x-4}{3} - \frac{3x+7}{6}\right]\right\} = 0$$

$$50. 21 - \frac{1}{5}\left\{\frac{2x+1}{2} - 3\left[\frac{4x+22}{2} - 5(2x+9)\right]\right\} = 1 - \frac{4(5x+1)}{3}$$

$$51. \frac{4x+7}{3} - \left\{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x-2}{3} - \frac{3x-11}{2}\right] - 4\frac{1}{8}\right\} = 4\frac{1}{8}$$

$$52. \frac{1}{5}\left\{5 - \left[\frac{12x}{3} + 4(3x+2)\right]\right\} = 4 + 3\left[\frac{2x+5}{2} - 2(x+2)\right]$$

$$53. \frac{x+1}{x-3} + \frac{4}{x+2} = 1$$

$$54. \frac{x^2}{(x+5)(x-2)} + \frac{3}{x-2} - \frac{5}{x+5} = 1$$

$$55. \frac{3x^2}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} - 3 = \frac{2}{x-3}$$

$$56. \frac{2x-3}{x+3} + \frac{2(x-3)}{2x-3} = 3$$

$$57. \frac{3+2x}{2x-5} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{3x+1}{2x^2-7x+5}$$

$$58. \frac{2x-1}{6x+2} - \frac{2x+5}{9x-3} = \frac{x^2+7}{9x^2-1}$$

$$59. \frac{x-1}{2x+5} - \frac{x+2}{5-2x} = \frac{2x(2x+1)}{4x^2-25}$$

$$60. \frac{2x^2}{x^2-3x+2} = \frac{2x-5}{x-2} + \frac{9}{(x-2)(x-1)}$$

$$61. \frac{x(x+5)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+4}{x+1} - \frac{10}{x^2+4x+3}$$

תשובות:

1. 5, 2. 0, 3. 3, 4.  $\frac{3}{4}$ , 5. 8, 6. 6, 7. 0, 8.  $\frac{3}{7}$ , 9.  $1\frac{11}{18}$ , 10.  $\frac{27}{31}$ ,  
 11. 4, 12. -20, 13.  $\frac{14}{43}$ , 14.  $-\frac{1}{4}$ , 15. 28, 16. 10, 17. -65, 18. 5,  
 19. -33, 20.  $-\frac{4}{5}$ , 21. 9, 22. -2, 23. -1, 24. -2, 25. -3, 26. -3, 27. -5,  
 28. 7, 29.  $-1\frac{6}{11}$ , 30. 8, 31. -4, 32. 7, 33. 2, 34. 5, 35. -8, 36. 10,  
 37. 12, 38. -30, 39. -18, 40.  $\phi$ , 41. 2, 42. 0, 43. -1, 44. 2, 45. 2,  
 46.  $\phi$ , 47.  $-\frac{1}{4}$ , 48. -1, 49.  $-\frac{1}{3}$ , 50.  $-\frac{1}{2}$ , 51.  $-5\frac{1}{3}$ , 52.  $-\frac{1}{2}$ ,  
 53.  $\frac{1}{2}$ , 54. 7, 55. 8, 56.  $\frac{6}{7}$ , 57. -1, 58. -1, 59.  $\phi$ , 60.  $\phi$ , 61.  $\phi$ .

ד. פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת השוואת מקדמים.

$$1. \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x + 5y = 2 \\ x - 9y = -6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ -2x - 7y = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x + 6y = -23 \\ -5x + 6y = 47 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x + 8y = 4 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - y = -8 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -2x + 5y = -10 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4x + y = -22 \\ 5x - 6y = -13 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x + 7y = -11 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 7x + 15y = -1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -9x + 8y = 13 \\ 18x - 5y = -4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 11x - 12y = 7 \\ -7x + 3y = -6 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 6x - 10y = -14 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -4x + 9y = 5 \\ 8x - 18y = 4 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - 5y = -20 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -3x + y = 5 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 2x + 7y = 9 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x + 4y = 19 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x - 3y = -11 \\ 5x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x - y = -6 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ -x + 9y = 7 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 9x + 15y = -3 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} -4x + 5y = 1 \\ -16x + 23y = 10 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 5x + 25y = 10 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 13x - 7y = 33 \\ -5x - 21y = 11 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x - 2y = 15 \\ 14x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} -4x + 7y = -35 \\ 3x + 19y = 2 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 5x + 11y = -3 \\ -6x + 29y = 88 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 17x - 8y = 27 \\ -7x + 3y = -12 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 5x + 3y = -9 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 4x + 5y = -10 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ -5x + 9y = 29 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 23x - 7y = 12 \\ 17x - 5y = 8 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 8x - 9y = 13 \\ 12x + 6y = 26 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} -9x + 7y = 5 \\ 12x - 13y = -14 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} -17x + 35y = -7 \\ 19x - 21y = 13 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 18x - 23y = 8 \\ -24x + 29y = -9 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 33x + 26y = -7 \\ 22x + 25y = 3 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} -27x + 17y = -2 \\ -45x + 19y = -22 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} 41x - 42y = 1 \\ 29x - 35y = 6 \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} -53x + 24y = -17 \\ 43x + 18y = 70 \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} -45x + 35y = -1 \\ 54x - 42y = 2 \end{cases}$$

### תשובות

1. (1;4), 2. (3;1), 3.  $(11\frac{1}{4}; -3\frac{1}{2})$ , 4. (3;0), 5. (-7;2), 6. (-1;1), 7. (-2;2),  
 8. (0;-2), 9. (-5;-2), 10. (-2;-1), 11.  $(\frac{1}{8}; -\frac{1}{8})$ , 12.  $(\frac{1}{3}; 2)$ , 13.  $(1; \frac{1}{3})$ ,  
 14. אינסוף פתרונות, 15.  $\phi$ , 16. (-5;3), 17. (-1;2), 18. (1;1),  
 19.  $\phi$ , 20. (3;1), 21. (-2;3), 22. (-3;0), 23. (2;1), 24. (3;-2),  
 25.  $(2\frac{1}{4}; 2)$ , 26. (-3;1), 27. (2;-1), 28. (1;-5), 29. (7;-1), 30. (-5;2),  
 31. (3;3), 32. (-3;2), 33. (0;-2), 34. (-4;1), 35. (-1;-5),

36.  $(2; \frac{1}{3})$ , 37.  $(1;2)$ , 38.  $(1; \frac{4}{7})$ , 39.  $(-\frac{2}{6}; -1)$ , 40.  $(-1;1)$ , 41.  $(1\frac{1}{3}; 2)$ ,  
 42.  $(-1; -1)$ , 43.  $(1; 1.5)$ , 44.  $\emptyset$

ה. פתור בשיטת ההצבה.

$$45. \begin{cases} x = 3y + 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} y = 5x + 10 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} y = 3x - 7 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} 7x = 4 - y \\ y = -3 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} -5x = 8y + 10 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} x = -4 \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 4x - \frac{y}{2} = -1 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} -4x + 5y + 11 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 4x - 3y = 18 \\ 3x - 5 = 4 \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 3y - x + 2 = 0 \\ 2y + 9 = 5 \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} 2x + 6y = -4 \\ 3x + 2 = 2x + 3 \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} 7y - 3x = 2 \\ 2x - 7 = 5 - x \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} -x + 5y - 2 = 0 \\ 8y + 5 - y = y + 11 \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} 3y - 1 = 2 - y - 3 \\ 4x - 5y = -8 \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} 13x - 4y = 7 \\ 2(x - 1) + x = 7 \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} 5x - 11y + 8 = 0 \\ 3y - 4(5 - y) = 4 - y \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} 11x - 3y + 7 = 0 \\ 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} 2x - 5y + 12 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} 3y + 2x = -18 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} 5x - 4y - 1 = 0 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} -5x + 3y = -5 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ x = \frac{y}{2} - 3 \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x = y - 1 \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} 4x - 19y = 7 \\ 19y = 6x - 1 \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = -x \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} y = \frac{3x}{2} - 1 \\ y = 5x - \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ -x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} 5x - 7y = -13 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} y - x = 5 \\ 4x - 3y = -13 \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 7y = 17 \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} -2y + 5x = -13 \\ y = -4x \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} -3y + 5x = 2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ y = 2 - 1\frac{1}{3}x \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} 5x + 17y = 2 \\ 17y = 5 - 4x \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} -14x - 3y = 10 \\ 3y - 4 = 14x \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} y = 3 - 5x \\ y = 4x - 15 \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} x = \frac{2}{3} - y \\ x = \frac{7}{3} - y \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} 5x - 4y = 4 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ 7x - y = 30 \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} -5x + y + 7 = 0 \\ 2y + 14 = 10x \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} 3x - 5y = -8 \\ 7y - 4x = 11 \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} 15x - 13y = 11 \\ 6x - 7y = 8 \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} 10x + 13y = 9 \\ 11y + 15x = 5 \end{cases}$$

תשובות:

45. (8;2), 46. (-2;0), 47. (0;-7), 48. (1;-3), 49. (-2;0), 50. (-4;-3), 51. (-1;-6),  
 52.  $(-\frac{1}{3};0)$ , 53. (2;-1), 54.  $(\frac{3}{2};-1)$ , 55. (3;-2), 56. (-4;-2), 57. (1;-1),  
 58. (4;2), 59. (3;1), 60. (-2;0), 61. (3;8), 62. (5;3), 63.  $(-1; -\frac{4}{3})$ , 64. (4;4),  
 65. (-6;-2), 66. (-1;4), 67. (-7;-9), 68. (1;1), 69. (1;0), 70. (2;-1), 71. (-4.5;-3)  
 72. (1.5;0), 73.  $(\frac{1}{2};2)$ , 74. (-3;1), 75. (-3;-1), 76.  $(-\frac{1}{2};-1)$ , 77. (1;-1),  
 78. (2;-7), 79.  $(-\frac{1}{3}; -1\frac{1}{2})$ , 80. (אין פתרון), 81. (1;4), 82. (4;4), 83. (3;4),  
 84. (4;-2), 85. (2;7), 86. (אינסוף זוגות מספרים), 87. (2;-1), 88. (-1;1),  
 89. (-1;-2), 90.  $(-\frac{4}{5};1)$ .

א. פתור את מערכות המשוואות הבאות, בשיטה הנוחה לך ביותר:

$$1. \begin{cases} 8x - 5y = 30 \\ 6x - 11y = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x - 3y = 25 \\ 4x + 7y = 23 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x - 8y = -47 \\ 5x + 10y = 25 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 8x - 7y = 10 \\ 6x - y = 16 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 8 - 11x = 9y - 7 \\ 4x - 5y = 22 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 7y = 15 - 8x \\ -15x - 7y = 2y - 30 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 10 - 2x \\ 7x + 7y = 2 - 2x - y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5x - 2y - 10 = 9 \\ 5x - 22 = 6y - 3x \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 5x + 4y = y - 2x + 6 \\ 4x + 3y - 5 = y - x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + 7 + 5y = 2y + 9 \\ 5x + 4 - 8y = 6 - x \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 7x - 5y + 7 = 3x + 4 - y \\ 3x - 2y + 2 = x + y \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 5x - 4 + 4y = 3x - 2y \\ x + 3y - 5 = 1 - 2x - 6y \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x - 7y + 4 = y - 2x + 1 \\ 5y + 1 - x = 4y + 4x + 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + 2(y - 5) = 3 \\ 4(x - 3) + y = 5 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 5(x - y - 2) = 9 - x \\ 5(4 - x) + 7y = 3(x - 1) \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 4(x - 1) + 2y = 8 - 4y \\ 2(x - 5) - 2(y + 6) = 13 - x \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 7(x + 4) + 4(y - 5) = 13 \\ 5(x + 3) + 2y = 4(y + 1) \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2(x - 3) + 7(x - y + 2) = 5 \\ 3(6x + 5) - 2(7y + 1) = 7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} xy + 5(y - 2) - x(y + 3) = 10 \\ (x - 1)(y + 1) - xy = -3 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} (x + 6)(y - 5) - xy = 0 \\ (x - 2)(y + 5) = xy \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} (1 - x)(6 - y) = xy \\ (2 - x)(6 - y) = xy \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} (2x + 1)(y - 1) = 2xy \\ (x + 7)(y - 6) = xy - 3 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 5 \\ y = 6 - 2x \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 11 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 1 + 2(5x + 6y) = y - 2x \\ 5(2x + 1) + 13y = -8x \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 8(x - 2) + 5(y + 1) = 10 \\ 6(x - 1) - 2y = 5 - y \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2(x + 3) + 5(y + 2) = 4x - y \\ 4(x - 1) - 10 = 3(y + 3) \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2(x - y) + 4y = 5 \\ x + 3(x + y) = 4 - y \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} (x + 2)(y + 1) - xy = 25 \\ (x - 5)(y + 2) = xy \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy \\ (x + 6)(y - 2) = xy \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} (x + 1)(2y - 4) = 2xy \\ (x - 1)(y + 4) = xy \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} (x - 3)(y - 2) = xy \\ (x + 2)(y + 3) = (x + 3)(y + 6) \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 1 \\ x = 2y + 11 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 2\frac{1}{2} \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} \frac{2x}{15} - \frac{y}{6} = -1 \\ \frac{x}{5} + \frac{3y}{2} = 2 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} \frac{3x}{7} - \frac{2y}{3} = -7 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = -5 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = -4 \\ \frac{5x}{8} + \frac{y}{12} = 6 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} \frac{2x}{9} + \frac{7y}{12} = \frac{y}{6} - 1 \\ x - \frac{y}{4} = 24 - \frac{x}{6} \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} \frac{4x}{5} - \frac{3y}{7} = \frac{x}{5} - 12 \\ \frac{7x}{10} + \frac{3y}{14} = 3 - \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{3y}{4} + \frac{5x}{6} = 2 - \frac{y}{2} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} \frac{3x}{5} - \frac{x}{6} - y = 3\frac{5}{6} - \frac{y}{5} \\ x = 2y + 9 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 - \frac{y}{4} = 3 - \frac{3x}{4} \\ x = 3y - x - 2 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} \frac{x+3}{4} - \frac{y+5}{3} = -3 \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y-10}{5} = 1 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} \frac{x+10}{5} - \frac{y+8}{6} = 2 \\ \frac{x+6}{4} - \frac{y+2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} \frac{x+3}{6} + \frac{y+8}{5} = 6 \\ \frac{x-3}{3} + \frac{y-4}{4} = 4 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} \frac{x+4}{3} + \frac{y-2}{4} = 4 \\ \frac{x-5}{5} + \frac{y+2}{4} = 2 \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} \frac{x-5}{3} - \frac{y+4}{5} = \frac{y+2}{4} - 2 \\ 8 - \frac{x-8}{3} = \frac{y+2}{2} + 3 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} \frac{x+5}{3} - \frac{y-4}{4} = 7 - y \\ \frac{x+1}{4} - x + \frac{y+2}{5} = 6 \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} \frac{3x-2}{4} - \frac{y-2}{2} = 7 - (x+y) \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y+3}{3} = 4 - y \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} \frac{2x+7}{3} + \frac{y+4}{5} = 6 + \frac{x}{3} \\ \frac{x+5}{5} - \frac{5y-6}{4} = 2 - y \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} \frac{y+1}{4} - \frac{x-y}{5} - x = 4 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-6}{3} = \frac{y+2}{5} \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} \frac{4x+1}{5} - \frac{y-2}{3} = \frac{y+6}{8} - 1 \\ \frac{y+1}{3} - \frac{3x+7}{5} = x - \frac{y-2}{6} \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} \frac{x+5}{3} - \frac{3(y-2)}{4} = 2 \\ \frac{x-1}{5} + \frac{3(y+6)}{4} = 6 \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} \frac{2x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = x - 3 \\ \frac{x+5y}{3} - \frac{2(3y-1)}{5} = y + 1 \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} \frac{3x-10y+5}{9} = \frac{5x-3y+9}{2} \\ \frac{4x-5y+8}{10y-7x+3} = \frac{5}{7} \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} \frac{2x+5y+3}{3} = \frac{4x-7y+8}{4} \\ \frac{5x-y+3}{6} + 1 = \frac{x+4y-2}{5} \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} \frac{x+3}{8} + \frac{y+4}{2} - \frac{2x+y}{5} = 2\frac{3}{5} \\ \frac{x+3}{3} + \frac{y+2}{5} - \frac{x-5}{4} = 2 \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} 3 - \frac{x}{2} + \frac{y+20}{6} = \frac{x+y}{3} - \frac{y+1}{5} \\ \frac{2x+5}{7} - \frac{4y-1}{3} = \frac{5x-28}{6} - \frac{3y+8}{5} \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} \frac{x+7}{5} + \frac{x-y}{2} + \frac{y}{6} = 2\frac{1}{2} \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{5} + 3(y-x) = 1\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} \frac{x-1}{4} - \frac{4y+5}{2} = \frac{5-2x}{3} \\ \frac{x-5y}{2} - \frac{3(2y+3)}{5} - \frac{(y-x)}{6} = -1 \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} \frac{y+3}{3} - \frac{5-x}{6} = \frac{2-y}{8} - 3 \\ y - \frac{2(x-4)}{5} = -x + \frac{5(y+2)}{4} \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} \frac{x+5}{6} + \frac{y-2}{2} + 2(x+y) = 8 - \frac{x+2}{3} \\ \frac{x-1}{6} - \frac{2(y+3)}{5} + 9 = 2x + \frac{5(x+y)}{3} \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} 11 + \frac{3(x-1)}{5} = \frac{y-1}{3} - \frac{7(x-4)}{8} \\ 5 - \frac{2(x+4)}{5} + \frac{y+5}{3} = 7 - \frac{y-8}{4} \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} x+1 = 2 - \frac{x-2y}{2} \\ \frac{2(x-4)}{5} = \frac{3y-7}{4} - 2 \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} \frac{x+5}{4} - (y+1) = \frac{x-2}{2} \\ \frac{3(x+1)}{2} = 3(y+1) - \frac{1+5x}{2} \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} \frac{x+y+2}{4} + x = \frac{x+4}{8} + y \\ \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{6} = \frac{y+3}{3} \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} y-2 + \frac{2x}{5} = x+1 - \frac{4x-3y}{4} \\ x-2 - \frac{11+9x}{14} = y - \frac{3x+5y}{7} \end{cases}$$

$$72^* \begin{cases} \frac{x+1}{3} - 6 = \frac{y+3}{2} - \frac{2(x+y)}{3} - \frac{3-x+y}{5} \\ \frac{5x}{6} - \frac{2(y-x-6)}{3} - \frac{6(x-y)}{4} = y - \frac{x-12}{6} \end{cases}$$

$$73^* \begin{cases} 6 - \frac{x+1}{5} = \frac{3(y-1)}{2} - \frac{4(x-2y)}{5} - \frac{7x+3y+3}{6} \\ \frac{5(x+2y)}{4} - \frac{3x-7y+3}{6} - 2 = \frac{3(y+3)}{4} - \frac{4(x-3y)}{9} \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} \frac{3x+5(y+1)}{4} - \frac{x+y}{3} = \frac{4y-3x}{6} + 2 \\ \frac{7y-5}{4} + \frac{2y-3}{3} = 2x + \frac{7y+x+4}{5} \end{cases}$$

תשובות:

1. (5,2), 2. (4,1), 3. (-3,4), 4. (3,2), 5. (3,-2), 6. (5,-5), 7. (2,-2), 8. (5,3),  
 9. (3,-5), 10.  $(\frac{11}{21}, \frac{1}{7})$ , 11.  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ , 12. אינסוף פתרונות, 13.  $(-\frac{3}{5}, 0)$ ,  
 14. (3,5), 15. (9,7), 16. (-1,1), 17. (9,-4), 18. (2,1), 19. (-1,3), 20. (5,-1),  
 21. אינסוף פתרונות, 22.  $\phi$ , 23. (5,7), 24. (15,4), 25. (6,10), 26. (6,4),  
 27. (0,6), 28. (3,8), 29. (4,9), 30. (-6,6), 31. (8,1), 32. (6,-6), 33. (9,-12),  
 34.  $(13\frac{6}{13}, 1\frac{3}{13})$ , 35. (20,12), 36. (15,10), 37. (8,0), 38. (12,-2), 39. (-5,2),  
 40. (-7,6), 41. (8,12), 42. (18,-12), 43. (-10,14), 44. (6,-4), 45. (7,-1), 46. (2,2),  
 47. (5,10), 48. (10,4), 49. (9,12), 50. (5,6), 51. (11,6), 52. (-5,8), 53. (2,6),  
 54. (5,6), 55. (-2,3), 56. (-0.25,2), 57. (1,2), 58. (5,2), 59. (-2,-1), 60. (-3,0),

61. (-3,-2), 62. (8,4), 63. (3,3), 64. (7,1), 65. (-1,-6), 66. (1,2), 67. (-4,4),  
 68. (4,5), 69. (1,1), 70. (12,18), 71. (5,4), 72.  $(1\frac{6}{7}, 13\frac{6}{7})$ , 73. (0,3), 74. (0,3).

ז. העזר בהצבות מתאימות לפתרון המערכות הבאות :

$$1. \begin{cases} 3x + 2xy = 18 \\ 5x - 3xy = -8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2y - 5xy = 21 \\ 4y - 7xy = 29 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - \frac{x}{y} = 6 \\ 3x + \frac{2x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{5}{x} - 2y = -8 \\ \frac{15}{x} + 4y = 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + \frac{4}{y} = 4 \\ 5x - \frac{6}{y} = 13 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{28}{x} + \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{18}{y} = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{9}{y} = 23 \\ \frac{3}{y} = \frac{5}{x} + 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{9}{x+3} + \frac{6}{2y-1} = 2 \\ \frac{18}{x+3} - \frac{30}{2y-1} = -3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{8}{x+y} + \frac{8}{x-y} = 2 \\ \frac{14}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -6 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 7 \\ \frac{4}{x+y} + \frac{1}{y-x} = 5 \end{cases}$$

### תשובות

1. (2,3), 2.  $(13, -\frac{1}{3})$ , 3. (2,-1), 4.  $(-2\frac{1}{2}, 3)$ , 5. (2,-2), 6.  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , 7. (48,24),  
 8. (6,9), 9.  $(\frac{5}{4}, \frac{3}{5})$ , 10. (6,3.5), 11. (-1,-3), 12.  $(\frac{5}{12}, \frac{1}{12})$ .

ח. פתור את מערכות המשוואות :

$$1. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -5 \\ 5x + 4y + 2z = 20 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = 3x - 2 \\ z = 5 - x \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 9 \\ 4x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y - 2x = 2z + 1 \\ 3x - 4y + 5 = 3z \\ -2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 3y = -10 \\ 3x + 4z = -3 \\ 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} - \frac{z}{9} = 5 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 4 \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} - \frac{4z}{9} = 5 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y-1}{5} + \frac{z-3}{2} = 3 \\ \frac{x+5}{6} + \frac{y+4}{6} - \frac{z+2}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = \frac{2z}{7} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x - 3y - z = 10 \\ -5x + 4y + 4z = -2 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 5y + z = 16 \\ 3x - 4y - 2z = -13 \\ z = 2x + y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 7x - 3y + 2z = -5 \\ -5x + 4y - 2z = 9 \\ 3x + 5y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4x - 5y + 3z = 12 \\ 3x + 2z = 2y + 5 \\ 4 - 3y - 7z = 4x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = 3y + 2z \\ y = 2x + z \\ z = x + y - 3 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{6} - \frac{z}{5} = 2 \\ \frac{3x}{4} - \frac{5y}{3} + \frac{z}{2} = -4 \\ \frac{5x}{8} + \frac{5y}{6} - \frac{3z}{5} = 3 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{x+y}{5} - \frac{z-1}{2} - \frac{x-1}{3} = -1 \\ \frac{x+z}{3} - \frac{y}{2} = \frac{z-5}{4} \\ \frac{x-4}{8} + \frac{y}{6} + \frac{z+7}{12} = 2 \end{cases}$$

תשובות:

1. (2,1,3), 2. (2,1,1), 3. (0,-2,5), 4. (1,2,4), 5. (2,1,2), 6. (1,2,-3),  
7. (-2,-1,1), 8. (-1,-2,2), 9. (-5,0,3), 10. (1,1,-1), 11. (12,15,18),  
12. (8,12,20), 13.(4,6,7), 14. (4,6,5).

## פרק ו': אי-שוויון ממעלה ראשונה

בסעיף זה נעסוק בקבוצה השנייה של תבניות פסוק - אי-שוויונים. בקבוצה זו כלולות, כאמור האפשרויות

$$A > B \quad (A \text{ גדול מ-} B)$$

$$A < B \quad (A \text{ קטן מ-} B)$$

$$A \geq B \quad (A \text{ גדול מ-} B \text{ או שווה לו, בקיצור "גדול או שווה"})$$

$$A \leq B \quad (A \text{ קטן מ-} B \text{ או שווה לו, ובקיצור "קטן או שווה").}$$

### 1. תכונות אי-השוויון

\* אם מוסיפים (או מחסרים) אותו מספר לשני אגפי אי-שוויון מתקבל אי-שוויון, בעל אותו סימן אי-שוויון.

$$A > B \quad \text{כלומר, אם}$$

$$A + C > B + C \quad \text{אז}$$

$$A - C > B - C \quad \text{וגם}$$

למשל: אי השויון הבא הוא פסוק אמת

$$7 > 4 \quad \text{הוספת 5 יוצרת פסוק אמת}$$

$$7 + 5 > 4 + 5$$

$$12 > 9 \quad \text{ואמנם}$$

$$5 > 2 \quad \text{וגם} \quad 7 - 2 > 4 - 2 \quad \text{או}$$

\* אם מכפילים או מחלקים את שני אגפיו של אי-שוויון באותו מספר חיובי, מתקבל אי-שוויון, בעל אותו סימן אי-שוויון.

$$C > 0 \text{ ו-} A > B \quad \text{כלומר, אם}$$

$$\text{וגם } A \cdot C > B \cdot C \quad \text{אז}$$

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$$

למשל: יודעים כי

$$2 > 0 \text{ ו-} 2 < 4 \quad \text{לכן נכון גם}$$

$$1 < 2 \quad \text{או} \quad 2 \cdot 2 < 4 \cdot 2$$

\* אם מכפילים או מחלקים את שני אגפיו של אי-שוויון באותו מספר שלילי, מתקבל אי-שוויון בעל סימן אי-שוויון הפוך.

$$C < 0 \text{ ו-} A > B \quad \text{כלומר, אם}$$

$$A \cdot C < B \cdot C \quad \text{אז}$$

וכן

וכן

$$\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$$

$$-2 < 0 \quad \text{ו-} \quad 6 > 2$$

למשל: יודעים כי

$$6 \cdot (-2) < 2 \cdot (-2)$$

לכן

$$-12 < -4$$

או

$$\frac{6}{-2} < \frac{2}{-2}$$

וגם

$$-3 < -1$$

או

\* אין להכפיל או לחלק את שני אגפיו של אי-שוויון באפס.

## 2. פתרון של אי-שוויון

"**לפתור אי-שוויון**" פרושו למצוא את קבוצת כל הערכים שכאשר מציבים אותם במקום המשתנה הם מאמתים את אי-השוויון.

למשל באי-שוויון:  $x + 1 < 3$

המספרים: 1.5, 1, 0, -4 מאמתים את אי-השוויון, ולכן הם נמצאים בקבוצת הפתרון שלו; ואילו המספרים: 5, 6.2, 10 אינם מהווים פתרון.

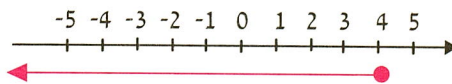
אפשר להראות שכל המספרים הקטנים מ-2 מאמתים את אי-השוויון.

להבדיל ממשוואה ממעלה ראשונה, שלה - פתרון יחיד (אם בכלל) לאי-שוויון ממעלה ראשונה יתכן מספר אינסופי של פתרונות.

אי-שוויונים נקראים **שקולים** אם יש להם אותה קבוצת פתרון.

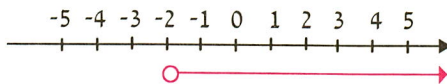
פתרונות של אי-שוויון נהוג לסמן על ציר המספרים (סימון זה מועיל בעיקר בפתרון מערכת אי-שוויונים).

נציג את הפתרונות של אי-השוויון  $x \leq 4$ : על ציר המספרים נסמן את המספר 4. העיגול המלא מעיד על כך שהמספר 4 כלול בפתרון, והחץ מראה שכל המספרים בכיוון זה כלולים בפתרון.



אפשר לרשום את הפתרון  $x \leq 4$  גם בצורה  $(-\infty, 4]$ , כאשר הסוגריים המרובעים מימין למספר 4 מציינים שמספר זה כלול בפתרון, והסמל  $-\infty$  (מינוס אינסוף) מעיד על כך שהפתרון אינו מוגבל בצד השמאלי.

את הפתרונות של אי-השוויון  $x > -2$ : על ציר המספרים נסמן את המספר -2, כאשר העיגול הריק מעיד על כך שהערך -2 אינו כלול בפתרון, והחץ מעיד על כך שכל המספרים באותו כיוון כלולים בפתרון.



(החץ על ציר המספרים מעיד על כך שכיוון הגידול של המספרים הוא ימינה).

אפשר לרשום את הפתרון  $x > -2$  גם בצורה  $(-2, \infty)$ , כאשר הסוגריים העגולים מציינים שהמספר -2 אינו כלול בפתרון והסמל  $\infty$  (אינסוף) מעיד על כך שהפתרון אינו מוגבל בכיוון הימני.

פתרון של אי-שוויון מתקבל בתהליך דומה לזה של פתרון משוואה, תוך מעבר לאי-שוויונים שקולים. בתהליך זה נעזרים בתכונות האי-שוויון.

## דוגמאות

1.  $x - 4 > 3$

$$x - 4 + 4 > 3 + 4$$

$$x > 7$$

נוסיף 4 לשני האגפים

או  $(7, \infty)$

2.  $3x - 1 < x + 5$

$$3x - x < 5 + 1$$

$$2x < 6 \quad /:2$$

$$x < 3 \quad \text{או } (3, \infty)$$

אפשר לבצע את פעולות החיבור והחיסור לשני האגפים באופן סמוי, כפי שעשינו בפתרון משוואות: חילוק במספר חיובי אינו משנה את הסימן <

3.  $2x - 3 \leq 5x + 6$

$$2x - 5x \leq 6 + 3$$

$$-3x \leq 9 \quad /:(-3) \quad \geq - \leq \text{ את הסימן } \geq - \leq$$

$$x \geq -3 \quad \text{או } [-3, \infty)$$

והפתרון הוא:

4.  $2x - 5 < x - (1 - x)$

$$2x - 5 < x - 1 + x$$

$$2x - 5 < 2x - 1$$

$$2x - 2x < -1 + 5$$

$$0 < 4$$

התוצאה שהתקבלה היא פסוק אמת, ללא תלות בערך שמציבים במקום  $x$ , כלומר כל ערך של  $x$  מהווה פתרון.

כותבים  $-\infty < x < \infty$  (קרא:  $x$  נע מ- $(-)$  אינסוף עד אינסוף).

5.  $3x + 2 > 3(x + 1)$

$$3x + 2 > 3x + 3$$

$$3x - 3x > 3 - 2$$

$$0 > 1$$

התוצאה שהתקבלה היא פסוק שקר. כלומר לא קיים ערך של  $x$  שיאמת את השוויון. כותבים:  $x = \emptyset$  (קרא:  $x$  קבוצה ריקה) שמשמעותו - אין פתרון.

### 3. מערכת אי-שוויונים

#### 3.1 חיתוך ואיחוד של קבוצות

**חיתוך** של שתי קבוצות מספרים זו קבוצת המספרים המכילה את המספרים הנמצאים גם בקבוצה אחת וגם בקבוצה השנייה. סמלו  $\cap$ . למשל, החיתוך של שתי קבוצות המספרים:  $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$  ו-  $B = \{3, 4, 8, 9\}$  הוא:  $A \cap B = \{1, 2, 3, 7, 9\} \cap \{3, 4, 8, 9\} = \{3, 9\}$  אם לשתי קבוצות אין שום מספר משותף, אומרים שהחיתוך שלהן הוא קבוצה ריקה -  $\emptyset$  והקבוצות הן **זרות**. למשל:  $\{1, 2, 5, 6, 7\} \cap \{3, 4, 8, 9\} = \emptyset$  **איחוד** של שתי קבוצות מספרים זוהי קבוצת כל המספרים הנמצאים בקבוצה אחת או בקבוצה השנייה. סמלו  $\cup$ . למשל, האיחוד של שתי קבוצות המספרים:  $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$  ו-  $B = \{3, 4, 8, 9\}$  הוא:  $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 9\} \cup \{3, 4, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

#### 3.2 סוגים של מערכות אי-שוויונים

להבדיל ממערכת משוואות, שמספר המשוואות הכלולות בה כמספר הנעלמים, במערכת אי-שוויונים יכול להופיע משתנה אחד בלבד.

- קיימים שני סוגים של מערכת אי-שוויונים:
- מערכת "וגם"**, שפתרונה הוא חיתוך של קבוצות הפתרון של כל אחד מאי-השוויונים.
  - מערכת "או"**, שפתרונה הוא איחוד של קבוצות הפתרון של כל אחד מאי-השוויונים שבמערכת.

#### 3.3 מערכת "וגם"

כאמור בהתרת מערכת מסוג זה מחפשים קבוצת מספרים, שמאמתת גם את אי-השוויון הראשון וגם את אי-השוויון השני (או יותר).



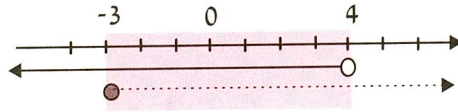
מעוניינים בפתרון למערכת שני אי-השוויונים  $x + 2 < 6$  ו-  $x + 3 \geq 0$ . רושמים זאת

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x + 2 < 6 \end{cases} \text{ וגם} \quad \text{בצורה:} \quad x + 2 < 6 \cap x + 3 \geq 0 \quad \text{או בצורה:} \quad \text{וגם}$$

כדי למצוא את פתרון המערכת הנ"ל, פותרים את שני אי-השוויונים במקביל:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 4 \end{cases} \text{ וגם}$$

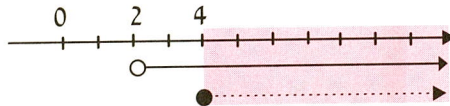
כדי למצוא את הפתרון המשותף, משרטטים את שתי קבוצות הפתרון על ציר המספרים:



הפתרון המשותף נמצא בקטע של ציר המספרים ש"מכוסה" גם ע"י הקו המרוסק (פתרון אי-שוויון הראשון) וגם ע"י הקו הרצוף (פתרון אי השוויון השני). לפיכך, פתרון המערכת נמצא בין -3 ל-4. נהוג לכתוב אותו בצורה:  $\{ x \mid -3 \leq x < 4 \}$  (קרי: כל ערכי  $x$  הנמצאים בין -3 ל-4, כולל -3, או בצורה:  $[-3, 4)$ .)

### דוגמה ב'

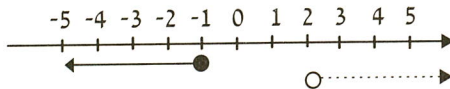
$$\begin{cases} 3x - 1 \geq 11 \\ x + 1 > 3 \end{cases} \text{ וגם} \Rightarrow \begin{cases} 3x \geq 12 \\ x > 2 \end{cases} \text{ וגם} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x > 2 \end{cases}$$



הפתרון המשותף:  $x \geq 4$

### דוגמה ג'

$$\begin{cases} -2x + 1 \geq 3 \\ x + 6 < 4x \end{cases} \text{ וגם} \Rightarrow \begin{cases} -2x \geq 2 \quad /: (-2) \\ -3x < -6 \quad /: (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 2 \end{cases}$$



אין למערכת זו פתרון משותף, כלומר הפתרון הוא קבוצה ריקה -  $\emptyset$ .

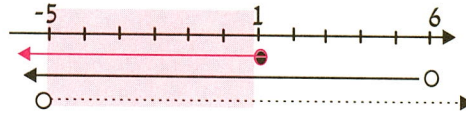
### דוגמה ד'

במידה והמערכת מכילה שלושה אי-שוויונים (או יותר) נוהגים באותה השיטה ומחפשים על ציר המספרים את הקטע המשותף לשלוש הקרניים המתאימות לכל אחד מאי-שוויונים.

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x < 6 \\ x > -5 \end{cases}$$

למשל, פתרון המערכת:

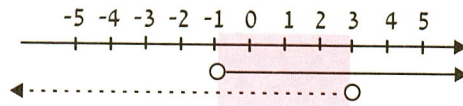
הפתרון המתקבל בעזרת ציר המספרים הוא:  $-5 < x \leq 1$ .



### דוגמה ה'

אי-שוויון מהסוג  $1 < x + 2 < 5$  הוא אי-שוויון מחובר, או אי-שוויון כפול. למעשה זו כתיבה מקוצרת למערכת אי-השוויונים:

$$\begin{cases} x + 2 > 1 \\ x + 2 < 5 \end{cases} \text{ וגם} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases} \text{ וגם}$$



פתרונה:  $-1 < x < 3$

### 3.4 מערכת "או"

כאמור, זו מערכת, שהפתרון שלה הוא איחוד הפתרונות של כל אחד מאי-השוויונים שבמערכת.

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases} \text{ או } x > 1 \cup x < -3 \text{ : למשל, או בצורה אחרת:}$$

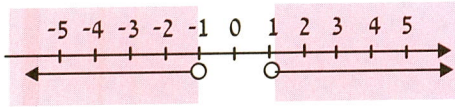
### הערה

למעשה, מספיק לרשום את הסוגריים [ או את המילה או, אך אנו רושמים את שניהם כדי למנוע בלבול. מאותה סיבה אנו רושמים את שני הסממנים של מערכת "וגם", למרות שמספיק לרשום את הסוגריים { או את המילה וגם.

### דוגמה א'

$$\begin{cases} x + 5 > 6 \\ x + 2 < 1 \end{cases} \text{ או} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \text{ או}$$

נציג את הפתרון של כל אי-שוויון על ציר המספרים:

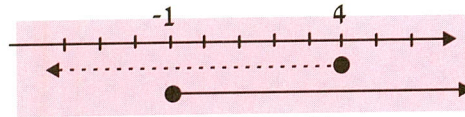


הערכים שנמצאים לפחות באחת משתי קבוצות הפתרון הם:

$$\{x \mid x < -1 \text{ או } x > 1\}$$

### דוגמה ב'

$$\begin{cases} x - 3 \leq 5 - x \\ 3x + 4 \geq 1 \end{cases} \text{ או } \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 8 \\ 3x \geq -3 \end{cases} \text{ או } \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \text{ או}$$



הפתרון נמצא באותו חלק של ציר המספרים שלידו עוברת לפחות קרן אחת.

$$\text{הפתרון הוא כל } x \in \{x \mid -\infty < x < \infty\}.$$

הסבר:

הערכים  $x \leq 4$  נמצאים רק בקבוצת הפתרון של אי-השוויון הראשון.

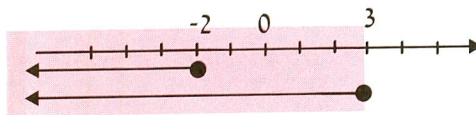
הערכים  $x \geq -1$  נמצאים רק בקבוצת הפתרון של אי-השוויון השני.

הערכים  $-1 \leq x \leq 4$  נמצאים בשתי קבוצות הפתרון.

לפיכך, הפתרון של "לפחות אחד מהם" מכיל את שלושת החלקים הנ"ל, ושלושה חלקים אלו מהווים ביחד את קבוצת כל המספרים הממשיים.

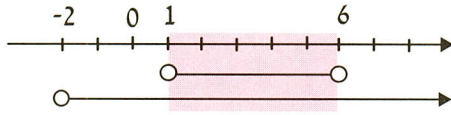
### דוגמה ג'

$$\begin{cases} 4x + 1 < 2x - 3 \\ 3x - 7 \leq 2 \end{cases} \text{ או } \Rightarrow \begin{cases} 2x < -4 \\ 3x \leq 9 \end{cases} \text{ או } \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \leq 3 \end{cases} \text{ או}$$



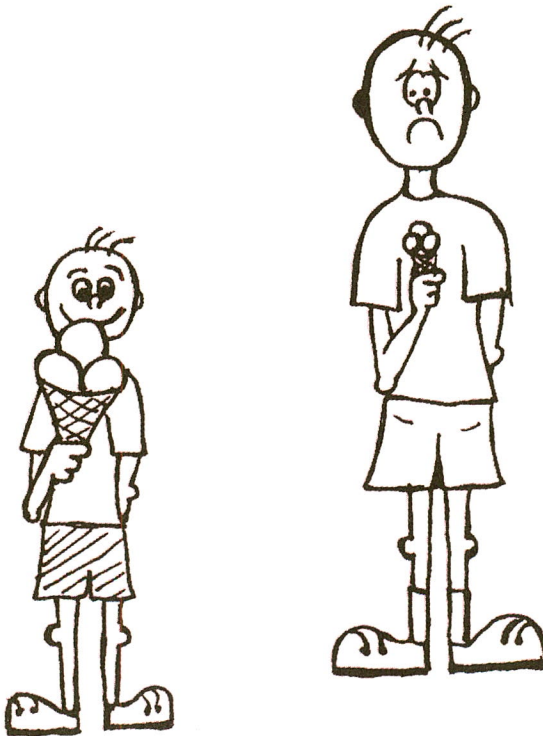
הפתרון  $x \leq 3$  מכיל את הפתרון  $x < -2$ , ולכן הפתרון של מערכת זו הוא:  $x \leq 3$ .

$$\left[ \begin{array}{l} 1 < x < 6 \\ \frac{x}{-2} < 1 \end{array} \right. \text{ או } \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} 1 < x < 6 \\ x > -2 \end{array} \right. \text{ או}$$



הפתרון הנמצא או בקבוצה  $1 < x < 6$  או בקבוצה  $x > -2$  הוא  $x > -2$ .

מהו סימן אי-השוויון המתאים בין השניים? ...?



## תרגילים

### סעיפים 1,2

א. שרטט ציר מספרים וסמן עליו את קבוצת הערכים המתאימים לכל אחד מאי-השוויונים הבאים:

- |                |                           |
|----------------|---------------------------|
| 1. $x < 2$     | 2. $x \geq -1$            |
| 3. $x \leq -4$ | 4. $x > -5$               |
| 5. $x \geq 0$  | 6. $x \leq 0$             |
| 7. $x \neq 0$  | 8. $-\infty < x < \infty$ |
| 9. $1 < x < 3$ | 10. $-1 \leq x \leq 2$    |

ב. פתור את אי-השוויונים הבאים והצג את התוצאה על ציר המספרים:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1. $x + 4 < 9$                       | 2. $x - 7 > 2$   |
| 3. $x + 6 \leq 1$                    | 4. $x + 5 \geq -4$                                     |
| 5. $4 + x > 6$                       | 6. $7 > x + 5$   |
| 7. $2x \leq x + 1$                   | 8. $3x \geq 2x - 1$                                    |
| 9. $2x > 6$                          | 10. $3x < 8 - x$                                       |
| 11. $5x \leq -20$                    | 12. $-4x > -4$   |
| 13. $x - 12 > 3x$                    | 14. $2x - 3 \leq 6 - x$                                |
| 15. $x + 4 < 4x - 5$                 | 16. $4 - 5x \geq 2x - 3$                               |
| 17. $5 - x + 7 < 3x$                 | 18. $4x + 5 - x \leq 2$                                |
| 19. $2(x - 1) > 4$                   | 20. $3(2x + 5) > 15$                                   |
| 21. $3(x - 4) < 2(x - 3) + x$        | 22. $4 - x + 2(3 + x) \leq x - 1$                      |
| 23. $\frac{1}{2}x > 1$               | 24. $\frac{1}{3}x \leq -2$                             |
| 25. $\frac{x}{3} > -4$               | 26. $\frac{-x}{2} \geq 3$                              |
| 27. $\frac{3x}{5} \leq -1$           | 28. $\frac{-2x}{7} < 4$                                |
| 29. $\frac{x}{6} < \frac{1}{2}$      | 30. $\frac{2x}{5} > \frac{1}{2}$                       |
| 31. $\frac{x+1}{3} < \frac{1-2x}{4}$ | 32. $\frac{5-x}{2} \geq \frac{10-3x}{5}$               |
| 33. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 1$  | 34. $3x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \leq 2\frac{3}{4}$ |

$$35. \frac{x}{4} + \frac{x}{3} - 5 > \frac{2x}{3} + 1$$

$$36. \frac{x-1}{2} + 2 < \frac{x}{5} - x$$

$$37. 4 - \frac{x-5}{3} + \frac{x}{2} - 3x \geq 0$$

$$38. \frac{x-3}{6} < \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3}$$

$$39. \frac{2(1-x)}{5} + \frac{x}{10} \leq \frac{2}{5} - \frac{3x}{10}$$

$$40. \frac{3(x+4)}{2} - \frac{x}{4} \geq 1\frac{1}{4}x + 7$$

### תשובות

1.  $x < 5$ , 2.  $x > 9$ , 3.  $x \leq -5$ , 4.  $x \geq -9$ , 5.  $x > 2$ , 6.  $x < 2$ , 7.  $x \leq 1$ , 8.  $x \geq -1$ ,  
 9.  $x > 3$ , 10.  $x < 2$ , 11.  $x \leq -4$ , 12.  $x < 1$ , 13.  $x < -6$ , 14.  $x \leq 3$ , 15.  $x > 3$ ,  
 16.  $x \leq 1$ , 17.  $x > 3$ , 18.  $x \leq -1$ , 19.  $x > 3$ , 20.  $x > 0$ , 21. כל מספר, 22.  $\phi$ ,  
 23.  $x > 2$ , 24.  $x \leq -6$ , 25.  $x > -12$ , 26.  $x \leq -6$ , 27.  $x \leq -1\frac{2}{3}$ , 28.  $x > -14$ ,  
 29.  $x < 3$ , 30.  $x > \frac{5}{4}$ , 31.  $x < -\frac{1}{10}$ , 32.  $x \geq -5$ , 33.  $x < 6$ , 34.  $x \leq 1$ , 35.  $x < -72$ ,  
 36.  $x < -1\frac{2}{13}$ , 37.  $x \leq 2$ , 38. כל מספר ממשי, 39. כל מספר ממשי, 40.  $\phi$ .

### סעיף 3

ג. פתור את מערכות אי-השוויונים הבאים בעזרת ציר המספרים:

1.  $\begin{cases} x < 7 \\ x > 4 \end{cases}$  וגם

2.  $\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$  וגם

3.  $\begin{cases} x \geq -4 \\ x < 3 \end{cases}$  וגם

4.  $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$  וגם

5.  $\begin{cases} x > 5 \\ x > 4 \end{cases}$  וגם

6.  $\begin{cases} x \geq 3 \\ x > 5 \end{cases}$  וגם

7.  $\begin{cases} x < -2 \\ x \leq -1 \end{cases}$  וגם

8.  $\begin{cases} x > 7 \\ x \geq 7 \end{cases}$  וגם

9.  $\begin{cases} x < -4 \\ x \leq -4 \end{cases}$  וגם

10.  $\begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$  וגם

11.  $\begin{cases} x < -7 \\ x > -2 \end{cases}$  וגם

12.  $\begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$  וגם

13.  $\begin{cases} x < 9 \\ x > 9 \end{cases}$  וגם

14.  $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > 1 \end{cases}$  וגם

15.  $\begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \end{cases}$  וגם

16.  $\begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 7 \end{cases}$  וגם

17.  $\begin{cases} x < 0 \\ x > 0 \end{cases}$  וגם

18.  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$  וגם

### תשובות

1.  $4 < x < 7$ , 2.  $0 < x \leq 2$ , 3.  $-4 \leq x < 3$ , 4.  $-1 \leq x \leq 4$ , 5.  $x > 5$ , 6.  $x > 5$ ,  
 7.  $x < -2$ , 8.  $x > 7$ , 9.  $x < -4$ , 10.  $\phi$ , 11.  $\phi$ , 12.  $\phi$ , 13.  $\phi$ , 14.  $\phi$ , 15.  $\phi$ ,  
 16.  $x=7$ , 17.  $\phi$ , 18.  $x=0$ .

ד. כתוב את אי השוויונים המחוברים בצורת מערכת "וגם", ופתור אותם בעזרת ציר המספרים.

- |                             |                            |                            |
|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $2 < x - 5 < 3$          | 2. $0 < x + 4 < 5$         | 3. $-1 \leq 2x - 1 < 3$    |
| 4. $-2 < 3x - 5 < 4$        | 5. $-2 \leq 4x - 2 \leq 0$ | 6. $-11 \leq 5 - x \leq 0$ |
| 7. $-5 \leq 2 - 3x \leq -1$ | 8. $0 \leq 3x + 1 < x$     | 9. $1 \leq x - 5 < -x$     |

תשובות

1.  $7 < x < 8$ , 2.  $-4 < x < 1$ , 3.  $0 \leq x < 2$ , 4.  $1 < x < 3$ , 5.  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , 6.  $5 \leq x \leq 16$ ,  
7.  $1 \leq x \leq 2\frac{1}{3}$ , 8.  $\emptyset$ , 9.  $\emptyset$ .

ה. ציין אלו מבין מערכות אי השוויונים - "וגם", הבאות ניתן לרשום בצורת אי-שוויון מחובר ופתור אותן

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ וגם              | 2. $\begin{cases} x > -7 \\ x \leq -2 \end{cases}$ וגם           | 3. $\begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$ וגם             |
| 4. $\begin{cases} x - 1 \leq 3 \\ x - 1 > -2 \end{cases}$ וגם  | 5. $\begin{cases} 2x + 3 > -7 \\ 2x + 3 \leq -9 \end{cases}$ וגם | 6. $\begin{cases} 4 - x < 5 \\ 4 - x \geq 2 \end{cases}$ וגם  |
| 7. $\begin{cases} 3 - 2x \leq 2 \\ 3 - 2x > 4 \end{cases}$ וגם | 8. $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$ וגם  | 9. $\begin{cases} 3 - x < x \\ 3 - x \geq -x \end{cases}$ וגם |
| 10. $\begin{cases} 4 - 3x > 2 \\ 4 - 3x < 2 \end{cases}$ וגם   | 11. $\begin{cases} 2x + 8 > x \\ 2x + 8 < -x \end{cases}$ וגם    | 12. $\begin{cases} x < 4x + 5 \\ x > 2 - x \end{cases}$ וגם   |

תשובות

1.  $0 < x < 1$ , 2.  $-7 < x \leq -2$ , 3. לא ניתן, 4.  $-1 < x \leq 4$ , 5. לא ניתן, 6.  $-1 < x \leq 2$ ,  
7. לא ניתן, 8.  $x = 1$ , 9.  $x > 1.5$ , 10. לא ניתן, 11.  $-8 < x < -2\frac{2}{3}$ , 12.  $x > 1$ .

1. פתור את מערכות אי-השוויונים הבאות :

$$1. \begin{cases} x + 5 < 8 \\ x - 1 > 1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$2. \begin{cases} x - 4 < 3 \\ x - 7 > -1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$3. \begin{cases} 4 + 3x > 1 \\ 2x < 6 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$4. \begin{cases} 3 - x < 7 \\ -2x > 6 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$5. \begin{cases} 5 - 2x > 7 \\ 3x + 4 > 5 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$6. \begin{cases} x + 5 < 2x \\ 4x - 1 \leq 7 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$7. \begin{cases} -4 < 3x - 1 \\ 4x - 15 < x \end{cases} \text{ וגם}$$

$$8. \begin{cases} 8 + 5x \leq x \\ x - 5 > 0.5 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$9. \begin{cases} -3x + 1 < 7 \\ x + 5 \geq 6x \end{cases} \text{ וגם}$$

$$10. \begin{cases} \frac{x}{2} \leq 1 \\ 4x - 1 < 3 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$11. \begin{cases} \frac{x}{-3} > 2 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$12. \begin{cases} \frac{3 - 7x}{-5} \leq -2 \\ 9x + 8 \leq -1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$13. \begin{cases} 3x - 11 \leq 4 \\ x > 7x + 3 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$14. \begin{cases} -7x < x - 4 \\ 3x + 1 > x \end{cases} \text{ וגם}$$

$$15. \begin{cases} x \geq 15x - 7 \\ 3x + 3 \leq 14x \end{cases} \text{ וגם}$$

$$16. \begin{cases} 4x + 7 < 3x + 5 \\ 2x + 6 > 3 - x \end{cases} \text{ וגם}$$

$$17. \begin{cases} 8x - 7 < 3x + 3 \\ 4x - 1 > 5x + 1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$18. \begin{cases} 4 - x \geq 3x - 6 \\ x + 7 < 5x - 1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$19. \begin{cases} 2x - 3 \leq 7 - x \\ x + 7 < 3x + 1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$20. \begin{cases} 11 - x \geq 5(x + 1) \\ x - 7 > 3x + 1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$21. \begin{cases} 5 - 2x < 1 - x \\ 4 - 9x \geq x + 2 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$22. \begin{cases} 3(x - 5) \leq 4x - 15 \\ x + 7 < 5x - 1 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$23. \begin{cases} 7(x - 2) \geq 8x - 14 \\ x + 3 < x + 8 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$24. \begin{cases} x + 1 \leq 11x - 3 \\ 3(x - 2) \leq x - 4 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$25^* \begin{cases} 3x + 5 \leq 4x - 7 \\ \frac{5x - 4}{5} > x + 7 \end{cases} \text{ וגם}$$

$$26^* \begin{cases} \frac{7 - 2x}{-2} \leq x - 1 \\ 3x - 4 > 3(5 + x) \end{cases} \text{ וגם}$$

$$27^* \begin{cases} \frac{2(x - 3)}{-7} < x - 3 \\ x - 10 \geq 6x - 5(x + 2) \end{cases} \text{ וגם}$$

$$28. x < 5x - 8 < x + 7$$

$$29. 4x - 3 \leq x + 1 < x + 5$$

$$30. x + 1 < x < x + 2$$

### תשובות

$$1. 2 < x < 3, \quad 2. 6 < x < 7, \quad 3. -1 < x < 3, \quad 4. -4 < x < -3, \quad 5. \phi, \quad 6. \phi,$$

$$7. -1 < x < 5, \quad 8. \phi, \quad 9. -2 < x \leq 1, \quad 10. x < 1, \quad 11. x < -6, \quad 12. x \leq -1, \quad 13. x < -\frac{1}{2},$$

$$14. x > \frac{1}{2}, \quad 15. \frac{3}{11} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 16. \phi, \quad 17. x < -2, \quad 18. 2 < x < 2.5, \quad 19. 3 < x \leq 3\frac{1}{3},$$

20.  $x < -4$ , 21.  $\phi$ , 22.  $x > 2$ , 23.  $x \leq 0$ , 24.  $\frac{2}{5} \leq x \leq 1$ , 25.  $\phi$  26.  $\phi$ , 27.  $x > 3$ ,  
 28.  $2 < x < 3\frac{3}{4}$ , 29.  $x \leq 1\frac{1}{3}$ , 30.  $\phi$ .

ז. מצא את פתרון המשותף לשלושת אי-השוויונים (וגם) בכל אחת מערכות  
 הבאות. העזר בציר המספרים.

1.  $\begin{cases} x > 5 \\ x > 3 \\ x > 7 \end{cases}$  וגם

2.  $\begin{cases} x < 4 \\ x < -1 \\ x < 2 \end{cases}$  וגם

3.  $\begin{cases} x < 9 \\ x > 3 \\ x < 12 \end{cases}$  וגם

4.  $\begin{cases} x < 8 \\ x > 2 \\ x > -4 \end{cases}$  וגם

5.  $\begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$  וגם

6.  $\begin{cases} x < 4 \\ x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$  וגם

7.  $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \\ x < 5 \end{cases}$  וגם

8.  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$  וגם

9.  $\begin{cases} x < -7 \\ x < 1 \\ x \geq -9 \end{cases}$  וגם

10.  $\begin{cases} x < 3 \\ x \leq -1 \\ x \geq -5 \end{cases}$  וגם

11.  $\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 5 \\ x < 4 \end{cases}$  וגם

12.  $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$  וגם

### תשובות

1.  $x > 7$ , 2.  $x < -1$ , 3.  $3 < x < 9$ , 4.  $2 < x < 8$  5.  $\phi$ , 6.  $\phi$ , 7.  $x = 2$ , 8.  $\phi$ ,  
 9.  $-9 \leq x < -7$ , 10.  $-5 \leq x \leq -1$ , 11.  $x < 4$ , 12.  $\phi$ .

ח. מצא את פתרון מערכות אי-השוויונים "או" בעזרת ציר המספרים.

1.  $\begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \end{cases}$  או

2.  $\begin{cases} x \leq 7 \\ x < 8 \end{cases}$  או

3.  $\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases}$  או

4.  $\begin{cases} x < 8 \\ x \geq -1 \end{cases}$  או

5.  $\begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 7 \end{cases}$  או

6.  $\begin{cases} x \leq 5 \\ x > 5 \end{cases}$  או

7.  $\begin{cases} x < -3 \\ x > -3 \end{cases}$  או

8.  $\begin{cases} x > -12 \\ x < 12 \end{cases}$  או

9.  $\begin{cases} x < -12 \\ x > 12 \end{cases}$  או

10.  $\begin{cases} x + 1 > 7 \\ 3 - x < 4 \end{cases}$  או

11.  $\begin{cases} 2x - 1 \geq -5 \\ 3x + 4 > 1 \end{cases}$  או

12.  $\begin{cases} 4 - 7x \geq -3 \\ 3x - 5 > -2 \end{cases}$  או

13\*  $\begin{cases} 4 - x < 12 - x \\ x - 5 \leq 3 - x \end{cases}$  או

14.  $\begin{cases} 9x - 1 \geq x + 3 \\ 5x + 3 \leq 3x + 2 \end{cases}$  או

15.  $\begin{cases} 11 + 4x < 1 - x \\ 3(x + 6) \geq 3x - 2 \end{cases}$  או

$$16. \begin{cases} 5(1-x) + x \geq 1 \\ 4(3-2x) < x - 6 \end{cases} \quad \text{או} \quad 17.* \begin{cases} x - 5 > 3(x-1) \\ 4(x+2) < 4x + 1 \end{cases} \quad \text{או} \quad 18. \begin{cases} 3x + 7 \leq 2(x+1) \\ 3 - 2x \geq 2(3-x) \end{cases} \quad \text{או}$$

$$19. \begin{cases} 3(x+2) \leq 5-x \\ x-5 > 2x-1 \end{cases} \quad \text{או} \quad 20. \begin{cases} 14-3x < x+10 \\ 2(x-1) + x < 1 \end{cases} \quad \text{או} \quad 21. \begin{cases} 3(x+2) \leq x-2 \\ 1-x \leq x-7 \end{cases} \quad \text{או}$$

$$22. \begin{cases} x+2 \leq 5(4-x) \\ 8x+1 < 7x+4 \end{cases} \quad \text{או} \quad 23. \begin{cases} 5x-2 \leq 2(x+5) \\ 3x-4 \geq -3(1-x) \end{cases} \quad \text{או} \quad 24. \begin{cases} 7x+3 \geq 4x+1 \\ 2x-7 \leq 2(x-3) \end{cases} \quad \text{או}$$

$$25. \begin{cases} 2x+3 \leq 3-x \\ 2(x-1) \leq 2x-2 \end{cases} \quad \text{או} \quad 26. \begin{cases} 5-9x < x+5 \\ 13(1-x) \leq x+6 \end{cases} \quad \text{או} \quad 27. \begin{cases} 4-9x \geq 6(2-x) \\ x+1 > 4-2x \end{cases} \quad \text{או}$$

$$28. \begin{cases} \frac{x-1}{2} \leq 3 \\ \frac{2x-5}{-3} > 1 \end{cases} \quad \text{או} \quad 29. \begin{cases} \frac{4-x}{3} < 5+x \\ 2x-1 \geq \frac{3-x}{-4} \end{cases} \quad \text{או} \quad 30.* \begin{cases} \frac{2-x}{3} \geq \frac{-2(x+1)}{5} \\ \frac{x+4}{-2} \leq \frac{2x-1}{3} \end{cases} \quad \text{או}$$

$$31. \begin{cases} 1 < x < 2 \\ 3x-4 > 5 \end{cases} \quad \text{או} \quad 32. \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 2x+5 > 3x+4 \end{cases} \quad \text{או} \quad 33. \begin{cases} -5 \leq x \leq 0 \\ \frac{x-7}{-3} < 3 \end{cases} \quad \text{או}$$

$$34.* \begin{cases} 0 < \frac{3x-1}{2} < 1 \\ -4.5 \leq x-5 < 7 \end{cases} \quad \text{או} \quad 35.* \begin{cases} 4x+3 < 5x+1 \\ -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1 \end{cases} \quad \text{או} \quad 36. \begin{cases} -2 \leq \frac{x-5}{-2} < 1 \\ 4(x-7) > 3+4x \end{cases} \quad \text{או}$$

### תשובות

1.  $x < 3$  או  $x > 5$ , 2.  $x < 8$ , 3.  $x \geq -1$ , 4.  $-\infty < x < \infty$ , 5.  $-\infty < x < \infty$ ,  
 6.  $-\infty < x < \infty$ , 7.  $x \neq -3$ , 8.  $-\infty < x < \infty$ , 9.  $x < -12$  או  $x > 12$ , 10.  $x > -1$ ,  
 11.  $x \geq -2$ , 12.  $-\infty < x < \infty$ , 13.  $-\infty < x < \infty$ , 14.  $x \leq -\frac{1}{2}$  או  $x \geq \frac{1}{2}$ ,  
 15.  $-\infty < x < \infty$ , 16.  $x \leq 1$  או  $x > 2$ , 17.  $x < -1$ , 18.  $x \leq -5$ , 19.  $x \leq -\frac{1}{4}$ , 20.  $x \neq 1$ ,  
 21.  $x \leq -4$  או  $x \geq 4$ , 22.  $x \leq 3$ , 23.  $x \leq 4$ , 24.  $-\infty < x < \infty$ , 25.  $-\infty < x < \infty$ ,  
 26.  $x > 0$ , 27.  $x \leq -2\frac{2}{3}$  או  $x > 1$ , 28.  $x \leq 7$ , 29.  $x > -2\frac{3}{4}$ ,  
 30.  $x \geq -16$  31.  $1 < x < 2$  או  $x > 3$ , 32.  $x < 1$ , 33.  $x \geq -5$ , 34.  $\frac{1}{3} < x < 12$ ,  
 35.  $-2 \leq x \leq 1$  או  $x > 2$ , 36.  $3 < x \leq 9$ .

## פרק ז': השורש הריבועי

**1. שורש ריבועי** של מספר הוא מספר כזה, שאם מעלים אותו בריבוע, התוצאה היא המספר הרשום בתוך סימן השורש. כלומר:

$$\sqrt{A^2} = A \text{ או } (\sqrt{A})^2 = A$$

השורש הריבועי של 9 יכול להיות:  $+3$  כי  $(+3)^2 = 9$   
וגם  $-3$  כי  $(-3)^2 = 9$

לפיכך, מן הראוי לשים לב לדברים הבאים:

**א.** לא קיים מספר ממשי שהוא שורש ריבועי של מספר שלילי. הפעולות:  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-1.21}$ ,  $\sqrt{-5}$ ,  $\sqrt{-4}$ , אינן מוגדרות בתחום המספרים הממשיים.

**ב.** כאשר מוציאים שורש ריבועי ממספר, יש לקחת בחשבון שתי תוצאות אפשריות - שני מספרים נגדיים.

בבעיות מסוימות נחוץ השורש החיובי, ואז כותבים  $\sqrt{4} = 2$   
בבעיות אחרות נחוץ השורש השלילי, ואז כותבים  $-\sqrt{4} = -2$   
ואם לא ידוע, נכתוב  $\pm\sqrt{4} = \pm 2$

ובחישוב השורש הריבועי של 1, נכתוב:  $\pm\sqrt{1} = \pm 1$   
כאשר הסימן  $\pm 1$ , למשל היא כתיבה מקוצרת של  $(+1)$  ו-  $(-1)$ .

**ג.** היות שהמספר 0 הוא חסר סימן, אפשר לכתוב  $\sqrt{0} = 0$ .

## 2. פעולות בשורשים

### 2.1 כלל הכפל

אם A ו-B שני מספרים לא שליליים, מכפלת השורשים הריבועיים שלהם שווה לשורש של מכפלתם. כלומר:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$$

## 2.2 כלל החילוק

אם A מספר לא שלילי, ו-B מספר חיובי, אז מנת השורשים הריבועיים של A  
ב-B שווה לשורש של מנת החילוק שלהם.  
כלומר:

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

את שני הכללים הללו מוכיחים ע"פ הגדרת השורש הריבועי - ע"י העלאה בריבוע.  
שני כללים אלה, פועלים בשני הכיוונים ואנו בוחרים את הכיוון הרצוי, בהתאם  
לתרגיל.

 דוגמאות

1.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

2.  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

3.  $\sqrt{20} \cdot \sqrt{0.2} = \sqrt{20 \cdot 0.2} = \sqrt{4} = 2$

4.  $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

5.  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

6.  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

בדוגמאות 2, 3 ו-6, השתמשנו בכללים מימין לשמאל, וזה איפשר להוציא שורש  
מהמספר המתקבל, דבר שלא התאפשר לפני כן.

בדוגמה 4, הוצאנו שורש ריבועי מגורם אחד - 4, ורשמנו את התוצאה לפני השורש.  
לגורם האחר, אין שורש מדויק, ולכן השארנו אותו בתוך השורש.

לעתים, אנו צריכים לבצע את הפעולה ההפוכה, כלומר להכניס גורם לתוך השורש.  
למשל,  $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20}$ .

פעולה זו מאפשרת לקבל מושג על ערך השורש. למשל, אם עלינו להחליט, איזה  
מספר גדול יותר  $2\sqrt{3}$  או  $3\sqrt{2}$ , נרשום אותם כך שכל המספר יופיע בתוך השורש:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

במצב זה ברור כי:  $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$

## 2.2 חיבור וחסור

פעולות חיבור וחסור בין שורשים ניתן לבצע, רק אם בתוך השורש רשומים אותם מספרים. אז מתייחסים לשורש כאל ביטוי אלגברי ופעולת החיבור האלגברי זהה לכינוס אברים דומים.



- $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- $4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
- $7\sqrt{2} - \sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- $\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$
- $(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 3) = \sqrt{2}^2 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12 = 2 + \sqrt{2} - 12 = \sqrt{2} - 10$
- $(\sqrt{3} - 1)^2 = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$

## 3. מספרים אי רציונאליים

נתייחס למספר  $\sqrt{3}$ , שריבועו 3. לא קיים מספר שלם או שבר, שריבועו שווה בדיוק לשלוש. אנו אומרים ש- $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונאלי. ערכו מספר עשרוני בלתי מוגבל.  
 $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$

אם מספר אי-רציונאלי מופיע במכנה של שבר, פעולת החילוק הופכת להיות ארוכה ומייגעת. למשל:  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.7320508}$

אם המספר האי-רציונאלי מופיע במונה, הפעולה פשוטה יותר. אפשר להפוך את המכנה של שבר למספר רציונאלי. נראה זאת בשני מקרים.

- א. המכנה הוא מספר אי-רציונאלי או מכפלת מספרים, המכילה מספר אי-רציונאלי.  
במקרה זה מכפילים את המונה ואת המכנה במספר האי-רציונאלי.

$$1. \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2. \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

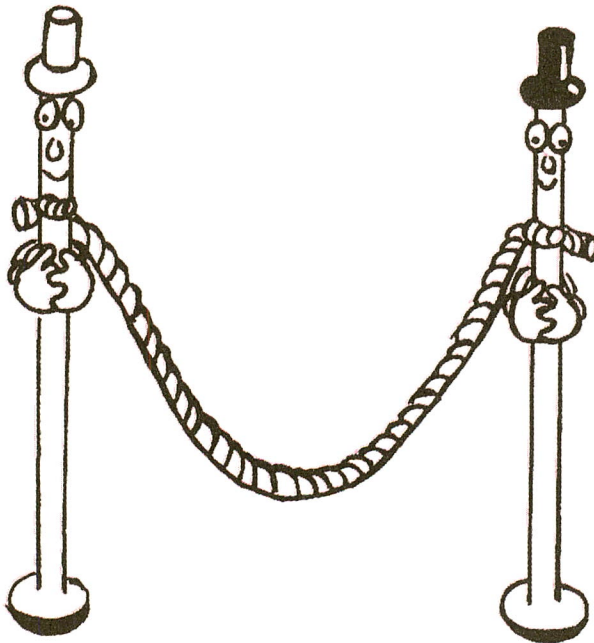
ב. המכנה הוא סכום (הפרש) של מספרים שביניהם מספר אי-רציונאלי. מכפילים את המכנה ואת המונה בהפרש (בסכום) של אותם מספרים.

$$1. \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$2. \frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{4-3} = 3(2-\sqrt{3})$$

הערה 

ביטויים מהסוג A+B ו-A-B (סכום והפרש של אותם ביטויים) נקראים צמודים.



חידה  
 בין שני צמודים  
 באופה 5 מ' כל  
 אחד תלוי חבל  
 שאורכו 8 מ'.  
 הנקודה הנמוכה  
 ביותר של החבל  
 נמצאת באופה 1 מ'  
 מהרצפה.  
 מה המרחק בין  
 הצמודים?

תשובה: 0.

## תרגילים

א. העזר בנוסחאות הכפל והחילוק כדי לחשב את השורשים:

- |                                  |                                  |                                     |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\sqrt{8^2 \cdot 5^2}$        | 2. $\sqrt{2^2 \cdot 49}$         | 3. $\sqrt{16 \cdot 36}$             |
| 4. $\sqrt{25 \cdot 121}$         | 5. $\sqrt{36 \cdot 25}$          | 6. $\sqrt{44} \cdot \sqrt{11}$      |
| 7. $\sqrt{32} \cdot 2\sqrt{8}$   | 8. $2\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$   | 9. $4\sqrt{2.5} \cdot 3\sqrt{10}$   |
| 10. $\sqrt{\frac{4}{25}}$        | 11. $\sqrt{\frac{16}{49}}$       | 12. $\sqrt{1\frac{11}{25}}$         |
| 13. $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ | 14. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ | 15. $\frac{\sqrt{2.7}}{\sqrt{0.3}}$ |

תשובות

1. 40, 2. 14, 3. 24, 4. 55, 5. 30, 6. 22, 7. 32, 8. 30, 9. 60, 10.  $\frac{2}{5}$ , 11.  $\frac{4}{7}$ ,  
12.  $1\frac{1}{5}$ , 13. 2, 14. 4, 15. 3

ב. פרק לגורמים והוצא גורם מחוץ לשורש:

- |                          |                            |                            |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\sqrt{2 \cdot 25}$   | 2. $\sqrt{8}$              | 3. $\sqrt{27}$             |
| 4. $\sqrt{75}$           | 5. $\sqrt{72}$             | 6. $\sqrt{20}$             |
| 7. $\sqrt{52}$           | 8. $\sqrt{99}$             | 9. $\sqrt{0.4}$            |
| 10. $\sqrt{\frac{2}{9}}$ | 11. $\sqrt{\frac{5}{4}}$   | 12. $\sqrt{\frac{7}{16}}$  |
| 13. $\sqrt{\frac{8}{9}}$ | 14. $\sqrt{\frac{27}{36}}$ | 15. $\sqrt{\frac{32}{49}}$ |

תשובות

1.  $5\sqrt{2}$ , 2.  $2\sqrt{2}$ , 3.  $3\sqrt{3}$ , 4.  $5\sqrt{3}$ , 5.  $6\sqrt{2}$ , 6.  $2\sqrt{5}$ , 7.  $2\sqrt{13}$ , 8.  $3\sqrt{11}$ ,  
9.  $2\sqrt{0.1}$ , 10.  $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ , 11.  $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ , 12.  $\frac{1}{4}\sqrt{7}$ , 13.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ , 14.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ , 15.  $\frac{4}{7}\sqrt{2}$

ג. הכנס לתוך השורש:

- |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. $5\sqrt{2}$          | 2. $3\sqrt{5}$          | 3. $2\sqrt{2}$          |
| 4. $3\sqrt{7}$          | 5. $10\sqrt{0.1}$       | 6. $5\sqrt{0.4}$        |
| 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 8. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ | 9. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ |

10.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12.  $\frac{10\sqrt{0.3}}{3}$

תשובות

1.  $\sqrt{50}$ , 2.  $\sqrt{45}$ , 3.  $\sqrt{8}$ , 4.  $\sqrt{63}$ , 5.  $\sqrt{10}$ , 6.  $\sqrt{10}$ , 7.  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ , 8.  $\sqrt{\frac{5}{9}}$ ,

9.  $\sqrt{\frac{1}{5}}$ , 10.  $\sqrt{\frac{4}{3}}$ , 11.  $\sqrt{\frac{25}{2}}$ , 12.  $\sqrt{\frac{10}{3}}$

## ד. חבר את השורשים:

1.  $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$

2.  $7\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{8}$

3.  $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{75}$

4.  $\sqrt{27} - \sqrt{48} + 2\sqrt{3}$

5.  $\sqrt{5} - 8\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$

6.  $3\sqrt{7} + 8\sqrt{5} - 4\sqrt{7} - 3\sqrt{5}$

7.  $\frac{\sqrt{50}}{5} - \frac{\sqrt{72}}{3} + \frac{\sqrt{8}}{2}$

8.  $\frac{3\sqrt{12}}{2} - \frac{2\sqrt{48}}{4} - \frac{\sqrt{27}}{4}$

9.  $\frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{\sqrt{32}}{4} - 0.2\sqrt{50}$

10.  $\frac{\sqrt{98}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{6} + 5\sqrt{2}$

## תשובות

1. 0, 2.  $3\sqrt{2}$ , 3.  $6\sqrt{3}$ , 4.  $\sqrt{3}$ , 5.  $\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$ , 6.  $5\sqrt{5} - \sqrt{7}$ , 7. 0, 8.  $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ ,

9.  $\sqrt{2}$ , 10.  $8\sqrt{2}$ .

## ה. בצע את הפעולות

1.  $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$

2.  $\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

3.  $2\sqrt{5}(1 - \sqrt{5})$

4.  $2\sqrt{7}(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$

5.  $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 5)$

6.  $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 3)$

7.  $(2\sqrt{2} + 1)(2 - \sqrt{2})$

8.  $(2\sqrt{5} - 1)(5 + 3\sqrt{5})$

9.  $(4\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

10.  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$

11.  $(\sqrt{2} + 3)^2$

12.  $(\sqrt{5} - 2)^2$

13.  $(2\sqrt{3} - 4)^2$

14.  $(3\sqrt{2} - 1)^2$

15.  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

16.  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

17.  $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

18.  $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$

19.  $(2\sqrt{5} + 1)(1 - 2\sqrt{5})$

20.  $(2\sqrt{7} - 5)(5 + 2\sqrt{7})$

21.  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

22.  $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

23.  $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$

24.  $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$

25.  $(a\sqrt{2} + \sqrt{3})(a\sqrt{2} - \sqrt{3})$

26.  $(\sqrt{a} + \sqrt{2})(\sqrt{a} - \sqrt{2})$

27.  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$

28.  $(a\sqrt{3} - \sqrt{b})(a\sqrt{3} + \sqrt{b})$

29\*  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

30\*  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

31\*\*  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

32\*\*  $\sqrt{3 + 2 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3 + 2 - 2\sqrt{6}}$

תשובות

1.  $\sqrt{2} + 2$ , 2.  $\sqrt{6} - 3$ , 3.  $2\sqrt{5} - 10$ , 4.  $14 - 4\sqrt{14}$ , 5.  $6\sqrt{2} + 7$ , 6.  $-\sqrt{3} - 3$ ,  
 7.  $3\sqrt{2} - 2$ , 8.  $7\sqrt{5} + 25$ , 9.  $3\sqrt{15} - 7$ , 10.  $\sqrt{10} + 4$ , 11.  $6\sqrt{2} + 11$ , 12.  $9 - 4\sqrt{5}$ ,  
 13.  $28 - 16\sqrt{3}$ , 14.  $19 - 6\sqrt{2}$ , 15.  $2\sqrt{10} + 7$ , 16.  $5 - 2\sqrt{6}$ , 17. 2, 18. 7, 19. -19,  
 20. 3, 21. 1, 22. -2, 23. 5, 24. 30, 25.  $2a^2 - 3$ , 26.  $a - 2$ , 27.  $b - a$ , 28.  $3a^2 - 8$ ,  
 29. 1, 30. 2, 31. 2, 32. 1.

1. קבע, בלי להשתמש במחשב מבין שני המספרים הנתונים יותר גדול

1.  $2\sqrt{2}, 3$

2.  $2\sqrt{3}, 4$

3.  $\sqrt{15}, 3\sqrt{5}$

4.  $6\sqrt{2}, 4\sqrt{3}$

5.  $2\sqrt{5}, 3\sqrt{2}$

6.  $5\sqrt{18}, 2\sqrt{75}$

7.  $\frac{\sqrt{63}}{3}, 3$

8.  $\frac{\sqrt{45}}{2}, 2\sqrt{3}$

9.  $3\sqrt{6}, \sqrt{55}$

10.  $\sqrt{13}, \sqrt{7} + \sqrt{6}$

11.  $\sqrt{11}, \sqrt{8} - \sqrt{3}$

12.  $\sqrt{5} + \sqrt{7}, \sqrt{2} + \sqrt{10}$

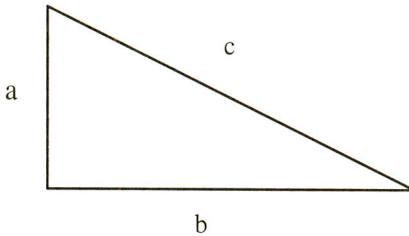
13.  $2\sqrt{3} + 1, \sqrt{8} + \sqrt{5}$

14.  $3\sqrt{5} + 1, \sqrt{20} - \sqrt{26}$

15.  $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}, \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$

תשובות

1. 3, 2. 4, 3.  $3\sqrt{5}$ , 4.  $6\sqrt{2}$ , 5.  $2\sqrt{5}$ , 6.  $5\sqrt{18}$ , 7. 3, 8.  $2\sqrt{3}$ , 9.  $\sqrt{55}$ ,  
10.  $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ , 11.  $\sqrt{11}$ , 12.  $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ , 13.  $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ , 14.  $3\sqrt{5} + 1$ , 15.  $\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$ .



ז. במשולש ישר-זווית, הניצבים הם  $a$ ,  $b$  והיתר  $c$ . בכול אחד מהסעיפים הבאים נתונים אורכי שתי צלעות (באותן יחידות אורך) העזר במשפט פיתגורס וחשב את הצלע השלישית.

- |                              |                                      |
|------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $a = 6$ , $b = 8$         | 2. $a = 5$ , $c = 13$                |
| 3. $a = 8$ , $b = 15$        | 4. $a = 5$ , $b = 4$                 |
| 5. $a = 7$ , $c = \sqrt{61}$ | 6. $a = b = 3\sqrt{2}$               |
| 7. $a = 5$ , $c = 10$        | 8. $b = \sqrt{31}$ , $c = 3\sqrt{7}$ |
| 9. $a = k$ , $c = 2k$        | 10. $c = m$ , $b = \frac{1}{2}m$     |

תשובות:

1. 10, 2. 12, 3. 17, 4.  $\sqrt{41}$ , 5.  $2\sqrt{3}$ , 6. 6, 7.  $5\sqrt{3}$ , 8.  $4\sqrt{2}$ , 9.  $k\sqrt{3}$ , 10.  $\frac{m\sqrt{3}}{2}$ .

ח. הפוך את המכנה של השברים הבאים למספר רציונלי

- |                                   |                                   |                                    |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\frac{3}{\sqrt{3}}$           | 2. $\frac{4}{\sqrt{2}}$           | 3. $\frac{10}{\sqrt{5}}$           |
| 4. $\frac{1}{5\sqrt{2}}$          | 5. $\frac{2}{5\sqrt{3}}$          | 6. $\frac{3}{2\sqrt{7}}$           |
| 7. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$  | 8. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$   | 9. $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}}$   |
| 10. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ | 11. $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ | 12. $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$ |
| 13. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$        | 14. $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$        | 15. $\frac{4}{\sqrt{8}-2}$         |

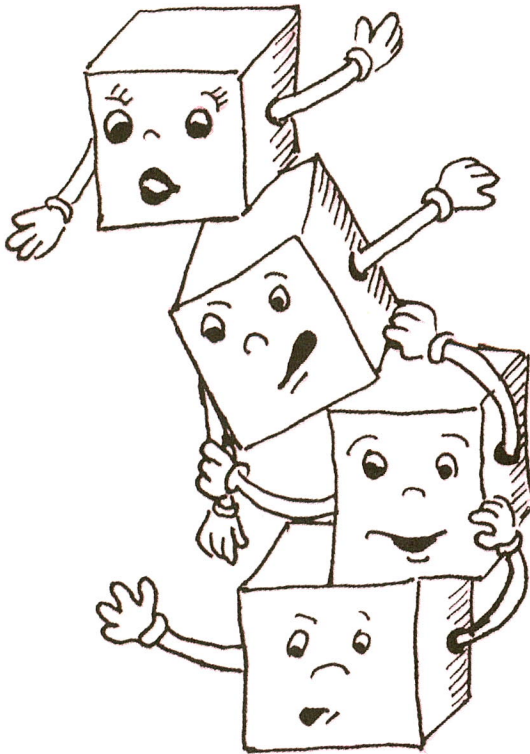
$$16. \frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}$$

$$17. \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

$$18. \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

### תשובות

1.  $\sqrt{3}$ , 2.  $2\sqrt{2}$ , 3.  $2\sqrt{5}$ , 4.  $0.1\sqrt{2}$ , 5.  $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ , 6.  $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ , 7.  $\sqrt{3}$ , 8.  $\sqrt{2}$ , 9.  $\sqrt{3}$ ,  
 10.  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ , 11.  $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$ , 12.  $\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{18}$ , 13.  $\sqrt{2}-1$ , 14.  $3+\sqrt{3}$ , 15.  $\sqrt{8}+2$ ,  
 16.  $\frac{3\sqrt{2}+4}{2}$ , 17.  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , 18.  $5+2\sqrt{6}$



חידה  
 איך 80 קוביות  
 בצבניות. 12%  
 מהן ירקות,  
 60% לבנות,  
 6 שחורות  
 והשאר צהובות.  
 איך בונה  
 מדף ממוחזית  
 מהקוביות.  
 מה המספר  
 המינימלי  
 של קוביות  
 לבנות  
 במדף?

תשובה: 8.

# פרק ח': משוואה ממעלה שניה - משוואה ריבועית

## 1. מיון משוואות

**משוואה ממעלה שניה** או **משוואה ריבועית** זו משוואה שבה החזקה הגבוהה ביותר שבה מופיע הנעלם זו החזקה השניה. הצורה הכללית של משוואה ממעלה שניה עם נעלם אחד, היא:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A \neq 0$$

התנאי  $A \neq 0$  מבטיח שבמשוואה מופיע איבר המכיל  $x^2$ .

כאשר לפחות אחד המקדמים  $B, C$  מתאפס מתקבלת משוואה **מנוונת** או משוואה **חסרה**:

$$Ax^2 + C = 0 \quad \text{אם } B = 0$$

$$Ax^2 + Bx = 0 \quad \text{אם } C = 0$$

$$Ax^2 = 0 \quad \text{ואם } B = C = 0$$

בהתרת משוואה ריבועית יש להתייחס לעובדה שריבוע של מספר - חיובי או שלילי

$$(-2)^2 = (+2)^2 = +4 \quad \text{- הוא חיובי}$$

כפי שראינו בהתרת משוואה ממעלה ראשונה, גם כאן, "**פתרון המשוואה**" או "**שורש המשוואה**", אלו המספרים שבהצבתם בתוך המשוואה, במקום הנעלם הם מאמתים את השוויון.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{במשוואה הריבועית}$$

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \quad x_1 = 2 \quad \text{מאמת את השוויון שכן}$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0 \quad \text{וכך גם } x_2 = 3$$

כל מספר אחר שנציב במקום  $x$  במשוואה זו, לא יאמת את השוויון, כי למשוואה ריבועית שני שורשים.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{למשוואה הריבועית}$$

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0 \quad \text{רק } x_1 = x_2 = 2 \quad \text{הוא פתרון:}$$

ואילו למשוואה אין פתרון בתחום המספרים הממשיים.

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

כל המקרים הללו מרמזים על כך שלמשוואה ריבועית יש שני שורשים ממשיים - שונים או שווים - או שני שורשים לא ממשיים

## 2. פתרון משוואה ריבועית בעזרת פרוק לגורמים

להבדיל ממשוואה ממעלה ראשונה שלצורך התרתה ריכזנו את הנעלמים באגף אחד ואת המספרים החופשיים בשני, במשוואה ריבועית מרכזים הכל לאגף אחד, כך שבאגף השני ישאר 0.

שיטת הפתרון של משוואה ריבועית מתבססת על העיקרון הבא:

**מכפלת שני מספרים שווה ל-0, אם לפחות אחד מהגורמים שווה ל-0.** כלומר: **אם  $AB=0$ , אז  $A=0$  או  $B=0$ , או  $A=B=0$ .**

עובדה זו מאפשרת "להחליף" פתרון משוואה אחת ממעלה שניה, בשתי משוואות ממעלה ראשונה.

בעזרת העיקרון הנ"ל אפשר לפתור משוואות חסרות ושלמות. נציג דרכי פתרון.

**2.1 במשוואה חסרה שבה  $C=0$ , כמו מפרקים את רב-האיבר לגורמים, ע"י הוצאת גורם משותף**

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x + 3) = 0$$

מכפלה זו מתאפסת, רק אם לפחות אחד הגורמים מתאפס.

$$2x(x + 3) = 0 \begin{cases} \Rightarrow 2x = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow x + 3 = 0 & \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

מתקבל שבמשוואה חסרה שבה  $C=0$ , אחד השורשים שווה ל-0

$Ax^2 + Bx = 0$ ,  $A \neq 0$  : ובאופן כללי, אם:

אז:  $x(Ax + B) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{B}{A}$

**2.2 במשוואה חסרה שבה  $B=0$ , כמו**

**מפרקים לגורמים לפי נוסחה:**

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0 \begin{cases} \Rightarrow 2x + 3 = 0 & \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2x - 3 = 0 & \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

גם את המשוואה  $x^2 - 3 = 0$  אפשר לפתור בשיטה זו, שכן אפשר לפרק לגורמים

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

והפתרון:  $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$

### למשוואה ריבועית שבה $B=0$ , הפתרונות הם שני מספרים נגדיים.

משוואה מסוג זה אפשר לפתור גם ע"י בידודו של  $x^2$ , והוצאת השורש הריבועי - החיובי והשלילי של אגף ימין

$$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} = \pm 1\frac{1}{2}$$
$$x_1 = -1\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1\frac{1}{2}$$

ובאופן כללי:

$$Ax^2 + C = 0, \quad A \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{C}{A} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{-\frac{C}{A}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$$

למשוואה מסוג זה יש פתרון ממשי, רק אם  $A$  ו- $C$  בעלי סימנים שונים, כי אז  $-\frac{C}{A} > 0$ , ואז אפשר להוציא שורש ריבועי.

אפשר להדגים את חשיבות התנאי האחרון באמצעות המשוואה:  $x^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow x^2 = -1$$

מתקבל:

כידוע, ריבוע של מספר הוא מספר לא שלילי ( $x^2 \geq 0$ ), לכן אין שורש ריבועי של מספר שלילי. לכן, למשוואה זו אין שורשים ממשיים.

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x-5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 5$$

הביטוי  $(x-5)$  המופיע בריבוע מעיד על קיום שני שורשים שווים.

### 2.3 משוואה שלמה מהסוג:

אפשר לפרק לגורמים לפי נוסחה

### 2.4 המשוואה השלמה

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

את המשוואה אפשר לפרק לפי קבוצות (הטרינום):

$$x-2=0 \Rightarrow x_1=2$$

$$x-3=0 \Rightarrow x_2=3$$

כידוע, מכפלה זו מתאפסת אם לפחות אחד מהגורמים - הסוגריים - מתאפס: במקרה שהמקדם של החזקה הריבועית הוא שלילי, כדאי להכפיל את שני אגפי המשוואה ב-(-1).



### הערה

העיקרון שבתחילת סעיף זה מתאים גם למקרה שמכפלה של שלושה גורמים או יותר שווה ל-0. למשל:

$$x^3 - 9x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^2 - 9x + 8) = 0$$

$$x(x-1)(x-8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 8$$

### 3. פתרון משוואה ריבועית בעזרת נוסחה.

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

$$(x+5)^2 = 36$$

$$x+5 = \pm 6$$

$$x+5 = -6, \quad x+5 = +6$$

$$x_1 = -11, \quad x_2 = 1$$

בסעיף הקודם מצאנו את פתרון המשוואה הריבועית

ע"י הוצאת שורש ריבועי של שני האגפים

פעולה זו מועילה גם במקרה כמו

אחרי הוצאת שורש:

זוהי כתיבה מקוצרת לשני השוויונים:

שפתרונם:

נעזר בדרך זו של פתרון, בהוכחת נוסחה כללית לפתרון המשוואה הריבועית

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A \neq 0$$

$$4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0$$

נכפיל את שני האגפים ב-4A:

$$4A^2x^2 + 4ABx = -4AC$$

נעביר את 4AC לאגף ימין

$$4A^2x^2 + 4ABx + B^2 = -4AC + B^2$$

נוסיף  $B^2$  לשני האגפים:

באגף שמאל, מתקבל פיתוח של דו-איבר בריבוע.

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC$$

נפרק אותו לגורמים:

$$2Ax + B = \pm \sqrt{B^2 - 4AC}$$

נוציא שורש ריבועי משני האגפים:

$$2Ax = -B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}$$

נבודד את x:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

זוהי כתיבה מקוצרת לזוג הפתרונות:

$$x_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$A = 2, B = -5, C = 3$$

נדגים שימוש בנוסחה:

המקדמים הם:

נציב בנוסחה

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

במקרה שהמקדם B הוא מספר זוגי  $B = 2K$ , נווח להשתמש בנוסחה יותר פשוטה, המכונה **הנוסחה ה"זוגית"**

$$x_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - AC}}{A}$$

הוכחה

נציב במקום B, בנוסחת השורשים את הביטוי  $2K$ :

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2K \pm \sqrt{(2K)^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2K \pm \sqrt{4K^2 - 4AC}}{2A} = \\ &= \frac{-2K \pm \sqrt{4(K^2 - AC)}}{2A} = \frac{-2K \pm 2\sqrt{K^2 - AC}}{2A} = \frac{2(-K \pm \sqrt{K^2 - AC})}{2A} = \\ &= \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - AC}}{A} \end{aligned}$$

במקרה שנוסף לתנאי, שהמקדם B הוא מספר זוגי, מתקיים גם  $A = 1$  מתקבלת נוסחה עוד יותר פשוטה:

$$x_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 - AC}$$

למשל:

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$A = 3, B = -4 \Rightarrow K = -2, C = -7$$

$$x_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - AC}}{A}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot (-7)}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+21}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{2 \pm 5}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2-5}{3} = \frac{-3}{3} = -1 \quad x_2 = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

בדרך כלל המשוואה הריבועית אינה נתונה בצורה התקנית  $Ax^2 + Bx + C = 0$ . במקרה כזה יש לבצע פעולות שיביאו אותה לצורה זו, כמו ביטול מכה, פתיחת סוגריים, כינוס אברים דומים וכתיבת רב האיבר המתקבל בסדר יורד (קודם  $Ax^2$ , אח"כ  $Bx$ , וכו').  
כדאי גם לוודא שהמקדם  $A$  הוא חיובי, נלא, להכפיל את שני אגפי המשוואה ב-1 (ראה דוגמאות 3,4).



1.  $(x-4)(x+3) = 30$

$$x^2 + 3x - 4x - 12 - 30 = 0$$

$$x^2 - x - 42 = 0, \quad A = 1, \quad B = -1, \quad C = -42$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-13}{2} = -6 \quad x_2 = \frac{1+13}{2} = 7$$

במקרה שניתן לפרק את המשוואה לגורמים - פרוק מידי, יותר נוח לפתור אותה בשיטה זו מאשר בעזרת נוסחה. במשוואה הנ"ל:

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x+6)(x-7) = 0$$

$$x+6=0 \Rightarrow x_1 = -6$$

$$x-7=0 \Rightarrow x_2 = 7$$

2.  $(3x-1)(x+2) - (x-1)(2x+3) = 2$

$$3x^2 + 6x - x - 2 - (2x^2 + 3x - 2x - 3) = 2$$

$$3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - x + 3 - 2 = 0$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \quad A = 1, C = 4 \Rightarrow K = 2, C = -1$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-1)} = -2 \pm \sqrt{4 + 1} = -2 \pm \sqrt{5}$$

כאשר לא ניתן להוציא שורש מדויק, כמו  $\sqrt{5}$ , אפשר להשאיר את התוצאה במצב זה, כלומר  $x_1 = -2 - \sqrt{5}$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{5}$ .

אם מעוניינים לדעת את ערכי השורשים, אפשר להעזר במחשבון ולדייק במידה של ספרה אחת או שתיים אחרי הנקודה;

$$x_1 = -2 - 2.2 = -4.2, \quad x_2 = -2 + 2.2 = 0.2 \quad \text{במקרה הנייל:}$$

$$3. \quad \frac{x+6}{x} = 5 + \frac{x+5}{x+2}, \quad x \neq 0, \quad x \neq -2$$

תחום הגדרה של משוואה זו הוא:  $x \neq -2$ ,  $x \neq 0$  (בקיצור:  $x \neq -2, 0$ ) כי המספרים  $-2, 0$  מאפסים את המכנים ואז השבר לא מוגדר.

במידה שיש הגבלה, יש לרשום את תחום ההגדרה ליד כל משוואה, ובסיום יש לבדוק אם הפתרונות נמצאים בתחום ההגדרה.

לפישוט המשוואה, מבטלים את המכנים - מכנה משותף. נכפיל את שני אגפי המשוואה במכנה המשותף:  $x(x+2)$ .

למעשה, מכפילים כל מונה בתוצאות המנה בין המכנה המשותף למכנה של אותו שבר.

במשוואה הנתונה, מכפילים את המונה הראשון ב-  $(x+2)$ , את 5 - שהמכנה שלו 1

ב-  $x(x+2)$

$$\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+6}{x} = \frac{x(x+2)}{x} \cdot 5 + \frac{x(x+5)}{x+2} \quad \Bigg/ \cdot x(x+2) \quad x \neq -2, 0$$

$$(x+6)(x+2) = 5x(x+2) + x(x+5)$$

$$x^2 + 2x + 6x + 12 = 5x^2 + 10x + x^2 + 5x$$

$$-5x^2 - 7x + 12 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$5x^2 + 7x - 12 = 0, \quad A = 5, B = 7, C = -12$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12)}}{2 \cdot 5} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{10} =$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{-7 \pm 17}{10} \Rightarrow x_1 = -2\frac{2}{5} \quad x_2 = 1$$

$$4. \quad \frac{x^{-4}/3x-1}{x-3} - \frac{x^{-3}/x+2}{x-4} = \frac{x^{-4}/8}{x-3} \quad / \cdot (x-3)(x-4) \quad x \neq 3, 4$$

$$(3x-1)(x-4) - (x+2)(x-3) = 8(x-4)$$

$$3x^2 - 12x - x + 4 - (x^2 - 3x + 2x - 6) = 8x - 32$$

$$3x^2 - 13x + 4 - x^2 + x + 6 - 8x + 32 = 0$$

$$2x^2 - 20x + 42 = 0 \quad /:2$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x-3)(x-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 7$$

השורש  $x_1 = 3$  אינו נמצא בתחום הקיום של המשוואה. כלומר המשוואה לא מוגדרת עבור הערך 3 (מתקבל מספר מחולק ב-0) ולכן הפתרון היחיד של משוואה זו הוא 7.

$$5. \quad \frac{3-x}{x+3} = \frac{10-x}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \quad x \neq -3, +3$$

נפרק לגורמים את המכנים

$$\frac{x^{-3}/3-x}{x+3} = \frac{1/10-x}{(x+3)(x-3)} - \frac{x+3/1}{x-3} \quad / \cdot (x-3)(x+3)$$

$$(x-3)(3-x) = 10-x-x-3$$

$$-x^2 + 8x - 16 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad A = 1, B = -8 \Rightarrow K = -4, C = 16$$

$$x_{1,2} = -(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot 16} = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4 \pm \sqrt{0} = 4 \pm 0 = 4$$

$$x_1 = x_2 = 4$$

למשוואה זו שני פתרונות שווים

## שים לב

**הימנע מלקבוע כמכנה המשותף את מכפלת כל מכני המשוואה, ללא הבחנה.**

במקרה זה:  $(x+3)(x^2-9)(3-x)$ ; ביטויים כמו  $(x-3)$  ו-  $(3-x)$  לא נחשבים כגורמים שונים, כי  $(3-x) = -(x-3)$ . טעות כזו עלולה להוביל למשוואה ממעלה שלישית או יותר שאותה איננו יודעים לפתור.

$$6. \quad \frac{5}{x^2 - 4x} + \frac{6}{5x + 20} = \frac{3(10-x)}{x^2 - 16} - \frac{24}{20 + 5x} \quad x \neq 0, \pm 4$$

$$\frac{5^{x(x+4)}/}{x(x-4)} + \frac{6^{x(x-4)}/}{5(x+4)} = \frac{3(10-x)^{5x}/}{(x+4)(x-4)} - \frac{24^{x(x-4)}/}{5(x+4)} \quad / \cdot 5x(x+4)(x-4)$$

$$25(x+4) + 6x(x-4) = 15x(10-x) - 24x(x-4)$$

$$25x + 100 + 6x^2 - 24x = 150x - 15x^2 - 24x^2 + 96x$$

$$45x^2 - 245x + 100 = 0 \quad /:5$$

$$9x^2 - 49x + 20 = 0 \quad A = 9, \quad B = -49, \quad C = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 9 \cdot 20}}{2 \cdot 9} = \frac{49 \pm \sqrt{2401 - 720}}{18} = \frac{49 \pm \sqrt{1681}}{18} =$$

$$= \frac{49 \pm 41}{18} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{49 - 41}{18} = \frac{4}{9}, \quad x_2 = \frac{49 + 41}{18} = 5$$

#### 4. משוואה אי-רציונלית

משוואה אי-רציונלית זו משוואה שבה הנעלם מופיע בתוך סימן השורש. למשל:

$$\sqrt{3x-2} = x, \quad \sqrt[3]{x} = x-1, \quad \text{וכו'}$$

- א. בפתרון משוואה אי-רציונלית שבה **שורש ריבועי יחיד**:
- **מבודדים את השורש הריבועי** באגף אחד, ויתר המחוברים באגף השני.
  - **מעלים את שני האגפים בריבוע**.
  - **בודקים אם הפתרונות מאמתים את המשוואה**.

$$\sqrt{x} + 2 = x \quad \text{למשל, במשוואה}$$

$$\sqrt{x} = x - 2 \quad \text{מבודדים את השורש}$$

$$x = (x - 2)^2 \quad \text{מעלים את שני האגפים בריבוע}$$

$$x = x^2 - 4x + 4 \quad \text{ופותרים את המשוואה}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$$

$$\sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4 \quad \text{השורש } x = 4 \text{ מאמת את משוואה המקורית:}$$

$$\sqrt{1} + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 1 \quad \text{השורש } x = 1 \text{ אינו מאמת אותה}$$

הסיבה לכך היא, שבהעלאת שני אגפים בריבוע, מתקבלים פתרונות למשוואה נוספת, והיא

$$-\sqrt{x} = x - 2$$

ב. בפתרון של משוואה אי-רציונלית שמכילה **יותר משורש ריבועי אחד**:

- **מרכזים את השורשים באגף אחד.**

- **מעלים את שני האגפים בריבוע.**

- **מכנסים אברים דומים.**

- **היות שעדין נשאר שורש חוזרים על התהליך הנ"ל.**

למשל, במשוואה

$$6 - \sqrt{x-5} = \sqrt{x+7}$$

נרכז שורשים באגף אחד

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = 6$$

מעלים בריבוע

$$x + 7 + 2\sqrt{x+7}\sqrt{x-5} + x - 5 = 36$$

מפשטים

$$2\sqrt{(x+7)(x-5)} = 34 - 2x$$

$$\sqrt{(x+7)(x-5)} = 17 - x$$

ושוב מעלים בריבוע

$$(x+7)(x-5) = (17-x)^2$$

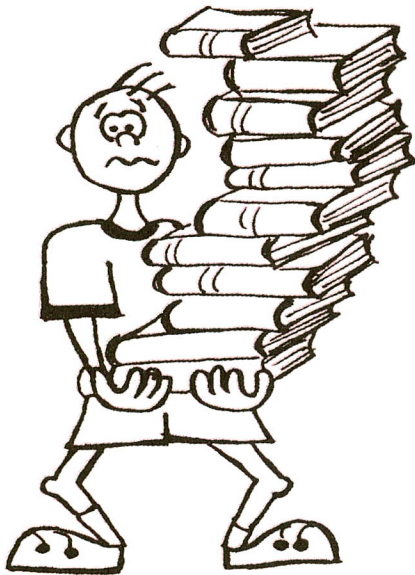
$$x^2 - 5x + 7x - 35 = 289 - 34x + x^2$$

$$36x = 324 \Rightarrow x = 9$$

השורש מאמת את השויון:

$$6 - \sqrt{9-5} = 6 - 2 = 4$$

$$\sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$$



**איזה רציונל (היטיון באצט)**

**זה לא נאוד כל כך הרבה?**

## 5. משוואה דו-ריבועית

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה  $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ . זוהי משוואה שבה הנעלם מופיע בחזקות 4 ו-2.

פתרון משוואה מסוג זה נעשה באמצעות ההצבה  $x^2 = t$  ואז  $x^4 = t^2$  מתקבלת משוואה ריבועית

$$At^2 + Bt + C = 0$$

ולה לכל היותר שני פתרונות שונים:  $t_1, t_2$ .

בשלב שני פותרים שתי משוואות:

$$x^m = t_1, \quad x^m = t_2$$

שפתרונותיהם הם פתרונות המשוואה המקורית.



1.  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$$x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2$$

נציב

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

מתקבל

$$\Rightarrow (t-1)(t-9) = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 9$$

פתרונותיה

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

נחזור להצבה

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 3$$

למשוואה הנתונה, ארבעה פתרונות שונים.

2.  $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = -1$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \phi$$

למשוואה הנ"ל שני פתרונות בלבד, בתחום המספרים הממשיים.

באותה דרך פותרים כל משוואה מהצורה  $Ax^{2m} + Bx^m + C = 0$  (שבה הנעלם מופיע בחזקות, כך שהמעריך של אחת הוא כפליים המעריך של השניה (2m הוא כפליים m)).

פתרון משוואה מסוג זה נעשה ע"י הצבה דומה לקודמת:  $x^m = t$  ואז  $x^{2m} = t^2$  מתקבלת משוואה ריבועית.

$$3. \quad x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

$$t^2 - 7t - 8 = 0 \quad \text{נציב } x^3 = t \text{ ואז } x^6 = t^2 \text{ מתקבל:}$$

$$(t-8)(t+1) = 0 \Rightarrow t_1 = 8, \quad t_2 = -1$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$$

נחזור להצבה

$$x^3 = -1 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$$

למשוואה זו שני תשובות בתחום המספרים הממשיים.

## 6. מערכת משוואות ריבועית.

במערכת משוואות ממעלה שניה - מערכת ריבועית, לפחות אחת מהמשוואות היא ממעלה שניה.

בפתרון מערכת משוואות ריבועית, נוהגים לפי אותו עיקרון כמו במערכת ממעלה ראשונה: להגיע למשוואה עם נעלם אחד.

השיטה השכיחה במקרה זה היא שיטת ההצבה והמשוואה המתקבלת היא ריבועית.



$$1. \quad \begin{cases} x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

מבודדים את  $x$  מהמשוואה הראשונה ומציבים בשניה, מתקבלת משוואה ריבועית.

$$(y+1) \cdot y = 6$$

$$y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow (y+3)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = -3, \quad y_2 = 2$$

$$x_1 = y_1 + 1 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

פתרונות המערכת הם:  $(-2; -3), (3; 2)$

$$2. \quad \begin{cases} x - 2y = 2 \Rightarrow x = 2y + 2 \\ y^2 - 2x = -7 \end{cases}$$

$$y^2 - 2(2y + 2) + 7 = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

מתקבלת משוואה ריבועית

יש להיזהר מהטעות הנפוצה, שלפיה בהתרת משוואה ריבועית שהנעלם בה הוא  $y$ , כותבים מתוך הרגל את הנוסחה למציאת שורשי המשוואה הריבועית ל- $x$ , כלומר  $x_{1,2}$ .

נפתור את המשוואה בעזרת הנוסחה "הזוגית", כאשר  $A=1$

$$y_{1,2} = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8$$

פתרונות המערכת הם:  $(4; 1)$ ,  $(8; 3)$

מערכת משוואות זו ניתן לפתור גם בעזרת שיטת השוואת מקדמים, לביטול  $x$ :

$$\begin{cases} x - 2y = 2/ \cdot 2 \\ y^2 - 2x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ -2x + y^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4y = -3$$

וממשיכים את הפתרון כמקודם.

3. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \end{cases}$$

$$x^2 + \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \cdot x^2$$

מתקבלת משוואה דו ריבועית

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-2}{\pm 2} = \mp 1$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1 \Rightarrow y_{3,4} = \mp 2$$

למעשה, זאת מערכת ממעלה רביעית, כי היא מורכבת משתי משוואות ממעלה שניה (מעלת מערכת משוואות שווה למכפלת מעלות המשוואות המרכיבות אותה).

זו הסיבה שהתקבלו ארבעה פתרונות:  $(2; -1)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(1; -2)$ ,  $(-1; 2)$

את המערכת הנ"ל אפשר לפתור גם בשיטה אחרת: להכפיל את שני אגפי המשוואה השניה ב-2.

4. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

מחיבור המשוואות מתקבל

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9$$

ומחיסורן

מתקבלת מערכת משוואות חדשה, שצורתה - אחרי פרוק לגורמים :

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 1 & \Rightarrow x+y = \pm 1 \\ (x-y)^2 = 9 & \Rightarrow x-y = \pm 3 \end{cases}$$

מתקבלות ארבע מערכות משוואות ממעלה ראשונה :

$$\text{I} \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{IV} \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2, -1)$$

$$\Rightarrow (-1, 2)$$

$$\Rightarrow (1, -2)$$

$$\Rightarrow (-2, 1)$$

וקיבלנו אותם פתרונות כמו קודם.

$$5. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$2x^2 + 2y^2 = 4$$

מחיבור שתי המשוואות מתקבלת המשוואה

$$2xy = -2$$

ומחיסורן :

מתקבלת מערכת משוואות חדשה, שפותרים אותה בדומה לפתרון בדוגמה 3.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = -1 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t-1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_{1,2} = \mp 1$$

ופתרונות המערכת :  $(1; -1)$ ,  $(-1; 1)$  - כל אחד פתרון כפול.

$$6. \begin{cases} xy = 3 \\ (x-1)(y+2) = xy - 1 \end{cases}$$

פתיחת סוגרים וכינוס אברים דומים :

$$\begin{cases} xy = 3 \\ xy + 2x - y - 2 = xy - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3 \\ 2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$x(2x-1) = 3$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(-3)}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.5$$

הפתרונות:  $(-1; -3)$   $(1.5; 2)$

המערכת שבדוגמה 5 מכילה איברים בעלי אותה מעלה - 2. זוהי מערכת הומוגנית. מערכות כאלה ניתן לפתור בדרך נוספת, ע"י הצבה:  $x=ty$

$$7. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2(t^2 + t + 1) = 1 \\ y^2(t^2 - t + 1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 y^2 + t y^2 + y^2 = 1 \\ t^2 y^2 - t y^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

נחלק את המשוואה השנייה בראשונה (או ההיפך) ונקבל משוואה ריבועית:

$$\frac{y^2(t^2 - t + 1)}{y^2(t^2 + t + 1)} = 3 \Rightarrow t^2 - t + 1 = 3(t^2 + t + 1) \Rightarrow 2t^2 + 4t + 2 = 0 \quad /:2$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x = -y$$

נציב את הערך של  $t$  במשוואה השנייה, ונקבל:

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2(1+1+1) = 3 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1, -1) \\ (-1, 1) \end{cases}$$

## תרגילים

### סעיף 2

א. פתר את המשוואות הבאות בעזרת פרוק לגורמים - ע"י הוצאת גורם משותף

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. $x^2 - 8x = 0$                    | 2. $3x^2 + 9x = 0$                        |
| 3. $5x - 4x^2 = 0$                   | 4. $2x^2 = 6x$                            |
| 5. $-5x^2 = 20x$                     | 6. $-8x^2 - 2x = 0$                       |
| 7. $3x(x+2) - 4x = 0$                | 8. $x^2 - 5x = 3(x-2) + 6$                |
| 9. $2(x-1) + 3 = 3x^2 + 1$           | 10. $x(x-2) = 5x + 3x^2$                  |
| 11. $x^2(3-x) + x(x^2-1) = 0$        | 12. $4 - 5x - 2(2-x^2) = 0$               |
| 13. $(3x-5)^2 - 13 = 3(x+4)$         | 14. $(3x+1)(3x-1) = \frac{1}{2}(x-2)$     |
| 15. $\frac{2x-3}{2} = \frac{9}{x-6}$ | 16. $\frac{3x-2}{x-3} = \frac{5x+4}{6-x}$ |
| 17. $2x^3 - 10x = 0$                 | 18. $3x^2 - 6x^3 = 0$                     |

### תשובות

1. 0, 8, 2. 0, -3, 3.  $0, 1\frac{1}{4}$ , 4. 0, 3, 5. 0, -4, 6.  $0, -\frac{1}{4}$ , 7.  $0, -\frac{2}{3}$ , 8. 0, 8,  
 9.  $0, \frac{2}{3}$ , 10. 0, -3.5, 11.  $0, \frac{1}{3}$ , 12. 0, 2.5, 13.  $0, 3\frac{2}{3}$ , 14.  $0, \frac{1}{18}$ , 15. 0, 7.5,  
 16.  $0, 3\frac{7}{8}$ , 17.  $0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ , 18.  $0, \frac{1}{2}$ .

ב. פתור את המשוואות הבאות בעזרת פרוק לגורמים לפי הנוסחה :

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1. $x^2 - 9 = 0$                    | 2. $4 - x^2 = 0$                        |
| 3. $2x^2 - 8 = 0$                   | 4. $3x^2 - 27 = 0$                      |
| 5. $5x^2 = 5$                       | 6. $2x^2 + 8 = 0$                       |
| 7. $4x^2 - 25 = 0$                  | 8. $18x^2 = 8$                          |
| 9. $x^2 - 5 = 0$                    | 10. $6x^2 - 18 = 0$                     |
| 11. $x^2 - 0.25 = 0$                | 12. $2x^2 - 0.18 = 0$                   |
| 13. $0.04x^2 = 1$                   | 14.* $(x+1)^2 - 4 = 0$                  |
| 15. $\frac{x-2}{9} = \frac{1}{x-2}$ | 16.* $\frac{(3-x)}{12} = \frac{3}{x-3}$ |

תשובות:

1. 3, -3, 2. 2, -2, 3. 2, -2, 4. 3, -3, 5. 1, -1, 6.  $\phi$ , 7.  $2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}$ , 8.  $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ ,  
9.  $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ , 10.  $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ , 11. 0.5, -0.5, 12. 0.3, -0.3, 13. 5, -5, 14. 1, -3, 15. 5, -1, 16.  $\phi$

ג. פתור את התרגילים שבתרגיל ב' ע"י הוצאת שורש ריבועי:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

ד. פתור את המשוואות הבאות בעזרת פרוק לגורמים לפי הנוסחות:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x^2 - 6x + 9 = 0$                               | 2. $x^2 + 8x + 16 = 0$                              |
| 3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$                              | 4. $25x^2 - 20x + 4 = 0$                            |
| 5. $16 + 8x + x^2 = 0$                              | 6. $6x - 9x^2 - 1 = 0$                              |
| 7. $x(x - 5) + 16 = 3x$                             | 8. $2(x - 3) + 31 = x(12 - x)$                      |
| 9. $3(4x - 3) - x(x - 2) = 40$                      | 10. $x(7 - x) - 28 = 9(x - 3)$                      |
| 11. $\frac{4x - 1}{3 - 7x} = \frac{1 - 4x}{2 - 3x}$ | 12. $\frac{4x + 3}{3x - 4} = \frac{-7 - x}{4 - 3x}$ |
| 13. $x^3 + 12x^2 + 36x = 0$                         | 14. $-2x^3 + 28x^2 - 98x = 0$                       |
| 15.* $x^2 - 6x + 9 = 16$                            | 16.* $x^2 + 8x + 16 = 4$                            |
| 17.* $25x^2 + 10x + 1 = 25$                         | 18.* $x^2 - 4x + 4 = 2$                             |

תשובות

1. 3, 3, 2. -4, -4, 3.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ , 4.  $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}$ , 5. -4, -4, 6.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ , 7. 4, 4, 8. 5, 5,  
9. 7, 7, 10. -1, -1, 11.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ , 12.  $\phi$ , 13. 0, -6, -6, 14. 0, 7, 7, 15. 7, -1,  
16. -2, -6, 17.  $-1\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ , 18.  $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ .

ה. פתור את המשוואות הבאות בעזרת פרוק לגורמים של טרינום (בתרגילים 1-10 יש להעזר בפרוק מיידי):

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - 6x + 8 = 0$      | 2. $x^2 + 7x + 12 = 0$      |
| 3. $x^2 - 4x + 3 = 0$      | 4. $5x - x^2 - 4 = 0$       |
| 5. $x^2 - 5x - 14 = 0$     | 6. $x^2 + 4x - 12 = 0$      |
| 7. $-x^2 - 11x + 12 = 0$   | 8. $18 - 7x - x^2 = 0$      |
| 9. $x^3 - 17x^2 - 60x = 0$ | 10. $3x^2 - 3x^3 + 36x = 0$ |
| 11. $3x^2 - 11x + 6 = 0$   | 12. $5x^2 - 2x - 3 = 0$     |
| 13. $6x^2 - 7x - 5 = 0$    | 14. $7x^2 - 17x + 6 = 0$    |
| 15. $-9x^2 + 3x + 2 = 0$   | 16. $8x^3 - 10x^2 - 3x = 0$ |

## תשובות

1. 2, 4, 2. -3, -4, 3. 1, 3, 4. -4, 1, 5. -2, 7, 6. -6, 2, 7. -12, 1, 8. -9, 2, 9. 0, 20, -3,  
10. -3, 0, 4, 11.  $\frac{2}{3}, 3$ , 12.  $-\frac{3}{5}, 1$ , 13.  $-\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}$ , 14.  $2, \frac{3}{7}$ , 15.  $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ,  
16.  $-\frac{1}{4}, 0, 15$ .

## סעיף 3

ג. פתר בעזרת נוסחת השורשים

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 - 7x + 12 = 0$   | 2. $x^2 + 3x + 2 = 0$     |
| 3. $x^2 - 3x - 18 = 0$   | 4. $4 + x^2 + 5x = 0$     |
| 5. $x^2 + 3x - 18 = 0$   | 6. $x - 6 + x^2 = 0$      |
| 7. $-x^2 + 9x - 8 = 0$   | 8. $-x^2 - 7x + 18 = 0$   |
| 9. $x - x^2 + 12 = 0$    | 10. $24 + 5x - x^2 = 0$   |
| 11. $2x^2 + 7x + 5 = 0$  | 12. $4x^2 - 11x + 6 = 0$  |
| 13. $2x^2 + 5x - 25 = 0$ | 14. $5x^2 - 13x + 6 = 0$  |
| 15. $10x^2 - x - 2 = 0$  | 16. $2x^2 + 11x - 13 = 0$ |
| 17. $2 - 9x^2 - 3x = 0$  | 18. $21x + 50 - 2x^2 = 0$ |
| 19. $3x^2 - 5x = 0$      | 20. $4x^2 - 36 = 0$       |
| 21. $17x - 34x^2 = 0$    | 22. $8 - 50x^2 = 0$       |

## תשובות

1. 3, 4, 2. -2, -1, 3. 6, -3, 4. -1, -4, 5. -6, 3, 6. -3, 2, 7. 8, 1, 8. -9, 2,  
9. -3, 4, 10. -3, 8, 11.  $-2\frac{1}{2}, -1$ , 12.  $\frac{3}{4}, 2$ , 13.  $-5, 2\frac{1}{2}$ , 14.  $2, \frac{3}{5}$ , 15.  $-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ ,  
16.  $-6\frac{1}{2}, 1$ , 17.  $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ , 18.  $-2, 12\frac{1}{2}$ , 19.  $0, 1\frac{2}{3}$ , 20. 3, -3, 21.  $0, \frac{1}{2}$ , 22.  $\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}$

ד. פתור את המשוואות הבאות בעזרת הנוסחה "הזוגית"

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $x^2 - 8x + 15 = 0$   | 2. $x^2 + 6x - 16 = 0$   |
| 3. $-x^2 + 12x - 20 = 0$ | 4. $3x^2 + 20x + 25 = 0$ |
| 5. $3x^2 - 22x + 24 = 0$ | 6. $x^2 - 34x + 280 = 0$ |
| 7. $4x + 5x^2 - 1 = 0$   | 8. $3x^2 + 4 - 8x = 0$   |
| 9. $9 + 18x - 7x^2 = 0$  | 10. $9 - 4x^2 + 16x = 0$ |

## תשובות

1. 3, 5, 2. -8, 2, 3. 2, 10, 4. -5,  $-1\frac{2}{3}$ , 5.  $1\frac{1}{3}, 6$ , 6. 14, 20, 7.  $-1, \frac{1}{5}$ ,  
8.  $2, \frac{2}{3}$ , 9.  $3, -\frac{3}{7}$ , 10.  $4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

ח. הבא לצורה הפשוטה ביותר ופתור בעזרת הנוסחה המתאימה

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. $3x^2 + 6x = 2(x^2 + 8)$            | 2. $4(x + 2) + x(x + 1) = 4$          |
| 3. $2x(x + 5) = 3x - 5$                | 4. $5x(x - 3) = 2(3 - x) - 12$        |
| 5. $(x - 5)(x + 1) + 5 = 0$            | 6. $(2 - x)(x + 7) + 10 = 0$          |
| 7. $(x + 5)^2 - 6x = 70$               | 8. $(x - 3)^2 = 5 - x$                |
| 9. $(x - 1)^2 - 3x = 2x + 9$           | 10. $(x - 2)(x + 2) + 1 = 2x(1 - 2x)$ |
| 11. $3(x + 3)(x - 3) + 11 = 11(x - 2)$ | 12. $x(2x - 3) = 4 - (2x - 1)^2$      |
| 13. $(2x + 3)^2 - 3x(x + 6) = 4$       | 14. $(3x - 4)^2 + 4(x + 1) = 5x^2$    |

### תשובות

1. 2, -8, 2. -1, -4, 3. -1, -2.5, 4. 2, 0.6, 5. 0, 4, 6. 3, -8, 7. 5, -9, 8. 1, 4,  
9. -1, 8, 10.  $1, -\frac{3}{5}$ , 11.  $3, \frac{2}{3}$ , 12.  $1.5, -\frac{1}{3}$ , 13. 1, 5, 14.  $\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ .

ט. פתור את המשוואות הבאות בעזרת נוסחה ובדוק אם הפתרון נמצא בתחום ההגדרה שלהן.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $x + \frac{2}{x} = 3$                           | 2. $\frac{x}{3} + 1 = \frac{18}{x}$                |
| 3. $\frac{4}{3x} - \frac{5}{3} = 2x + \frac{1}{x}$ | 4. $\frac{5}{2x} - x = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$  |
| 5. $x - \frac{10}{x-1} = 4$                        | 6. $\frac{6}{x+2} = x - 3$                         |
| 7. $1 - \frac{4}{x+3} = \frac{x-1}{2}$             | 8. $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$               |
| 9. $\frac{8}{x-1} - 3 = \frac{3}{x}$               | 10. $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{2}{5}$    |
| 11. $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x}$   | 12. $\frac{6}{x-1} = 1 + \frac{5}{x+1}$            |
| 13. $\frac{4}{x-2} + \frac{6}{x+3} = 5$            | 14. $\frac{x+1}{x+5} + \frac{x}{x-1} = 2$          |
| 15. $\frac{x-1}{x-3} = 1 + \frac{2x-3}{x+2}$       | 16. $\frac{5x+9}{x+3} - 8 = \frac{x+11}{x+1}$      |
| 17. $\frac{2x+3}{2x-1} = 5 - \frac{x+2}{x-1}$      | 18. $1 + \frac{2x}{x+1} - \frac{21x-13}{3x+1} = 0$ |
| 19. $\frac{2x}{3(x+1)} + 1 = \frac{3x+3}{3x-1}$    | 20. $\frac{x+1}{2x-5} - \frac{4x}{3x+2} = -4$      |

$$21. \frac{x+4}{x-1} + \frac{x+3}{2x+1} = \frac{5}{x-1}$$

$$23. \frac{x-1}{2x-3} - \frac{x-2}{x+1} = 1$$

$$25. \frac{4}{x+2} - \frac{9}{x+9} = \frac{x+6}{3(x+2)}$$

$$27. \frac{x-1}{2x+4} = \frac{x+6}{9x+18} - \frac{x-3}{x-1}$$

$$29. \frac{x-2}{2x-6} + \frac{x+6}{2x+2} = \frac{2}{x-3}$$

$$31. \frac{x+1}{2x+10} + \frac{x-2}{4x-4} = \frac{x}{x+5}$$

$$33. \frac{4}{x+1} - \frac{3x}{x+2} = \frac{6}{(x+1)(x+2)}$$

$$35. \frac{3x-8}{x-2} - \frac{2x-5}{x+2} = \frac{4}{(x+2)(x-2)}$$

$$37. \frac{1-x}{x-2} + \frac{20}{x^2-4} = \frac{x-3}{x+2} - 1$$

$$39. \frac{3x+4}{x+3} - \frac{5}{x-3} + \frac{x+7}{3-x} = 0$$

$$41. \frac{3x+1}{4x-2} + \frac{2}{1-2x} = \frac{x}{2x+1}$$

$$43. \frac{4+3x}{6x-2} = \frac{6x+11}{15x+5} + \frac{6}{9x^2-1}$$

$$45. \frac{x-2}{x} + \frac{8}{x+6} = \frac{16}{x(x+6)}$$

$$47. \frac{x^2-64}{x^2-6x} + \frac{x-8}{x} = \frac{8-x}{x-6}$$

$$22. \frac{x-2}{3x+4} - \frac{2}{3} = \frac{x}{x-5}$$

$$24. \frac{x+2}{x-5} - \frac{x-4}{2x-1} = 4$$

$$26. \frac{3-x}{x-1} + \frac{2x}{x+3} = \frac{x+7}{5x-5}$$

$$28. \frac{2x+1}{6x-9} + \frac{4x-1}{2x+4} = \frac{2x-1}{2x-3}$$

$$30. \frac{2x+1}{6x-3} - \frac{x+2}{2x-1} = \frac{5}{3x+3}$$

$$32. \frac{x-1}{2x-4} - \frac{x}{3x+3} = \frac{1}{6x-12}$$

$$34. \frac{3}{x-2} - \frac{2x}{x+3} = \frac{4x}{(x-2)(x+3)}$$

$$36. \frac{x^2-2}{(x+3)(x-3)} - \frac{7}{x+3} = \frac{1}{x-3}$$

$$38. \frac{18}{x^2-16} = \frac{x-3}{2(x-4)} + \frac{2x-1}{x+4}$$

$$40. \frac{x+3}{2x+4} - \frac{x-5}{2-x} + \frac{9}{x-2} = 0$$

$$42. \frac{2x+5}{3(2x+3)} + \frac{4}{4x^2-9} = \frac{2x+1}{2(2x-3)}$$

$$44. \frac{6x-1}{4x^2-9} + \frac{10x+9}{6-4x} = \frac{2x-7}{6x+9}$$

$$46. \frac{x}{x-4} + \frac{x+6}{x^2-4x} = 5 - \frac{6}{x}$$

$$48. \frac{x+7}{2x} - \frac{x-1}{x+8} - \frac{9}{x^2+8x} = 3$$

$$49. \frac{x+2}{x^2} - \frac{15x}{x^2+x} = \frac{1}{x}$$

$$50. \frac{3x+4}{x^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x-1}{x^2+2x} = 0$$

$$51. \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{3-x}{x-1} = \frac{3x-4}{2x-2}$$

$$52. \frac{3x+1}{(x+2)^2} + \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{3}{x-2}$$

$$53. \frac{x+5}{4x^2-1} - \frac{6}{4x+2} = \frac{2-x}{(2x-1)^2}$$

$$54. \frac{6x}{(3x+2)^2} - \frac{3x+4}{9x^2-4} + \frac{3}{2-3x} = 0$$

$$55. \frac{2x+1}{2x^2-5x} + \frac{15}{15-6x} = \frac{2(2x+1)}{(2x-5)^2}$$

$$56. \frac{5(x+2)}{2x+6} - \frac{x}{6-2x} = 2 + \frac{2x+1}{x^2-9}$$

$$57.* \frac{x+1}{3x^2+x} + \frac{2x-1}{x-3x^2} = \frac{6(x-1)}{9x^2-1}$$

$$58.* \frac{4(x-1)}{x^2+2x} - \frac{3x-4}{4x-2x^2} = \frac{5x-8}{x^2-4}$$

$$59.* \frac{12x-5}{16x^2-9} - \frac{2(2x-1)}{9x-12x^2} = \frac{-1}{8x^2+6x}$$

$$60.* \frac{x+4}{x^2-4} = \frac{6}{2-x} + \frac{x+13}{x^2-x-6}$$

$$61.* \frac{x-1}{x^2-2x-3} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-4x+3}$$

$$62.* \frac{x-1}{x^2-4} - \frac{3x+5}{x^2+x-2} = \frac{2x+7}{x^2-3x+2}$$

$$63.* \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} - \frac{8}{4x^2-1} = \frac{6x-5}{2x^2-x-1}$$

$$64.* \frac{x^2-2}{x^2+x-2} + \frac{3x+2}{x^2-4} = 1 - \frac{2+x}{x^2-3x+2}$$

$$65.* \left( \frac{x}{2x-4} + \frac{2}{x^3-4x^2+4x} : \frac{1}{2-x} \right) \cdot 2x^2 = -1$$

$$66.* \frac{x-2}{x^3+1} \cdot \left( \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{4}$$

### תשובות

1. 1, 2, 2. 6, -9, 3. -1,  $\frac{1}{6}$ , 4. -3,  $\frac{1}{2}$ , 5. -1, 6, 6. 4, -3, 7. -1, 1, 8. -1, 3,  
 9. - $\frac{1}{3}$ , 3, 10. -4 $\frac{1}{2}$ , 5, 11. -1, 3, 12. -3, 4, 13. 3, -2, 14. 3, 15.  $\frac{1}{2}$ , 5,  
 16. -2, -6, 17. 2 $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ , 18. 1, -1 $\frac{1}{6}$ , 19. 3, - $\frac{2}{3}$ , 20. -1, 2, 21. -1 $\frac{1}{3}$ ,  
 22. 2, -2 $\frac{11}{12}$ , 23. 2,  $\frac{2}{3}$ , 24. 4 -  $\sqrt{10}$ , 4 +  $\sqrt{10}$ , 25. 0, -30, 26. 2, 3, 27. 3, -1.16,

22.  $2, -2\frac{11}{12}$ , 23.  $2, \frac{2}{3}$ , 24.  $4 - \sqrt{10}, 4 + \sqrt{10}$ , 25.  $0, -30$ , 26.  $2, 3$ , 27.  $3, -1, 16$ ,  
 28.  $\frac{5}{8}, 2\frac{1}{2}$ , 29.  $4$ , (3 אינו פתרון), 30.  $0, -16$ , 31.  $3, 4$ , 32.  $-4, 1$ , 33.  $-\frac{2}{3}, 1$ ,  
 34.  $-1\frac{1}{2}, 3$ , 35.  $-10, 3$ , 36.  $4, 4$ , 37.  $6$ , 38.  $-1.6, 5$ , 39.  $12, -2$ ,  
 40.  $-1, -3\frac{1}{3}$ , 41.  $-1, 1.5$ , 42.  $-2.5$ , 43.  $-3, \frac{2}{3}$ , 44.  $\phi$ , 45.  $-14, 2$ , 46.  $6, \frac{3}{4}$ ,  
 47.  $-\frac{2}{3}, 8$ , 48.  $-5\frac{3}{7}, 1$ , 49.  $-\frac{2}{3}, 2$ , 50.  $-2\frac{2}{3}, -1$ , 51.  $-1, 2$ , 52.  $-1\frac{1}{5}, 3$ ,  
 53.  $1, 1\frac{1}{4}$ , 54.  $-3\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ , 55.  $\frac{1}{2}, 1$ , 56.  $1, 2$ , 57.  $1$ , 58.  $4$ , 59.  $\frac{21}{52}, \frac{1}{2}$ ,  
 60.  $-1, 3\frac{2}{3}$ , 61.  $2, 7$ , 62.  $\frac{-3-\sqrt{6}}{2}, \frac{-3+\sqrt{6}}{2}$ , 63.  $0, 1.5$ , 64.  $-\frac{2}{3}, -1$ ,  
 65.  $-1$ , 66.  $-3$ .

#### סעיף 4

י. פתור את המשוואות האי-רציונליות הבאות:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\sqrt{x^2 - 3x} = 2$                  | 2. $x = \sqrt{5x - 6}$                                 |
| 3. $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 5}$          | 4. $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{5x - 6}$                     |
| 5. $\sqrt{10x - 1} = x + 2$               | 6. $\sqrt{2x^2 - 15} = \sqrt{x^2 + 10}$                |
| 7. $\sqrt{x + 3} + 3 = x$                 | 8. $\sqrt{x + 7} - \sqrt{6 - x} = 1$                   |
| 9. $\sqrt{x + 6} = 5 - \sqrt{x + 1}$      | 10. $\sqrt{13 - 6x} + \sqrt{37 - 6x} = 2\sqrt{2x + 5}$ |
| 11. $x^2 + 2x = 12 - \sqrt{x^2 + 2x + 8}$ | 12. $2\sqrt{x^2 - 8x + 40} - 5 = x^2 - 8x$             |

#### תשובות

1.  $4$ , 2.  $2$ , 3.  $-1$ , 4.  $\phi$ , 5.  $1, 5$ , 6.  $-5, 5$ , 7.  $6$ , 8.  $2$ , 9.  $3$ , 10.  $2$ , 11.  $2$ , 12.  $-1, 9$

#### סעיף 5

יא. פתור את המשוואות הבאות

- |                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  | 2. $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$      |
| 3. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$  | 4. $25x^4 - 24x^2 - 1 = 0$    |
| 5. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$    | 6. $9x^4 - 31x^2 + 12 = 0$    |
| 7. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$    | 8. $x^4 - 4x^2 - 32 = 0$      |
| 9. $2x^4 - 15x^2 - 8 = 0$  | 10. $3x^4 - 27 = 0$           |
| 11. $2x^4 - 50x^2 = 0$     | 12. $5x^4 + 20x^2 = 0$        |
| 13. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$ | 14. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$      |
| 15. $x^6 + 3x^3 + 2 = 0$   | 16. $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$    |
| 17. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ | 18. $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$ |
| 19.* $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$  | 20.* $x^4 - 6x^2 - 1 = 0$     |

## תשובות

1. 2, -2, 3, -3,    2. 2, -2,    3. 3, -3,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,    4. 1, -1,    5. 2, -2,  $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  
 6.  $\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{2}{3}$ ,    7.  $\phi$ ,    8.  $2\sqrt{2}$ ,  $-2\sqrt{2}$ ,    9.  $2\sqrt{2}$ ,  $-2\sqrt{2}$ ,    10.  $\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3}$   
 11. 0, 0, 5, -5,    12. 0, 0,    13. 3, 1,    14. -2, 1,    15. -1,  $-\sqrt[3]{2}$ ,    16. 2, -2, 1, -1,  
 17. 2, -2,    18. 2, -1,    19.  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ,  $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ,  $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ,  
 20.  $\sqrt{3+\sqrt{10}}$ ,  $-\sqrt{3+\sqrt{10}}$

## סעיף 6

יב. פתור את מערכות המשוואות הריבועיות הבאות:

$$1. \begin{cases} y = x^2 - 9x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = -5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 11 \\ y = x \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = 2x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y = x^2 + 3x + 2 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = 4y^2 - y - 2 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2y = x^2 - 8x + 5 \\ 2y = -x - 7 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5y = 2x^2 + 2x - 15 \\ 5y = x^2 + x + 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y = -2x^2 + 3x + 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y = x^2 + 4 + 5x \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x^2 - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2y^2 - 3x - 1 = 0 \\ 6x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} xy = -12 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} xy = 16 \\ x = 3y + 2 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} xy = 18 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} xy + 2x = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3y + 2xy = -4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 4 \\ 2y + 5x = 4 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x^2 + 5xy = -3 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -2xy + 3x^2 = 1 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} y^2 - x^2 - xy = 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 40 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 25y^2 - 11 = x^2 - 5xy \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} (x+y)(x-2y) = -2 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 = -3 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} 9x^2 + xy - 4y^2 = -4 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} xy = 6 \\ (x+1)(y-1) = 6 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} y^2 - 2x^2 = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 16 \\ 6y - x = -1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 9y^2 - 4x^2 = -7 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 3xy + 2y^2 = 6 \\ 4y - 3x = 9 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3y^2 - 5 = xy \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 1 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 6xy - x^2 + 4y^2 = 17 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 11 - 2xy = x^2 - 4y^2 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 27 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2 \\ xy = -12 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} x^2 + 3xy + 4y^2 = 2 \\ xy = -1 \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} xy = 12 \\ (x+2)(y+1) = 25 \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} xy = 36 \\ (x+7)(y+10) = 3 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} (x-1)(y+3) = xy \\ xy - 2y = 6 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} (x-4)(y-6) = xy \\ xy = 2(5x+1) \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} (x-3)(y+4) = xy \\ x(y-1) = 2x+6 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} 2x^2 + 5xy + 2y^2 = -4 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 20 \end{cases}$$

$$51^*. \begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ xy + y^2 = 15 \end{cases}$$

$$52^*. \begin{cases} 9y^2 - 6xy = 24 \\ 6xy - 4x^2 = 8 \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73 \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} x^2 + 3xy = 18 \\ xy + 4y^2 = 7 \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 3x^2 - 4x + y^2 = 40 \\ 2x^2 + 3x + y^2 = 52 \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 68 \\ x^2 - y^2 + x - y = 44 \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} \frac{y}{y-2} + \frac{x}{x+3} = 2\frac{2}{5} \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = -4\frac{5}{9} \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$59^* \begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

$$60^* \begin{cases} x - y = 5 \\ x^3 - y^3 = 335 \end{cases}$$

$$61^* \begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + y^3 + 2x^2 - y = 9 \end{cases}$$

### תשובות

1. (1,0), (8,0)   2. (1,-5), (5,-5)   3. (-1,-1), (5.5,5.5)   4. (2,1), (1.5,0.5)  
 5. (2,12), (-2,0)   6. (5.5,1.5), (3,-1)   7. (3,-5), (4,-5.5)   8. (4,5), (-5,5)  
 9. (3.5,-7); (-1,2)   10. (-3,-2); (-1.5,-1.25)   11. (1,-2); (-7,22)  
 12. ( $\frac{1}{3}, -1$ ), ( $-\frac{7}{24}, -\frac{1}{4}$ )   13. (4,-3), (-3,4)   14. (8,2), ( $-6, -2\frac{2}{3}$ )  
 15. (3,2), (2,3)   16. (3,6), (-2.4,-7.5)   17. (2,-1), ( $\frac{2}{3}, 1$ )  
 18. ( $\frac{1}{2}, -1$ ), (-1,-4)   19. (1,2), (-2,-1)   20. (2,-3), ( $-\frac{6}{7}, -1\frac{4}{7}$ )

21.  $(1, -\frac{1}{2}), (\frac{3}{7}, \frac{13}{14})$  22.  $(-5, -1), (4\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$  23.  $(3, 2)$  24.  $(2, 1)$   
 25.  $(-1, 1), (6, -2.5)$  26.  $(-\frac{1}{3}, 2), (-3\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$  27.  $(-1, -1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$   
 28.  $(-2, 1), (1\frac{1}{6}, -1\frac{1}{9})$  29.  $(-3, -5), (1, -1)$  30.  $(-1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$   
 31.  $(3, 2), (-2\frac{1}{6}, -3\frac{1}{6})$  32.  $(-1, 3), (-8, 13.5)$  33.  $(-2, 1), (1, -\frac{4}{5})$   
 34.  $(9, 7), (-4, \frac{1}{2})$  35.  $(1, 1)$  36.  $(-1, 2)$  37.  $(3, -2)$  38.  $(4, 5)$   
 39.  $(3, 2), (2, 3), (-3, -2), (-2, -3)$  40.  $(3, -4), (-3, 4)$  41.  $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}), (-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$   
 42.  $(2, -\frac{1}{2}), (-2, \frac{1}{2}), (1, -1), (-1, 1)$  43.  $(-3, -2), (2, 3)$  44.  $(3, 4), (8, 1.5)$   
 45.  $(-4, -9), (-6.3, -5\frac{5}{7})$  46.  $(0, -3), (3, 6)$  47.  $(-\frac{2}{3}, 7), (-2, 9)$   
 48.  $(6, 4), (-\frac{3}{4}, -5)$  49.  $(3, -1), (-3, 1), (1, -3), (-1, 3)$  50.  $(2, -2), (-2, 2)$   
 51.  $(2, 3), (-2, -3)$  52.  $(1, 2), (-1, -2)$  53.  $(\pm 3, \pm 5), (\pm 8, \mp 5)$   
 54.  $(\pm 3, \pm 1), (\pm 12, \mp 3.5)$  55.  $(3, \pm 5), (4, \pm 2\sqrt{2})$  56.  $(7, 3), (7, -4), (-8, 3),$   
 $(-8, -4)$  57.  $(2, 4), (-12, 32)$  58.  $(4, -5), (1\frac{11}{17}, 2\frac{1}{17})$  59.  $(2, 3), (3, 2)$   
 60.  $(7, 2), (-2, -7)$  61.  $(1, 2), (\frac{15}{11}, \frac{18}{11})$ .

יג. העזר בהצבות לפתרון המערכות הבאות :

$$1^* \begin{cases} x + y = 2.5 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2^* \begin{cases} \frac{3x}{y} + \frac{2y}{x} = 5 \\ 3x - y = 0.5 \end{cases}$$

$$3^* \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = -\frac{10}{3} \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$4^* \begin{cases} \frac{x+2y}{3x-y} + \frac{y-3x}{x+2y} = \frac{15}{4} \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$5^* \begin{cases} \frac{4x+y}{2x-3y} + \frac{4x-6y}{4x+y} = 8\frac{1}{4} \\ x + xy = -1 \end{cases}$$

$$6^* \begin{cases} \frac{2y-5x}{x-2y} - \frac{6y-3x}{2y-5x} = -3\frac{1}{2} \\ x^2 - xy = 2.5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 + 3xy = 7 \\ xy + 3y^2 = 14 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^2 - 4y^2 = -3 \\ 3 - 2y^2 = xy \end{cases}$$

$$10^*. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy - (x + y) = 5 \end{cases}$$

$$11^* \begin{cases} xy + x + y = 31 \\ x^2 + y^2 - (x + y) = 48 \end{cases}$$

$$12^{**} \begin{cases} x + y = 20 \\ x^3 + y^3 = 26(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$13^{**} \begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$14^{**} \begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

$$15^{***} \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

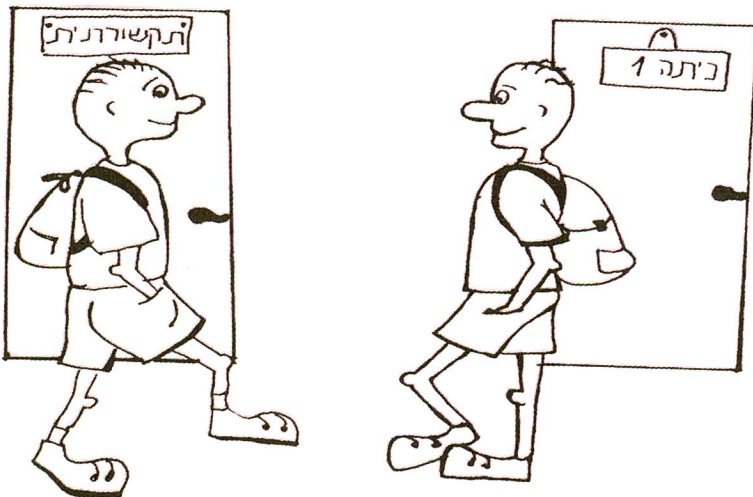
$$16^{***} \begin{cases} x + y = 5 \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 50 \end{cases}$$

תשובות:

1.  $(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)$  2.  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  3.  $(-7, -14), (1, -2)$  4.  $(-1, 1), (\frac{12}{73}, \frac{22}{73})$   
 5.  $(-\frac{1}{2}, 1), (1, -2)$  6.  $(1, -1.5), (-1, 1.5)$  7.  $(\pm 3, \pm 1), (\pm 2\sqrt{2}, \pm \sqrt{2})$   
 8.  $(1, 2), (-1, -2)$  9.  $(\pm 1, \pm 1)$  10.  $(-1, -2), (-2, -1)$  11.  $(7, 3), (3, 7)$   
 12.  $(30, -10), (-10, 30)$  13.  $(3, 2), (2, 3)$  14.  $(3, 2), (2, 3)$  15.  $(2, 3), (3, 2)$   
 16.  $(2, 3), (3, 2), (\frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}, \frac{5 \mp \sqrt{41}}{2})$ .

יוסי: "זו משוואה ממצלמה ראשונה."

מוטי: "איפה מצלמה ראשונה? רק ממצרות יש לה!..."



## פרק ט': חקירת המשוואה הריבועית

### 1. מספר הפתרונות.

כפי שראינו, פתרונות המשוואה הריבועית:  $Ax^2+Bx+C=0$  מתקבלים באמצעות הנוסחה:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל תלוי בערך הביטוי שמתחת לסימן השורש. נהוג לסמן ביטוי זה באות היוונית דלתא ( $\Delta$ ) והוא מכונה בשם דיסקרימיננטה:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

אם פותרים לפי הנוסחה "הזוגית", שבה  $B=2K$ , אז  $\Delta' = K^2 - AC$

ההבחנה בין ערכי  $\Delta$  יוצרת שלושה מקרים לגבי מספר וסוג הפתרונות של המשוואה הריבועית:

**א.**  $\Delta > 0$ , ואז לשורש הריבועי יש ערך ממשי, ולכן למשוואה הריבועית שני

פתרונות ממשיים שונים:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

**ב.**  $\Delta = 0$ , ואז ערך השורש הריבועי 0, לכן למשוואה הריבועית שני שורשים שווים (פתרון יחיד):

$$x_1 = x_2 = \frac{-B}{2A}$$

**ג.**  $\Delta < 0$ , לשורש הריבועי אין ערך ממשי, לכן למשוואה הריבועית אין פתרונות ממשיים.

### מסקנה

למשוואה הריבועית יש פתרונות ממשיים (שוים או שונים) אם מתקיים:  $\Delta \geq 0$

נבדוק את מספר הפתרונות של המשוואות הבאות.



1.  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 > 0$$

למשוואה זו שני פתרונות ממשיים שונים.

$$2. \quad 9x^2 - 30x + 25 = 0 \quad ; \quad B = -30, \quad K = -15$$

$$\Delta' = K^2 - AC, \quad \Delta' = (-15)^2 - 9 \cdot 25 = 225 - 225 = 0$$

למשוואה זו שני פתרונות ממשיים שווים.

$$3. \quad 2x^2 + x + 5 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$$

למשוואה זו אין פתרונות ממשיים.

$$4. \quad mx^2 + 4x + 1 = 0$$

במשוואה זו יש פרמטר  $m$ . מה הערכים שאפשר להציב במקום  $m$  כדי שלמשוואה הנתונה יהיו פתרונות ממשיים (שונים או שווים)?

המשוואה תהיה ריבועית כאשר  $m \neq 0$ .

התנאי לקיום פתרונות ממשיים הוא:  $\Delta \geq 0$ .

$$\text{נשתמש בנוסחה ה"זוגית": } \Delta' = K^2 - AC, \quad \Delta' = 2^2 - 1 \cdot m = 4 - m$$

$$4 - m \geq 0 \quad \text{לפי התנאי הנ"ל:}$$

$$\Rightarrow m \leq 4, \quad m \neq 0$$

הצבת הערך  $m=4$  תתן שני פתרונות שווים  $(-0.5)$ , ואילו הצבת ערכים קטנים מ-4 במקום  $m$  תתן שני פתרונות ממשיים שונים.

יש לציין, שאם לא נדרש במפורש "שני פתרונות ממשיים", אלא רק "פתרונות ממשיים", יש להתיחס גם לאפשרות שהמשוואה היא ממעלה ראשונה:  $m=0$

$$\text{אז: } 4x+1=0 \quad \text{למשוואה זו פתרון ממשי } x = -\frac{1}{4}$$

ובסיכום התשובה היא  $m \leq 4$

$$5. \quad x^2 - mx - 2 = 0$$

נראה כי למשוואה הנתונה שני פתרונות שונים, לכל ערך של  $m$ :

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (-2) = m^2 + 8 \quad \text{נבדוק את } \Delta:$$

הסכום שהתקבל, הינו חיובי לכל ערך של  $m$ , שכן  $(+8)$  הוא מספר חיובי, ו- $m^2$  לא יכול להיות שלילי. לכן, למשוואה זו שני פתרונות ממשיים שונים.

## 2. נוסחאות ויאטה

הוכחנו שאם למשוואה ריבועית  $Ax^2+Bx+C=0$  יש פתרונות ממשיים  $x_1, x_2$ , אזי

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{ניתן לחשב פתרונות אלו באמצעות הנוסחה:}$$

נוכיח שתי נוסחאות - **נוסחאות ויאטה**, שאחת מהן מקשרת בין סכום שורשי המשוואה S, למקדמיה A, B; השניה, בין מכפלת השורשים P למקדמים C, A.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-B}{A}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

נוכיח את נוסחת הסכום:

$$x_1 + x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} + \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} =$$

$$= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC} - B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2B}{2A} = \frac{-B}{A}$$

נוכיח את נוסחת המכפלה:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \cdot \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-B)^2 - (\sqrt{B^2 - 4AC})^2}{2A \cdot 2A} =$$

$$= \frac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} = \frac{B^2 - B^2 + 4AC}{4A^2} = \frac{4AC}{4A^2} = \frac{C}{A}$$

### 3. הרכבת משוואה על-פי שורשיה.

עד כה עסקנו בפתרון משוואה ריבועית נתונה (שפירושו: מקדמיה ידועים).

באופן סכמטי:  $A, B, C \Rightarrow x_1, x_2$

קעת נבדוק את התהליך בכיוון ההפוך:  $x_1, x_2 \Rightarrow A, B, C$ . כלומר, להגיע למשוואה ששורשיה ידועים.

המשוואה  $Ax^2 + Bx + C = 0$

היא ריבועית, אם  $A \neq 0$ , חילוק ב-A נותן:

ניתן לכתוב:  $x^2 - \left(-\frac{B}{A}\right)x + \frac{C}{A} = 0$ .

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

ובעזרת נוסחת ויאטה מתקבל:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \text{או:}$$

הרכב משוואה ששורשיה נתונים :

1.  $x_1 = 2$  ;  $x_2 = -5$

$$x_1 + x_2 = 2 - 5 = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-5) = -10$$

$$x^2 - (-3)x - 10 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

המשוואה היא :

2.  $x_1 = -4$  ;  $x_2 = -3$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

נציב ישירות במשוואה :

$$x^2 - (-4 - 3)x + (-4 \cdot -3) = 0$$

ונקבל :

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

3.  $x_1 = \frac{1}{2}$  ;  $x_2 = -\frac{1}{3}$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

הצבה לנוסחה :

$$x^2 - \left(\frac{3-2}{6}\right)x - \frac{1}{6} = 0$$

חישוב המקדמים :

$$x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

מכנה משותף :

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

4.  $x_1 = 0.3$  ;  $x_2 = 0.2$

נתון :

$$x^2 - (0.3 + 0.2)x + (0.3 \cdot 0.2) = 0$$

הצבה :

$$x^2 - 0.5x + 0.06 = 0 \quad / \cdot 100$$

ולקבלת מקדמים שלמים :

$$100x^2 - 5x + 6 = 0$$

5.  $x_1 = -3 - \sqrt{5}$  ;  $x_2 = -3 + \sqrt{5}$

נתון :

$$x^2 - (-3 - \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5})x + (-3 - \sqrt{5})(-3 + \sqrt{5}) = 0$$

הצבה :

מתקבל:

$$x^2 - (-6)x + (-3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$$

או:

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

לעיתים נתון מידע חלקי על השורשים: שורש אחד ומקדם אחד או קשר בין השורשים. גם בפתרון מקרים כאלה ניתן להשתמש בנוסחאות ויאטה:

6.  $x^2 + mx + 12 = 0$  ;  $x_1 = -4$

במשוואה זו ידוע שורש אחד. יש למצוא את  $m$  ואת השורש השני.

לפי נוסחת ויאטה:

$$\begin{cases} -4x_2 = 12 \\ -4 + x_2 = -m \end{cases}$$

$$x_2 = -3$$

מהמשוואה הראשונה מתקבל:

$$-4 - 3 = -m \Rightarrow m = 7$$

ואחרי הצבה במשוואה השנייה:



**הערה**

אפשר לפתור תרגיל זה, גם ע"י הצבת  $x = -4$  במשוואה הנתונה ולחשב את  $m$ . בשלב שני פותרים את המשוואה הריבועית המתקבלת (שאחד משורשיה היה ידוע).

7.  $x^2 - (m+3)x + (3m-1) = 0$

שורש אחד במשוואה זו גדול ב-2 מהשורש האחר.

מצא את שורשי המשוואה ואת הערך של  $m$ .

פתרון נניח שהשורשים הם:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x+2$ . נציב בנוסחאות ויאטה:

$$\begin{cases} x + x + 2 = m + 3 \\ x(x + 2) = 3m - 1 \end{cases} \Rightarrow m = 2x - 1$$

$$x^2 + 2x = 3(2x - 1) - 1$$

נציב את הביטוי של  $m$  במשוואה השנייה:

$$x^2 - 4x + 4$$

השורשים הם: 2, 4

$$x = 2 \Rightarrow m = 3, \quad x + 2 = 4$$

## 4. סימני השורשים של משוואה ריבועית

ערך ה- $\Delta$  מלמד על מספר וסוג שורשי המשוואה הריבועית. בעזרת נוסחות ויאטה אפשר ללמוד על סימני השורשים.

סימן המכפלה:  $\frac{C}{A}$  מראה אם השורשים שווי סימן או שוני סימן:

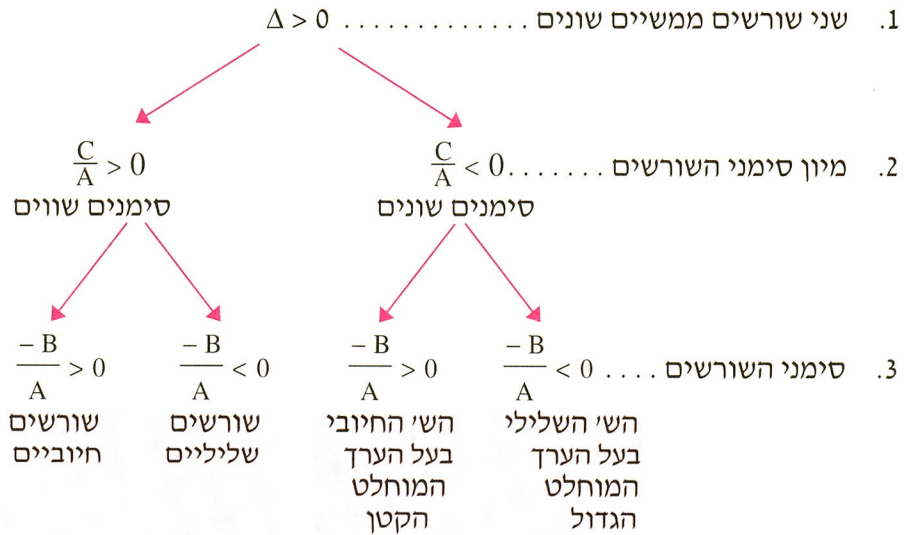
אם  $\frac{C}{A} > 0$ , לשורשים סימנים זהים

ואם  $\frac{C}{A} < 0$ , לשורשים סימנים שונים.

במקרה הראשון יהיו הסימנים השווים, כמו סימן הסכום:  $x_1 + x_2 = \frac{-B}{A}$   
 כלומר, אם נוסף לכך שמכפלת השורשים חיובית, גם הסכום חיובי, אז השורשים חיוביים, ואם הסכום שלילי - השורשים שליליים.

במקרה השני (מכפלה שלילית), סימן הסכום יתן את הסימן של השורש בעל הערך המוחלט הגדול, (סימנו של השורש השני הפוך).

אפשר לתאר את שלב הבדיקה הני"ל בצורה סכמטית:



ניתן להראות שהתנאי  $\frac{C}{A} < 0$  מכיל את התנאי לקיום שורשים ממשיים:  $\Delta > 0$



- $2x^2 - 9x + 10 = 0$   
 $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 1 > 0$   
 $\frac{C}{A} = \frac{10}{2} = 5 > 0$   
 $-\frac{B}{A} = -\frac{-9}{2} = 4.5 > 0$
- למשוואה זו שורשים ממשיים שונים, כי:  
 לשורשים אלו סימנים שווים כי:  
 הסימן המשותף שלהם הוא (+) כי:

$$2. \quad 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$$

$$\frac{C}{A} = \frac{-6}{3} = -2 < 0$$

$$-\frac{B}{A} = \frac{7}{3} > 0$$

למשוואה זו שורשים ממשיים שונים, כי:

לשורשים אלו סימנים שונים כי:

השורש החיובי הוא בעל ערך מוחלט גדול יותר

מזה של השורש השלילי

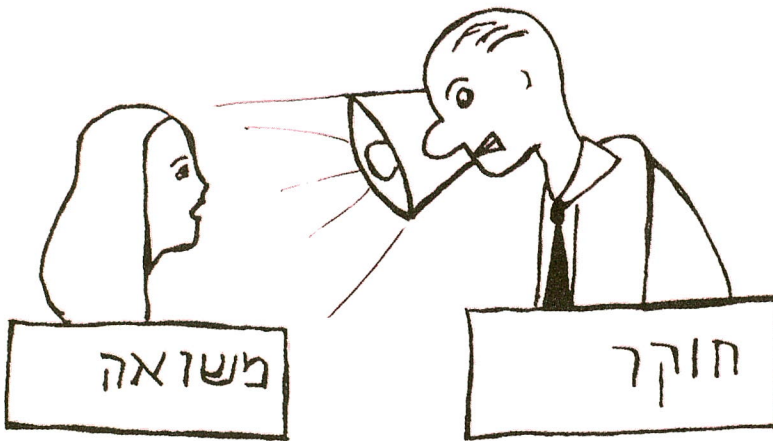
$$3. \quad x^2 + (m+2)x + m = 0$$

למשוואה זו שורשים ממשיים לכל ערך של  $m$ , כי:  
תמיד

$$\Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot m = m^2 + 4m + 4 - 4m = m^2 + 4 > 0$$

לשורשי המשוואה יהיו סימנים שונים כאשר:  $\frac{C}{A} = \frac{m}{1} < 0 \Rightarrow m < 0$

## חקירת משוואה



## תרגילים (תשובות לתרגילים - בעמוד 196)

### סעיף 1

א. העזר בחישוב ה-  $\Delta$  כדי לקבוע את מספר השורשים של המשוואות הבאות:

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 - 10x + 21 = 0$   | 2. $x^2 - 8x + 16 = 0$    |
| 3. $x^2 - 5x + 10 = 0$    | 4. $2x^2 - 7x - 4 = 0$    |
| 5. $-3x^2 + x + 2 = 0$    | 6. $-x^2 + 2x - 2 = 0$    |
| 7. $-2x^2 + 4x - 2 = 0$   | 8. $0.5x^2 - x + 1 = 0$   |
| 9. $3x^2 - 2x + 0.25 = 0$ | 10. $5x^2 + 2x + 0.2 = 0$ |

ב. העזר בחישוב ה-  $\Delta$  כדי לקבוע לאלו מהמשוואות הבאות יש שורשים ממשיים (שווים או שונים)

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - 3x + 2 = 0$        | 2. $x^2 + 9x + 8 = 0$       |
| 3. $2x^2 - 6x - 9 = 0$       | 4. $-x^2 - 4x + 1 = 0$      |
| 5. $x^2 - 6x + 9 = 0$        | 6. $4x^2 - 4x + 1 = 0$      |
| 7. $8x - 16 - x^2 = 0$       | 8. $x^2 + 2x + 3 = 0$       |
| 9. $-2x^2 + 5x - 4 = 0$      | 10. $x^2 - 5 = 5(x - 1)$    |
| 11. $x(4x + 1) = x + 9$      | 12. $x(3 - 4x) - 1 = x^2$   |
| 13. $x(2x - 3) + 5 = 5 - 3x$ | 14. $5x^2 - 3 = 2x(4x - 3)$ |

ג. לאלו ערכי  $m$  יש למשוואות הבאות שני שורשים שווים (שורש יחיד)

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x^2 + 4x + m = 0$              | 2. $5x^2 + 2x - m = 0$             |
| 3. $mx^2 - 3x + 1 = 0$             | 4. $-mx^2 + 5x - 5 = 0$            |
| 5. $3x^2 - m = 0$                  | 6. $4x^2 - mx = 0$                 |
| 7. $x^2 + mx + 1 = 0$              | 8. $3x^2 - 2mx + 3 = 0$            |
| 9. $2x^2 - mx - 2 = 0$             | 10. $-x^2 + mx + 2 = 0$            |
| 11. $2mx^2 - 9x + 18m = 0$         | 12. $12mx^2 + 4x + 3m = 0$         |
| 13. $mx^2 - mx + 1 = 0$            | 14. $2x^2 - 3mx - m = 0$           |
| 15. $x^2 + mx + m - 1 = 0$         | 16. $x^2 + 3mx + 3m - 2 = 0$       |
| 17. $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$       | 18. $x^2 - (m - 2)x + 1 = 0$       |
| 19. $x^2 - (m - 5)x - (m - 8) = 0$ | 20. $x^2 + mx - 3x - 2 = 0$        |
| 21. $mx^2 + (2m + 1)x + m + 1 = 0$ | 22. $mx^2 - 2(m - 3)x - m + 4 = 0$ |

ד. מצא את ערכי  $m$  שעבורם למשוואות הבאות שני שורשים שונים

- |                              |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 - 2x + m = 0$        | 2. $x^2 + 4x + 3m - 2 = 0$       |
| 3. $(m-1)x^2 + 5x - 4 = 0$   | 4. $x(mx-3) = (x+2)^2$           |
| 5. $(3mx+1)(x-1) = (2x-3m)x$ | 6. $(m-x)(2x-1) = x^2(m-1)$      |
| 7. $3x(x-2m) = (2m+1)(1-3x)$ | 8. $(2x-1)(x-5m) = 5m(1-2x) + 3$ |
| 9. $mx^2 + 2mx + m - 2 = 0$  | 10. $mx^2 - 4mx - (1-4m) = 0$    |

ה. הוכח כי למשוואות הבאות פתרונות ממשיים (אחד או שניים) לכל ערך של  $m$

- |                                       |                               |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^2 - mx - 1 = 0$                 | 2. $x^2 - 2mx - 5 = 0$        |
| 3. $mx^2 + 2x - 3m = 0$               | 4. $m^2x^2 - 5x - 1 = 0$      |
| 5. $x^2 + (2m-6)x + m^2 - 6m - 1 = 0$ | 6. $(1-m^2)x^2 + 2mx - 1 = 0$ |
| 7. $m(x+4m) + x(3m+x) = 1$            | 8. $2x(3m-x) + 4 = m(2x-m)$   |
| 9. $mx(mx+1) + x(x-2) = 2(1-x)$       | 10. $(x-2m)(x+2m) = 4m(x-2m)$ |
| 11. $(x+1)^2 = m + mx$                | 12. $x(x+3m+1) = m(x-1) + 1$  |

ו. הוכח כי למשוואות הבאות אין פתרון, לכל ערך של  $m$

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $x^2 - 2x + (1+m^2) = 0$   | 2. $(m^2+1)x^2 - 5x + 7 = 0$ |
| 3. $(mx+1)^2 + (x-3)^2 = 2mx$ | 4. $x(x-6) + 10 = m(6-m-2x)$ |

### סעיפים 2,3

ז. הרכב משואה ריבועית ששורשיה  $x_1, x_2$  נתונים:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. 3, 7                                    | 2. -1, -4  | 3. 5, -2                                      |
| 4. 8, 0                                    | 5. 3, -3   | 6. -2, 0.2                                    |
| 7. $\frac{1}{2}, 3$                        | 8. $-1\frac{1}{2}, 2$                            | 9. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$                |
| 10. $-0.3, -\frac{1}{5}$                   | 11. $-1\frac{1}{4}, 4$                           | 12. $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$               |
| 13. $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$               | 14. $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$                        | 15. $-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}$                |
| 16. $\sqrt{5}+\sqrt{3}, \sqrt{5}-\sqrt{3}$ | 17. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | 18. $-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| 19. $2m, 3m$                               | 20. $-m, 4m$                                     | 21. $m, 2$                                    |
| 22. $m+1, 2m+2$                            | 23. $m+1, m-1$                                   | 24. $0.5m, m+2$                               |

ח. ליד כל אחת מהמשוואות הפרמטריות הבאות רשום אחד משורשיה. חשב את ערכו של  $m$

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. $x^2 - mx + 7 = 0, x = 1$       | 2. $x^2 + 9x - m = 0, x = 2$                 |
| 3. $3x^2 + mx + 6 = 0, x = -1$     | 4. $mx^2 - 4x + 1 = 0, x = 3$                |
| 5. $2mx^2 + x + 5 = 0, x = 5$      | 6. $3mx^2 - x + m - 1 = 0, x = 0$            |
| 7. $x^2 - 7x + m^2 + 1 = 0, x = 2$ | 8. $mx^2 + (m+1)x + 1 = 0, x = -\frac{1}{3}$ |
| 9. $x^2 - mx + 4 = 0, x = 2$       | 10. $2x^2 + 9mx - 8 = 0, x = -2$             |

ט. ליד כל אחת מהמשוואות הפרמטריות הבאות רשום אחד משורשיה. העזר בנוסחות ויאטה, כדי לחשב את  $m$  ואת השורש השני של המשוואה.

- |                                  |                                       |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $6x^2 + mx + 3 = 0, x = -1.5$ | 2. $x^2 - 4x + m = 0, x = 1$          |
| 3. $5x^2 + x + 2m = 0, x = -1$   | 4. $4x^2 - mx + m - 10 = 0, x = 1.75$ |
| 5. $m(x^2 - 5) = x + 5, x = 3$   | 6. $x^2 + 1 = m(2x - 3), x = 8$       |
| 7. $x(1+x) = m(9-x) - 1, x = -4$ | 8. $(x-m)(x+3) = 5, x = 2$            |
| 9. $(x+m)^2 = m^2 - 20, x = -2$  | 10. $x(2m-x) = 3(2x+m), x = 4$        |
| 11. $(x+2)(x-1) = mx - 6, x = 2$ | 12. $(x-1)^2 + 2m(x+2) = 5, x = -4$   |

י. בתרגילים הבאים נתונה משוואה פרמטרית וכן נתון קשר בין שורשיה. חשב את  $m, x_1, x_2$ .

- |                            |                  |
|----------------------------|------------------|
| 1. $x^2 - mx + 6 = 0$      | $x_1 = x_2 + 1$  |
| 2. $x^2 + (m+2)x + 10 = 0$ | $x_2 = x_1 - 3$  |
| 3. $x^2 + 6x - m = 0$      | $x_2 = 2x_1$     |
| 4. $3x^2 + 2x + m - 1 = 0$ | $x_1 = 1 - 2x_2$ |
| 5. $x^2 + mx - 9 = 0$      | $x_1 = -x_2$     |
| 6. $x^2 - mx + m + 3 = 0$  | $x_1 = x_2$      |

יא. אחד משורשי המשוואה הריבועית  $x^2 + 7mx + 4 = 0$  קטן ב-1 ממחציתו של השורש האחר. חשב את  $m$ .

יב. אחד משורשי המשוואה הריבועית  $x^2 + (m-1)x + 5 = 0$  קטן פי 5 מהאחר. חשב את שורשי המשוואה.

**\*יג.** סכום שורשי המשוואה  $x^2 - (m+4)x - 7 = 0$  שווה ל- $3m$ . חשב את  $m$  ואת השורשים.

**\*יד.** מכפלת שורשי המשוואה  $2x^2 + (7m+9)x + 28 = 0$  שווה ל- $5m-1$ . חשב את  $m$  ואת השורשים.

**\*טו.** במשוואה הריבועית  $2x^2 - (m+7)x - m = 0$  שורש אחד הוא ההופכי של השורש האחר. חשב את  $m$  ואת השורשי המשוואה.

**\*טז.** אחד משורשי המשוואה  $x^2 + (2-2m)x - m^3 = 0$  שווה לריבועו של האחר. חשב את השורשי המשוואה.

**ט.** נתונה משוואה הריבועית  $x^2 - 3x + 1 = 0$ . נסמן את שורשיה ב- $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. חשב את ערך הביטויים הבאים, בלי לחשב את  $\alpha$  ו- $\beta$  :

a.  $\alpha + \beta$ ,    b.  $\alpha\beta$ ,    c.  $2\alpha + 2\beta$ ,    d.  $2\alpha \cdot 2\beta$

2.\* הרכב משוואה ששורשיה:  $2\alpha$ ,  $2\beta$

**כ.** נתונה משוואה ריבועית  $x^2 - 3x - 8 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. מצא (בלי לחשב את השורשים): a.  $\alpha + \beta$ ,    b.  $\alpha\beta$ ,    c.  $-\alpha - \beta$

2. הרכב משוואה ששורשיה  $-\alpha$ ,  $-\beta$ .

3.\* הרכב משוואה ששורשיה  $\alpha + 1$ ,  $\beta + 1$ .

**\*כא.** נתונה משוואה ריבועית  $x^2 + x - 1 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .  
הרכב משוואה ששורשיה:

1.  $\alpha - 2$ ,  $\beta - 2$     2.  $3\alpha + 2$ ,  $3\beta + 2$

**\*כב.** נתונה משוואה ריבועית  $x^2 - 4x + 1 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. חשב  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

2. הרכב משוואה ששורשיה  $\frac{1}{\beta}$ ,  $\frac{1}{\alpha}$

3. הרכב משוואה ששורשיה  $\frac{1}{\beta} + 1$ ,  $\frac{1}{\alpha} + 1$

**כג.** נתונה משוואה ריבועית  $x^2 - 2x - 2 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. חשב (בלי למצוא את השורשים): a.  $(\alpha + \beta)^2$ ,    b.  $\alpha^2 + \beta^2$

2.\* הרכב משוואה ששורשיה  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ .

**כב.** נתונה משוואה ריבועית  $x^2 + 4x + 2 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .  
 הרכב משוואה ששורשיה: 1.  $\alpha^2, \beta^2$ , 2.  $\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$

**כג.** נתונה משוואה ריבועית  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. מצא את ערך הביטוי  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

2. הרכב משוואה ששורשיה  $\frac{\alpha}{\beta}$  ו- $\frac{\beta}{\alpha}$

**כד.** נתונה משוואה ריבועית  $2x^2 - 5x - 8 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. חשב  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

2. הרכב משוואה ששורשיה  $\alpha^2, \beta^2$

3. הרכב משוואה ששורשיה  $\frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\alpha^2}$

**כה.** נתונה משוואה ריבועית  $3x^2 - 6x + 2 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

1. הרכב משוואה ששורשיה  $\beta + 2\alpha, \alpha + 2\beta$

2. הרכב משוואה ששורשיה  $3\beta - \alpha, 3\alpha - \beta$

3. הרכב משוואה ששורשיה  $2\alpha - 3\beta, 2\beta - 3\alpha$

**כו.** נתונה משוואה ריבועית  $2x^2 - x - 6 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

הרכב משוואה ששורשיה  $\frac{1}{\beta + 2}, \frac{1}{\alpha + 2}$

**כז\*.** נתונה משוואה ריבועית  $x^2 - x - 1 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

הרכב משוואה ששורשיה  $\frac{1}{\alpha} + \alpha, \frac{1}{\beta} + \beta$

**כח\*.** נתונה משוואה ריבועית  $2x^2 - 7x + 2 = 0$  ששורשיה  $\alpha$  ו- $\beta$ .

הרכב משוואה ששורשיה  $\beta^2\alpha, \alpha^2\beta$

#### סעיף 4

**כט.** בדוק אם סימני שורשי המשוואות הבאות שווים או שונים (אין לפתור את המשוואות).

1.  $x^2 - 7x + 10 = 0$

2.  $3x^2 - 2x - 5 = 0$

3.  $-x^2 + 5x - 6 = 0$

4.  $-4x^2 - x + 5 = 0$

5.  $-8x^2 - 14x - 5 = 0$

6.  $2x^2 - 3x - 1 = 0$

7.  $mx^2 - 3x - 2m = 0$

8.  $x^2 - 5x - m^2 = 0$

$$9. \quad 2mx^2 + x - 5m^3 = 0$$

$$10. \quad (m-1)x^2 - 3x - 2m + 2 = 0$$

$$11. \quad -3x^2 - 7x - m^2 - 2 = 0$$

$$12. \quad (m^2 + 1)x^2 + x - 2 = 0$$

ל. קבע את הסימן של שורשי המשוואות שבתרגיל ז', סעיפים 1, 3, 5, 11.

### תשובות

1. שונים, 2. שווים, 3. $\phi$ , 4. שונים, 5. שונים, 6. $\phi$ , 7. שווים, 8. $\phi$ , 9. שונים, 10. שווים	א.
1. יש, 2. יש, 3. יש, 4. יש, 5. יש, 6. יש, 7. יש, 8. אין, 9. אין, 10. יש, 11. יש, 12. אין, 13. יש, 14. יש	ב.
1. 4, 2. -0.2, 3. 2.25, 4. 1.25, 5. 0, 6. 0, 7. 2, -2, 8. 3, -3, 9. $\phi$ , 10. $\phi$ , 11. $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$ , 12. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ , 13. 4, 14. 0, $-\frac{8}{9}$ , 15. 2, 16. $\phi$ , 17. 3, -1, 18. 0, 4, 19. 7, -1, 20. $\phi$ , 21. $\phi$ , 22. $\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}$	ג.
1. $m < 1$ , 2. $m < 2$ , 3. $m > -\frac{9}{16}, m \neq 1$ , 4. $m > -2\frac{1}{16}$ , 5. $m > \frac{7}{12}$ , 6. ערך, 7. $m > -\frac{7}{8}$ , 8. ערך, 9. $m > 0$ , 10. $m > 0$	ד.
1. $x^2 - 10x + 21 = 0$ , 2. $x^2 + 5x + 4 = 0$ , 3. $x^2 - 3x - 10 = 0$ , 4. $x^2 - 8x = 0$ , 5. $x^2 - 9 = 0$ , 6. $5x^2 + 9x - 2 = 0$ , 7. $2x^2 - 7x + 3 = 0$ , 8. $2x^2 - x - 6 = 0$ , 9. $6x^2 - x - 1 = 0$ , 10. $50x^2 + 25x + 3 = 0$ , 11. $4x^2 - 11x - 20 = 0$ , 12. $9x^2 - 4 = 0$ , 13. $x^2 - 2x - 1 = 0$ , 14. $x^2 - 3 = 0$ , 15. $x^2 + 4x + 1 = 0$ , 16. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$ , 17. $x^2 - x - 1 = 0$ , 18. $16x^2 - 3 = 0$ , 19. $x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$ , 20. $x^2 - 3mx - 4m^2 = 0$ , 21. $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$ , 22. $x^2 - 3(m+1)x + 2(m+1)^2 = 0$ , 23. $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ , 24. $2x^2 - (3m+4)x + m^2 + 2m = 0$	ה.
1. 8, 2. 22, 3. 9, 4. $1\frac{2}{9}$ , 5. $-\frac{1}{5}$ , 6. 1, 7. 3, -3, 8. 3, 9. 4, 10. 0	ו.
1. $m=11, x=-\frac{1}{3}$ , 2. $m=3, x=3$ , 3. $m=-2, x=\frac{4}{5}$ , 4. $m=3, x=-1$	ז.

5. $m=2, x=-2\frac{1}{2}$ , 6. $m=5, x=2$ , 7. $m=1, x=2$ , 8. $m=1, x=-4$ ,	
9. $m=6, x=-10$ , 10. $m=8, x=6$ , 11. $m=5, x=2$ , 12. $m=5, x=-4$	
1. $m=-5, x=-2, -3$ או $m=5, x=3, 2$ , 2. $m=-9, x=5, 2$ או $m=5, x=-2, -5$ ,	י.
3. $m=-8, x=-2, -4$ , 4. $m=-10\frac{2}{3}, x=-2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}$ ,	
5. $m=0, x=3, -3$ או $m=0, x=-3, 3$ , 6. $m=6, x=3, 3$ או $m=-2, x=-1, -1$	
$-\frac{5}{7}$ או $\frac{4}{7}$	יא.
1, 5 או -1, -5	יב.
$m=2, x=7, -1$	יג.
$m=3, -1, -14$	יד.
$m=-2, x=\frac{1}{2}, 2$	טו.
4, -2 או 1, -1	טז.
1. a. 3, b. 1, c. 6, d. 4, 2. $x^2 - 6x + 4 = 0$	יז.
1.a. 3, b. -8, c. -3, 2. $x^2 + 3x - 8 = 0$ , 3. $x^2 - 5x - 4 = 0$	יח.
1. $x^2 + 5x + 5 = 0$ , 2. $x^2 - x - 11 = 0$	יט.
1. 4, 2. $x^2 - 4x + 1 = 0$ , 3. $x^2 - 6x + 6 = 0$	כ.
1. a. 4, b. 8, 2. $x^2 - 8x + 4 = 0$	כא.
1. $x^2 - 12x + 4 = 0$ , 2. $x^2 - 14x + 17 = 0$	כב.
1. -6.5, 2. $2x^2 + 13x + 2 = 0$	כג.
1. $\frac{57}{64}$ , 2. $4x^2 - 57x + 64 = 0$ , 3. $64x^2 - 57x + 4 = 0$	כד.
1. $3x^2 - 18x + 26 = 0$ , 2. $3x^2 - 12x - 4 = 0$ , 3. $3x^2 + 6x - 22 = 0$	כה.
$4x^2 - 9x + 2 = 0$	כו.
$x^2 - 5 = 0$	כז.
$2x^2 - 7x + 2 = 0$	כח.
1. שווים , 2. שונים , 3. שווים , 4. שונים , 5. שווים , 6. שונים , 7. שונים , 8. שונים , 9. שונים , $m \neq 0$ , 10. שונים $m \neq 1$ , 11. שווים , $\Delta > 0$ , 12. שונים	כט.
1. שווים , 3. חיוביים , 5. שליליים , 11. $\Delta > 0$ אם	ל.

## פרק י': משוואות פרמטריות

לעתים מופיעות במשוואה אותיות נוספות, פרט לנעלם. אותיות אלה מציינות ערכים מספריים בצורה כללית והן נקראות פרמטרים. משוואה כזו נקראת משוואה פרמטרית.

לפתור משוואה פרמטרית פירושו להביע את הנעלם, שמקובל לסמנו ב-  $x$ , ב-  $y$  כביטוי אלגברי של האותיות האחרות, המופיעות במשוואה.

### 1. משוואה פרמטרית ממעלה ראשונה עם נעלם אחד

כדי לפתור משוואה פרמטרית כזו מבצעים את הצעדים הבאים:

- מפשטים את המשוואה: פותחים סוגריים, מבטלים מכנים, וכו'.
- מרכזים את הביטויים המכילים את הנעלם באגף אחד, ואת הביטויים שאינם מכילים את הנעלם באגף האחר.
- מוציאים את הנעלם כגורם משותף.
- מחלקים את שני האגפים במקדם של הנעלם
- אם ניתן, מפשטים את השבר האלגברי המתקבל, על ידי פירוק לגורמים וצמצום, תוך כדי ציון תחום הקיום.

דוגמאות: 

1.  $ax + 5 = b + 2$

$$ax = b - 3$$

$$x = \frac{b - 3}{a}, \quad a \neq 0 \text{ (תחום הקיום)}$$

2.  $ax - b = 2x - a$

$$ax - 2x = b - a$$

$$x(a - 2) = b - a$$

$$x = \frac{b - a}{a - 2}, \quad a \neq 2$$

$$3. \quad m(x - m) + 2 = x + 1$$

$$mx - m^2 + 2 = x + 1$$

$$mx - x = m^2 - 2 + 1$$

$$x(m - 1) = m^2 - 1$$

$$x = \frac{m^2 - 1}{m - 1} = \frac{(m + 1)(m - 1)}{m - 1} = m + 1, \quad m \neq 1$$

$$4. \quad \frac{k^2(y - 1)}{4} = \frac{ky - 4}{2k + 4} \quad / \cdot 4$$

$$k^2y - k^2 = 2ky - 4k + 4$$

$$k^2y - 2ky = k^2 - 4k + 4$$

$$yk(k - 2) = (k - 2)^2$$

$$y = \frac{(k - 2)^2}{k(k - 2)} = \frac{k - 2}{k}, \quad k \neq 0, 2$$

$$5. \quad 0.1m(2mx - m + 1) = 5x - 2 \quad / \cdot 10$$

$$m(2mx - m + 1) = 10(5x - 2)$$

$$2m^2x - m^2 + m = 50x - 20$$

$$2m^2x - 50x = m^2 - m - 20$$

$$2x(m^2 - 25) = m^2 - m - 20$$

$$x = \frac{m^2 - m - 20}{2(m^2 - 25)} = \frac{(m - 5)(m + 4)}{2(m - 5)(m + 5)} = \frac{m + 4}{2(m + 5)}; \quad m \neq \pm 5$$

## 2. חקירת המשוואה

ערכי המקדמים A ו-B של המשוואה  $Ax=B$  קובעים את מספר פתרונותיה. יתכנו שלושה מקרים:

א.  $A \neq 0$ , במקרה זה יש למשוואה **פתרון יחיד**, שערכו  $x = \frac{B}{A}$ .

ב.  $A = 0, B \neq 0$ , למשוואה זו **אין פתרון**, כי פעולת החילוק ב-0 אינה מוגדרת.

ג.  $A=B=0$  במקרה זה, יש למשוואה **אינסוף פתרונות**, כי כל ערך של x יקיים את השוויון  $0 \cdot x = 0$ .



1.  $(a-2)x = 3a$

אם  $a-2 \neq 0$ , כלומר  $a \neq 2$  למשוואה הנ"ל פתרון יחיד  $x = \frac{3a}{a-2}$

כאשר  $a-2=0$  (כלומר  $a=2$ ), אין למשוואה פתרון כלל, כי אין לחלק מספר ב-0.

2.  $(m+4)x = m^2 + 5m + 4$

כאשר  $m+4 \neq 0$  ( $m \neq -4$ ), יש למשוואה פתרון יחיד:

$$x = \frac{m^2 + 5m + 4}{m + 4} = \frac{(m+1)(m+4)}{(m+4)} = m + 1$$

כאשר  $m+4=0$  ( $m=-4$ ) יש למשוואה אינסוף תשובות (כל מספר הוא פתרון), כי אז מתקבל:

$$0 \cdot x = 0 \cdot (-4 + 1)$$

כלומר:  $0=0$

## 3. מערכת משוואות פרמטריות ממעלה ראשונה

בפתרון מערכת של שתי משוואות פרמטריות ממעלה ראשונה נוהגים בשיטה דומה לזו שפתרנו מערכת משוואות עם מקדמים מספרים:

- מביאים כל אחת מן המשוואות לצורה הפשוטה ביותר, כאשר לכל נעלם מקדם משלו.
- עוברים ממערכת של 2 משוואות עם 2 נעלמים למשוואה אחת עם נעלם אחד וזאת בשיטה הנראית לנו מתאימה ביותר (השוואת מקדמים או הצבה).
- מחלקים את שני האגפים במקדם של הנעלם, תוך כדי ציון תנאי הקיום.
- אם ניתן, מפשטים את התוצאה ע"י צמצום.
- מציבים ביטוי זה באחת המשוואות (הפשוטה יותר), מבדדים את הנעלם האחר וחוזרים על שני הצעדים האחרונים.

$$1. \quad + \begin{cases} 2x + 3y = 5m \\ x - 3y = m \end{cases}$$


---


$$3x \quad / \quad = 6m$$

$$\underline{x = 2m}$$

$$2m - 3y = m$$

$$m = 3y$$

$$\underline{y = \frac{m}{3}}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x + my = 5m + 2 \\ x - y = m - 2 \quad / -2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 2x + my = 5m + 2 \\ -2x + 2y = -2m + 4 \end{cases}$$

$$/ \quad my + 2y = 3m + 6$$

$$(m + 2)y = 3(m + 2)$$

$$y = \frac{3(m + 2)}{m + 2} \cdot 3$$

אם  $m \neq -2$  , אז

$$x - 3 = m - 2$$

$$x = m + 1 \quad \Rightarrow \quad (m + 1, 3)$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{x-1}{a} + \frac{y}{a} = \frac{a^2+4}{a} \quad / a \\ -x + 3y = 11 + 3a \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x - 1 + ay = a^2 + 4a \\ -x + 3y = 11 + 3a \end{cases}$$

$$/ \quad ay + 3y = a^2 + 7a + 12$$

$$(a + 3)y = (a + 3)(a + 4)$$

$$y = \frac{(a + 3)(a + 4)}{(a + 3)} = a + 4 \quad , \quad \text{כאשר } a \neq -3$$

$$-x + 3(a + 4) = 11 + 3a$$

$$3a + 12 - 11 - 3a = x$$

$$\underline{x = 1} \quad \Rightarrow \quad (1, a + 4)$$

כאשר  $a = -3$ , המשתנה  $y$  יכול לקבל אינסוף ערכים ( $0 \cdot y = 0$ ) ואז למערכת אינסוף פתרונות.

## 4. משוואה פרמטרית ממעלה שניה

משוואה פרמטרית ממעלה שניה יכולה להופיע באחת מאותן צורות שראינו במשוואה ממעלה שניה, שמקדמיה מספרים: מנוונת או שלמה.

בכל מקרה, יש להביא את המשוואה לצורה נורמלית:  $Ax^2 + Bx + C = 0$ , בעזרת פעולות של ביטול מכנה, כינוס אברים דומים, וכו'.

שיטות הפתרון, המתאימות לכל צורה של המשוואה, אף הן דומות לאלה שראינו במסגרת פתרון משוואה ריבועית לא פרמטרית: פרוק לגורמים, נוסחה. גם במקרה זה, פתרון בעזרת פרוק לגורמים הוא לרוב, יותר פשוט מפתרון בעזרת נוסחה. נראה מספר דוגמאות:

**דוגמה א'** 

$$x^2 - 7mx + 12m^2 = 0$$

$$(x - 3m)(x - 4m) = 0 \Rightarrow x_1 = 3m, x_2 = 4m$$

נפתור משוואה זו גם בעזרת נוסחה כאשר:  $A = 1, B = -7m, C = 12m^2$

$$x_{1,2} = \frac{7m \pm \sqrt{(7m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12m^2}}{2 \cdot 1} = \frac{7m \pm \sqrt{49m^2 - 48m^2}}{2} =$$

$$= \frac{7m \pm \sqrt{m^2}}{2} = \frac{7m \pm m}{2}$$

$$x_1 = \frac{7m - m}{2} = 3m \quad x_2 = \frac{7m + m}{2} = 4m$$

**דוגמה ב':** 

$$ax^2 - 3mx = ax - 2mx - m$$

$$ax^2 - 3mx - ax + 2mx + m = 0$$

$$ax^2 - (a + m)x + m = 0$$

$$A = a, B = -(a + m), C = m$$

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{a+m \pm \sqrt{(a+m)^2 - 4am}}{2a} = \frac{a+m \pm \sqrt{a^2 + 2am + m^2 - 4am}}{2a} = \\
 &= \frac{a+m \pm \sqrt{a^2 - 2am + m^2}}{2a} = \frac{a+m \pm \sqrt{(a-m)^2}}{2a} = \frac{a+m \pm (a-m)}{2a} \\
 x_1 &= \frac{a+m-a+m}{2a} = \frac{2m}{2a} = \frac{m}{a}, \quad x_2 = \frac{a+m+a-m}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1
 \end{aligned}$$

דוגמה ג' 

$$x(2x+3) + 2a = 5 - ax(x-3)$$

$$2x^2 + 3x + 2a = 5 - ax^2 + 3ax$$

$$ax^2 + 2x^2 - 3ax + 3x + 2a - 5 = 0$$

$$(a+2)x^2 - (3a-3)x + 2a - 5 = 0$$

$$A = a+2, \quad B = -(3a-3), \quad C = 2a-5$$

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{3a-3 \pm \sqrt{(3a-3)^2 - 4(a+2)(2a-5)}}{2(a+2)} = \\
 &= \frac{3a-3 \pm \sqrt{9a^2 - 18a + 9 - 8a^2 + 4a + 40}}{2(a+2)} = \frac{3a-3 \pm \sqrt{a^2 - 14a + 49}}{2(a+2)} = \\
 &= \frac{3a-3 \pm \sqrt{(a-7)^2}}{2(a+2)} = \frac{3a-3 \pm (a-7)}{2(a+2)} \\
 x_1 &= \frac{3a-3-a+7}{2(a+2)} = \frac{2a+4}{2(a+2)} = \frac{2(a+2)}{2(a+2)} = 1 \\
 x_2 &= \frac{3a-3+a-7}{2(a+2)} = \frac{4a-10}{2(a+2)} = \frac{2(2a-5)}{2(a+2)} = \frac{2a-5}{a+2}
 \end{aligned}$$

## תרגילים

סעיפים 1,2

א. פתור את המשוואות הבאות (הנעלים -  $x, y, z$ ):

1.  $x + m = 0$

3.  $x + a = 2a + b$

5.  $3m + n = x + m$

7.  $2m + 3x = 2x + 5m$

9.  $ay = m$

11.  $mx - a = b$

13.  $2z = a + b$

15.  $x(m - n) = 4m + 3n$

17.  $2x(a + 1) = 2m + a$

19.  $ay + by = m - 1$

21.  $3ax = b^2 - 2bx$

23.  $3az + b - bz = 5b + az$

25.  $4m - 3cx + ax = 3n - 5ax$

27.  $2a + 3(x - 1) = 5a$

29.  $7a + 2(a + x) = a(x + 3)$

31.  $(2x + 5)(a - 3) = (3a - 1)(x + 2)$

33.  $\frac{3x + 2}{5} = \frac{4m - x}{2m}$

35.  $\frac{ax + b}{x - 5} = \frac{2b}{3}$

37.  $\frac{x + a}{2} + \frac{a - bx}{3} = ax + b$

39.  $\frac{5x - m}{4} + \frac{2m - x}{3} - \frac{5mx}{6} = mx$

41.  $\frac{3x - 5}{2a} - \frac{4 - x}{3b} - 1 = \frac{2 - ab}{ab}$

43.  $\frac{3m - x}{5m} - \frac{2x - a}{2a} = \frac{3 - a}{5a}$

2.  $x - a = 5b$

4.  $2x + k - x = 8k$

6.  $n - x = -m$

8.  $2x = 3a$

10.  $5 + bz = k$

12.  $2ax + k + 3ax = 6k$

14.  $(a + b)y = 3$

16.  $a - b = x(a + b)$

18.  $my(a - 2c) = c + 2m$

20.  $3ax - x = a + 2$

22.  $k^2z - a = b + z$

24.  $2ax + 3b - 5kx - a = kx$

26.  $7bx - 3cx + 3b = 2a + 4bx + cx$

28.  $a(x - 5) = 2(a - x)$

30.  $a(x - 2) + x(b - 3a) = 3(a + b)$

32.  $\frac{my - 2}{3} = \frac{5y - 4}{2}$

34.  $\frac{3x - 4}{c + ax} = \frac{4}{5}$

36.  $\frac{z + 2}{a - 5} = \frac{2z - 3}{1 - a}$

38.  $\frac{2ax - 1}{3} - \frac{x - a}{4} = a(x + 1)$

40.  $\frac{bx + c}{5} - \frac{cx - b}{2} + x(b + c) = 0$

42.  $\frac{m + 3x}{5m} - \frac{mx - 3}{2m} = x - 5$

תשובות:

1.  $-m$  2.  $a+5b$  3.  $a+b$  4.  $7k$  5.  $2m+n$  6.  $m+n$  7.  $3m$  8.  $1.5a$  9.  $\frac{m}{a}$   
 10.  $\frac{k-5}{b}$ , ( $b \neq 0$ ) 11.  $\frac{a+b}{m}$ , ( $m \neq 0$ ) 12.  $\frac{k}{a}$ , ( $a \neq 0$ ) 13.  $\frac{a+b}{2}$  14.  $\frac{3}{a+b}$ , ( $a \neq -b$ )  
 15.  $\frac{4m+3n}{m-n}$ , ( $m \neq n$ ) 16.  $\frac{a-b}{a+b}$ , ( $a \neq -b$ ) 17.  $\frac{2m+a}{2(a+1)}$ , ( $a \neq -1$ )  
 18.  $\frac{c+2m}{m(a-2c)}$ , ( $m \neq 0, a \neq 2c$ ) 19.  $\frac{m-1}{a+b}$ , ( $a \neq -b$ ) 20.  $\frac{a+2}{3a-1}$ , ( $a \neq \frac{1}{3}$ ) 21.  
 $\frac{b^2}{3a+2b}$ , ( $a \neq -\frac{2b}{3}$ ) 22.  $\frac{a+b}{k^2-1}$ , ( $k \neq \pm 1$ ) 23.  $\frac{4b}{2a-b}$ , ( $b \neq 2a$ ) 24.  $\frac{a-3b}{2a-6k}$ , ( $a \neq 3k$ )  
 25.  $\frac{3n-4m}{6a-3c}$ , ( $c \neq 2a$ ) 26.  $\frac{2a-3b}{3b-4c}$ , ( $b \neq \frac{4}{3}c$ ) 27.  $a+1$  28.  $\frac{7a}{a+2}$  ( $a \neq -2$ )  
 29.  $\frac{6a}{a-2}$ , ( $a \neq 2$ ) 30.  $\frac{5a+3b}{b-2a}$ , ( $b \neq 2a$ ) 31.  $-\frac{a+13}{a+5}$ , ( $a \neq -5$ )  
 32.  $\frac{8}{15-2m}$ , ( $m \neq 7.5$ ) 33.  $\frac{16m}{6m+5}$ , ( $m \neq -\frac{5}{6}$ ) 34.  $\frac{4c+20}{15-4a}$ , ( $a \neq \frac{15}{4}$ )  
 35.  $\frac{13b}{2b-3a}$ , ( $b \neq \frac{3a}{2}$ ) 36.  $\frac{a-13}{3a-11}$ , ( $a \neq \frac{11}{3}$ ) 37.  $\frac{5a-6b}{6a+2b-3}$  38.  $-\frac{9a+4}{4a+3}$ , ( $a \neq -\frac{3}{4}$ )  
 39.  $\frac{5m}{22m-11}$ , ( $m \neq \frac{1}{2}$ ) 40.  $-\frac{5b+2c}{12b+5c}$ ,  $c \neq -\frac{12b}{5}$  41.  $\frac{8a+15b+12}{2a+9b}$ , ( $a \neq -\frac{9b}{2}$ )  
 42.  $\frac{52m+15}{15m-6}$ , ( $m \neq \frac{6}{15}$ ) 43.  $\frac{13am-6m}{2a+10m}$ , ( $a \neq -\frac{10m}{2}$ )

ב. בפתרון התרגילים הבאים, צמצם את התוצאות, בעזרת פירוק לגורמים על ידי הוצאת גורם משותף

1.  $m(x-3)+4=5m-2(mx-2)$
2.  $4a(x-2b)+b(x+2a)=x(b-3a)$
3.  $4b(x-3b)=3bx-7b^2$
4.  $5ax-3(a^2-1)=ax+3$
5.  $x(2m-3)+m(x-3)=2x-5$
6.  $a(x-5+b)=b(a-5+x)$
7.  $3a+2m(b+x)=a(b+x+3)$
8.  $5a(x-a)+x+b(x-a)=a$
9.  $6m(x-am^2+m^3)+2amx=2m^2x+18m^3$
10.  $ab^4\left[7-5a(3x+2a^2)\right]+30a^3b^5=7ab^4-5a^3b^3x$

תשובות:

1.  $2\frac{2}{3}$ , ( $m \neq 0$ )   2.  $\frac{6b}{7}$ , ( $a \neq 0$ )   3.  $5b$ , ( $b \neq 0$ )   4.  $\frac{3}{4}a$ , ( $a \neq 0$ )   5.  $1$ , ( $m \neq 1\frac{2}{3}$ )  
6.  $5$ , ( $a \neq b$ )   7.  $-b$ , ( $a \neq 2m$ )   8.  $a$ , ( $b \neq -5a-1$ )   9.  $3m^2$ , ( $m \neq 0$ ,  $m \neq a+3$ )  
10.  $2ab$ , ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq 3b$ )

ג. בתרגילים הבאים, צמצם את התוצאה בעזרת פירוק לגורמים ע"י נוסחות הכפל.

- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| 1. $ax - bx = a^2 - b^2$          | 2. $a(x - a) = 3(x - 3)$                |
| 3. $2m(x - 2m) = 5(x - 5)$        | 4. $2(x + 5) = 6 + 3a(3a + x)$          |
| 5. $5x - 27a^2 + 75 = 3ax$        | 6. $ax + bx = a^2 + 2ab + b^2$          |
| 7. $2mx - 6x = m^2 - 6m + 9$      | 8. $8(x - 2) = k(k - 2x + 8)$           |
| 9. $5(bx + 5 - 2b) = b^2(x - 1)$  | 10. $m^2(x - 1) = 36x - 12m + 36$       |
| 11. $4m(1 - x) + 4x = m^2(m - x)$ | 12. $a^2(2x - 1) + ax(a^2 + 1) + 1 = 0$ |

תשובות:

1.  $a + b$ , ( $a \neq b$ )   2.  $a + 3$ , ( $a \neq 3$ )   3.  $2m + 5$ , ( $m \neq 2.5$ )   4.  $-3a - 2$ , ( $a \neq \frac{2}{3}$ )  
5.  $-9a - 15$ , ( $a \neq 1\frac{2}{3}$ )   6.  $a + b$ , ( $a \neq -b$ )   7.  $\frac{m-3}{2}$ , ( $m \neq 3$ )   8.  $\frac{k+4}{2}$ , ( $k \neq -4$ )  
9.  $\frac{b-5}{b}$ , ( $b \neq 5$ ,  $b \neq 0$ )   10.  $\frac{m-6}{m+6}$ , ( $m \neq -6$ )   11.  $\frac{m(m+2)}{m-2}$ , ( $m \neq 2$ )  
12.  $\frac{a-1}{a(a+1)}$ , ( $a \neq -1, 0$ )

ד. בפתרון התרגילים הבאים, צמצם את התוצאה בעזרת פירוק טרינום:

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. $ax + x = a^2 + 4a + 3$                     | 2. $m(x + 2) = m^2 - 3(1 - x)$        |
| 3. $2(2x + 5) = a(a + 2x + 3)$                 | 4. $2a(x - a) - 3(1 + a - x) = 2a$    |
| 5. $2 - m(5 + mx) = 3m^2(1 - mx)$              | 6. $a^2x - 5(4x - 3) = a(3 + x)$      |
| 7. $6m^2(x - 2) + 8(x + m) = 16mx$             | 8. $ax - 4(3x + 1) = a^2(1 - x) + 5a$ |
| 9. $3(a + 2) + 2x = 2a(ax - 2a - 3.5)$         |                                       |
| 10. $2a^3(3x - 4a - 20) - 12a^2(x + 4) = 90ax$ |                                       |

תשובות:

1.  $a + 3$ , ( $a \neq -1$ )   2.  $m + 1$ , ( $m \neq 3$ )   3.  $-\frac{1}{2}(a + 5)$ , ( $a \neq 2$ )   4.  $a + 1$ , ( $a \neq -1.5$ )  
5.  $\frac{m+2}{m^2}$ , ( $m \neq 0, \frac{1}{3}$ )   6.  $\frac{3}{a+4}$ , ( $a \neq -4, 5$ )   7.  $\frac{2m}{m-2}$ , ( $m \neq \frac{2}{3}, 2$ )

8.  $\frac{a+1}{a-3}$ , ( $a \neq -4, 3$ ) 9.  $\frac{2a+3}{a-1}$ , ( $a \neq \pm 1$ ) 10.  $\frac{4a(a+2)}{3(a-5)}$ , ( $a \neq -3, 0$ )

ה. פתור את המשוואות הבאות ופשט את התוצאה על ידי צמצום:

$$\begin{array}{ll}
 1. \frac{4x-a}{b} - \frac{b+2x}{a} = \frac{4ab-2b^2-5a^2}{ab} & 2. \frac{x+m}{m} - \frac{x-a}{a} = a+2-m \\
 3. \frac{x+3m}{x} - \frac{2}{m} = \frac{4(m^2-1)}{mx} & 4. \frac{x+a}{2} - \frac{3a}{a-1} = \frac{a(2a-7)}{2(a-1)} \\
 5. \frac{x}{a} - \frac{m-x}{m} = \frac{m^2+a^2}{am} + 1 & 6. \frac{a(x+5)}{b} - 2x - \frac{b(5-x)}{a} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \\
 7. \frac{a}{a+2} + \frac{x}{a-2} = \frac{2a^2+3a+6}{a^2-4} & 8. \frac{ax}{a+b} - \frac{bx}{a-b} = 1 - \frac{2b^2x}{a^2-b^2} \\
 9. \frac{mx+5x}{2} - \frac{7x-3}{4} = \frac{mx-2m}{5} - \frac{m(m-x)}{20} \\
 10. \frac{2x(m-2)}{3} - \frac{m(m-1)}{12} - \frac{x(m+3)}{4} + 1\frac{2}{3} = 0 \\
 11. \frac{5x-6a}{a-b} - \frac{2b-3x}{a+b} = \frac{10a^2+3b^2}{a^2-b^2} \\
 12. \frac{a(ax+22)}{6} - \frac{2(4x-7)}{3} - \frac{a(a+3)}{2} = \frac{a(8-a)}{3} \\
 13. \frac{(m-a)^2}{m^2-4a^2} - \frac{2a-3x}{2a-m} = \frac{3m+x+4a}{m+2a} - 3 \\
 14. \frac{3a-8}{4} + \frac{a(a-4)}{12} = \frac{ax(2a-3)}{6} - \frac{x(a^2-3)}{4} \\
 15. \frac{2a(a+x)+7x}{10} - \frac{a(ax+2a+2)}{15} = \frac{2a+9x}{6} - \frac{ax+2}{3} \\
 16. \frac{(2ax+3)a}{6} - \frac{a(2-a)}{2} + \frac{2(4-a^2)}{3} = \frac{1-8x(a+3)}{2} - \frac{5}{6} \\
 17. 4 - \frac{mx(1-m)}{10} - 1\frac{1}{5}x = \frac{2(1+m)(1-m)}{5} + \frac{m(m-x)}{2} \\
 18. \frac{5(3+20x)}{3} - \frac{mx(8m-4)}{6} + \frac{m(3m-2)x}{3} + \frac{m(m+2)}{3} = \frac{m(m-1)}{2}
 \end{array}$$

תשובות:

1.  $\frac{b-2a}{2}$ , ( $b \neq 2a$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ) 2.  $am$ , ( $a \neq m$ ,  $a, m \neq 0$ )  
 3.  $m+2$ , ( $x \neq 0$ ,  $m \neq 2$ ,  $m \neq 0$ ) 4.  $\frac{a^2}{a-1}$ , ( $a \neq 1$ ) 5.  $a+m$ , ( $m \neq -a$ ,  $a \neq 0$ ,  $m \neq 0$ )  
 6.  $\frac{6(b+a)}{b-a}$ , ( $b \neq a$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ) 7.  $a+3$ , ( $a \neq \pm 2$ ) 8.  $\frac{a+b}{a-b}$ , ( $a \neq \pm b$ )  
 9.  $-\frac{1}{5}(m+5)$ , ( $m \neq -3$ ) 10.  $\frac{m+4}{5}$ , ( $m \neq 5$ ) 11.  $\frac{4a+b}{2}$ , ( $b \neq \pm a$ ,  $b \neq -4a$ )  
 12.  $\frac{a+7}{a+4}$ , ( $a \neq \pm 4$ ) 13.  $\frac{a+m}{4}$ , ( $m \neq -a$ ,  $m \neq \pm 2a$ ) 14.  $\frac{a-3}{a+8}$ , ( $a \neq -8$ )  
 15.  $\frac{a-5}{a-6}$ , ( $a \neq 6$ ) 16.  $\frac{a-3}{2(a+6)}$ , ( $a \neq -6$ ) 17.  $\frac{m-6}{m-2}$ , ( $m \neq -6$ ,  $a \neq 2$ )  
 18.  $\frac{-(m+3)}{2(m+10)}$ , ( $m \neq -10$ )

1. הנוסחאות הבאות מקשרות כל אחת בין מספר אותיות, בטא בכל תרגיל את האות המבוקשת באמצעות האותיות האחרות.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $a = \frac{2x}{3c}$ ; $x = ?$ , $c = ?$     | 2. $\frac{b}{2a} = \frac{3}{5n}$ ; $a = ?$ , $n = ?$ |
| 3. $s = \frac{ah}{2}$ ; $a = ?$ , $h = ?$      | 4. $a = (b+c)k$ ; $k = ?$ , $c = ?$                  |
| 5. $a(m-n) = x$ ; $n = ?$                      | 6. $s = (a+b)\frac{h}{2}$ ; $h = ?$ , $a = ?$        |
| 7. $b = \frac{(c+d)m}{n}$ ; $n = ?$ , $d = ?$  | 8. $a = \frac{(2k+3m)b}{5}$ ; $k = ?$                |
| 9. $m = \frac{3(k+4n)}{a}$ ; $a = ?$ , $n = ?$ | 10. $m = \frac{a+1}{a}$ ; $a = ?$                    |
| 11. $b = \frac{3c}{c-2}$ ; $c = ?$             | 12. $a = \frac{m+3}{m-4}$ ; $m = ?$                  |
| 13. $a = \frac{3x+4}{5-4x}$ ; $x = ?$          | 14. $m = \frac{4a+b}{b-4a}$ ; $b = ?$ , $a = ?$      |
| 15. $a = \frac{bc+d}{3-c}$ ; $c = ?$           | 16. $a = \frac{xy+m}{x-m}$ ; $m = ?$ , $x = ?$       |
| 17. $m = \frac{xy}{(x+y)a}$ ; $y = ?$          | 18. $k = \frac{at}{as+b}$ ; $a = ?$                  |
| 19. $\frac{1}{ma} = \frac{a}{m+1}$ ; $m = ?$   | 20. $a = (b+5)(3c-4d)$ ; $d = ?$                     |

$$21. a = (a + 2b)(b - 3c); c = ?$$

$$22. a = \left(b + \frac{c}{m}\right)m; b = ?$$

$$23. x = a\left(a - \frac{b}{c}\right); c = ?$$

$$24. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{y}; x = ?$$

$$25. \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = a; x = ?, y = ?$$

### תשובות:

$$1. x = \frac{3ac}{2}, c = \frac{2x}{3a} \quad 2. a = \frac{5bn}{6}, n = \frac{6a}{5b} \quad 3. a = \frac{2s}{h}, h = \frac{2s}{a}$$

$$4. k = \frac{a}{b+c}, c = \frac{a-bk}{k} \quad 5. n = \frac{am-x}{a} \quad 6. h = \frac{2s}{a+b}, a = \frac{2s-bh}{h}$$

$$7. n = \frac{(c+d)m}{b}, d = \frac{bn-cm}{m} \quad 8. k = \frac{5a-3mb}{2b} \quad 9. a = \frac{3(k+4n)}{m}, n = \frac{am-3k}{12}$$

$$10. a = \frac{1}{m-1} \quad 11. c = \frac{2b}{b-3} \quad 12. a = \frac{4a+3}{a-1} \quad 13. k = \frac{5a-4}{4a+3}$$

$$14. b = \frac{4a(m+1)}{m-1}, a = \frac{b(m-1)}{4(m+1)} \quad 15. c = \frac{3a-d}{a+b} \quad 16. x = \frac{m(a+1)}{a-y}, m = \frac{x(a-y)}{a+1}$$

$$17. y = \frac{amx}{x-am} \quad 18. a = \frac{kb}{t-ks} \quad 19. m = \frac{1}{a^2-1} \quad 20. d = \frac{3bc+15c-a}{4(b+5)}$$

$$21. c = \frac{2b^2+ab-a}{3(a+2b)} \quad 22. b = \frac{a-c}{m} \quad 23. c = \frac{ab}{a^2-x} \quad 24. x = \frac{1}{2}y$$

$$25. x = \frac{2y}{ay-2}, y = \frac{2x}{ax-2}$$

⚡ פתור את מערכות המשוואות הבאות (מצא את x ואת y):

$$1. \begin{cases} x + y = 4a \\ x - y = 2a \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 5y = 2a + 15b \\ 3x - 2y = 6a - 6b \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 3y = 7a \\ x = y + a \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - 2y = 3a + b \\ y = x - a \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - 2y = 2 - a \\ 3x + y = 4a - 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 3y = 5a - 11 \\ 5x - 2y = 3a + 20 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -x + ay = 3a - 1 \\ 2x - y = 4a - 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} mx + 3y = m^2 \\ x - y = 2m + 3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} ax + y = a^2 \\ y - 2x = 2 - a \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} ax + 3y = 3 - a \\ -x - 2y = 2a - 4 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + my = m^2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} ax + 5y = a^2 + 8a - 15 \\ 3x + 2y = 5a + 3 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} mx + 2y = m^2 + 7m - 2 \\ 2x - 3y = 13 - m \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} kx + y = k \\ 4x + ky = k + 2 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} mx - 9y = m - 12 \\ -x + my = m \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 4x + my = m^2 - 10m - 4 \\ 3y - 4x = 7m - 14 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{3x + m}{7} + \frac{y - 2}{m} = m + 3 \\ mx + 2y = 2(m + 1)(m + 2) \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{3x - 3}{a} + y = a + 1 \\ \frac{2y + 4}{a} - 1.5 = \frac{x - 1}{2a} \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{y + b}{a} - \frac{x + 2b}{b} = \frac{ab - a^2 + 2b^2}{ab} \\ x + y = 3a \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{x + 2k}{a} - \frac{y + 2a}{k} = \frac{(a + k)(3k - a)}{ak} \\ x + y = 2(a + k) \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{x + 2b}{a} - \frac{y + 2a}{b} = b - \frac{3(a + b)(a - b)}{ab} \\ x - 2a = y + 4b \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} y = x + 2m \\ \frac{x - 5a}{m} + \frac{y + 2a}{a} = \frac{m^2 + 2am - 4a^2}{am} \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{ax - 2y - 2}{3} = \frac{ax + y + a}{2} - \frac{a^2 + 3y}{6} \\ \frac{x - a^2 - 3y}{2} - \frac{a - 6y}{5} = \frac{3 - 5a^2}{10} - 3.5 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} (a-2)x + 3y = 5a - 4 \\ 3x + 5(y-2a) = 6 - 5a \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4(x-3a) + 3(y-a+1) = 3(x-y-1) \\ 3(y+x) - a(x+a) = a(15-4a) - 3 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 5(y+4a) - 4(y+7a) = a(3-x-a) \\ 7(y+6a-5) - 3(2y+5a-1) = 4(7a-x-2) \end{cases}$$

תשובות:

1. (3a;a) 2. (2a;3b) 3. (2a;a) 4. (a+b;b) 5. (a;a-1) 6. (a+2;a-5)  
 7. (2a+1 ; 5)  $a \neq \frac{1}{2}$  8. (m+3;-m) 9. (a-1;a)  $a \neq -2$  10. (2;1-a)  $a \neq \frac{2}{3}$   
 11. (-2m;m+2)  $m \neq 2$  12. (a+1 ; -a) 13. (a+3;a-3)  $a \neq 7.5$   
 14. (m+5; m-1),  $m \neq -\frac{4}{3}$  15.  $\left(\frac{k+1}{k+2}; \frac{k}{k+2}\right)$   $k \neq -2$   
 16.  $\left(\frac{m}{m+3}; \frac{m+4}{m+3}\right)$   $m \neq \pm 3$  17. (-m-1;m-6),  $m \neq 3$  18. (2m;3m+2)  $m \neq 0$   
 19. (a+1;a-2)  $a \neq -2$ ,  $a \neq 0$  20. (a-b;2a+b)  $a \neq -b$ ,  $a, b \neq 0$  21. (3a+k;k-a)  $a \neq -k$ ,  $a, k \neq 0$  22.  
 (b-a;a-2b)  $a, b \neq 0$ ,  $a \neq b$  23. (a-m;a+m)  $a \neq -m$ ,  $a, m \neq 0$   
 24. (a-7;a-1)  $a \neq -6\frac{2}{3}$  25. (2;a)  $a \neq 3\frac{4}{5}$  26. (3a;2a-1)  $a \neq 2.5$   
 27. (6-a;5a)  $a \neq 4$

ח. פתור את המשוואות הבאות (x - הנעלם) בעזרת פירוק לגורמים.

- |                        |                              |
|------------------------|------------------------------|
| 1. $x^2 - 5ax = 0$     | 2. $ax^2 - 3a^2x = 0$        |
| 3. $mx^2 + 8ax = 0$    | 4. $2x^2 - (k+1)x = 0$       |
| 5. $bx^2 + ax - x = 0$ | 6. $(m-1)x^2 - m^2x + x = 0$ |
| 7. $2x^2 - 32b^2 = 0$  | 8. $ax^2 - 9a^3b^2 = 0$      |
| 9. $x^2 - (a-1)^2 = 0$ | 10. $mx^2 - 4m(m+1)^2 = 0$   |

11.  $x^2 - 9a^2 - 6a - 1 = 0$

12.  $a^2x^2 - 4a^2 - 12a - 9 = 0$

13.  $x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

14.  $x^2 + 7mx - 18m^2 = 0$

15.  $x^2 - ax - 72a^2 = 0$

16.  $16x^2 - 6ax - a^2 = 0$

17.  $m^2x^2 - 9mx - 22 = 0$

18.  $a^2x^2 + 8abx + 15b^2 = 0$

19.  $4a^2x^2 - 15amx + 9m^2 = 0$

20.  $5a^2x^2 - 6abx - 8b^2 = 0$

תשובות:

1. 0, 5a 2. 0, 3a (a ≠ 0) 3. 0,  $\frac{-8a}{m}$ , (m ≠ 0) 4. 0,  $\frac{k+1}{2}$  5. 0,  $\frac{1-a}{b}$ , b ≠ 0

6. 0, m+1, (m ≠ 1) 7. ±4b 8. ±3ab, (a ≠ 0) 9. ±(a-1) 10. ±2(m+1), (m ≠ 0)

11. ±(3a+1) 12. ± $\frac{2a+3}{a}$ , (a ≠ 0) 13. 2m, 3m 14. -9m, 2m 15. -8a, 9a

16.  $-\frac{a}{8}$ ,  $\frac{a}{2}$  17.  $-\frac{2}{m}$ ,  $\frac{11}{m}$ , (m ≠ 0) 18.  $-\frac{3b}{a}$ ,  $-\frac{5b}{a}$ , (a ≠ 0)

19.  $\frac{3m}{a}$ ,  $\frac{3m}{4a}$ , (a ≠ 0) 20.  $\frac{2b}{a}$ ,  $-\frac{4b}{5a}$ , (a ≠ 0)

ט. פתור את המשוואות שבסעיף הקודם בעזרת נוסחת השורשים.

י. פתור את המשוואות הבאות (מצא את x).

1.  $x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$

2.  $x^2 - b^2 - 2ax + a^2 = 0$

3.  $x^2 - 8ax - 4b^2 + 16a^2 = 0$

4.  $x^2 - 4mx = 9p^2 - 4m^2 = 0$

5.  $x^2 + 12ax = 4(b^2 - 9a^2)$

6.  $x^2 + 3bx = 0.25(k^2 - 9b^2)$

7.  $x^2 - (3a + 2)x + 6a = 0$

8.  $x^2 - (5a - 1)x - 5a = 0$

9.  $x^2 - (5b - 6)x - 30b = 0$

10.  $x^2 + (4b - 3)x = 12b$

11.  $x^2 + 2x + ax + 2a = 0$

12.  $x^2 - 2bx + 3x - 6b = 0$

13.  $x^2 - 5bx + 3x - 15b = 0$

14.  $x^2 - 3bx + 7x - 21b = 0$

15.  $2x^2 - 5x + 2ax - 5a = 0$

16.  $2x^2 - x + 6ax - 3a = 0$

17.  $ax^2 - 3x + 2ax - 6 = 0$ , a ≠ 0

18.  $3ax^2 - 2ax + 12x - 8 = 0$ , a ≠ 0

19.  $x^2 - 2ax - (3a^2 + 4a + 1) = 0$

20.  $x^2 - 3bx + (2b^2 - b - 1) = 0$

21.  $x^2 + 5bx + 4b^2 + 3b - 1 = 0$

23.  $(x + 2)^2 - 5(a + 5) = a(5x - 6a)$

25.  $\frac{x}{3(2x+a)} + \frac{3a^2}{4x^2-a^2} = \frac{a}{2x-a}$

27.  $\frac{4a^2}{x^2-4a^2} + \frac{a}{2(x+2a)} = \frac{x}{8x-16a}$

29.  $\frac{2a-3x}{x-6} = \frac{2-x}{a-5}$

31 \*  $\frac{2x-a}{5(x-a)} - \frac{a-5x}{25(x+a)} = \frac{5x-7a}{25(x^2-a^2)} + 1$

33.  $x^4 - 13a^2m^2x^2 + 36a^4m^4 = 0$

35.  $81x^4 - 18m^2x^2 + m^4 = 0$

22.  $x^2 - 6ax + 8a^2 + 6a - 9 = 0$

24.  $(x-6)(x-7) = a(3x-2a-20)$

26.  $\frac{7}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{14a}{3(x^2-a^2)}$

28.  $\frac{x+17a}{x+7a} = \frac{7a+x}{5a}$

30.  $\frac{a+3}{x+1} = \frac{3x-a-2}{2x}$

32 \*  $\frac{3a}{9a^2-4} = \frac{1}{2(2+ax)} + \frac{1}{2(ax-2)}$

34.  $9b^4x^4 - 10b^2x^2 + 1 = 0$

36.  $\frac{m^2}{x^2-3m^2} - \frac{m^2}{x^2-2m^2} = \frac{1}{2}$

תשובות:

1.  $a \pm 3$  2.  $a \pm b$  3.  $4a \pm 2b$  4.  $2m \pm 3p$  5.  $-6a \pm 2b$  6.  $\frac{-3b}{2} \pm \frac{k}{2}$  7. 2, 3a 8. -1, 5a) 9.

-6, 5b 10. -4b, 3 11. -2, -a) 12. -3, 2b 13. -3, 5b 14. -7, 3b 15. -a, 2.5 16.

-3a, 0.5 17. -2,  $\frac{3}{a}$  18.  $-\frac{4}{a}$ ,  $\frac{2}{3}$  19.  $3a+1$ ,  $-a-1$  20.  $b-1$ ,  $2b+1$

21.  $-4b+1$ ,  $-b-1$  22.  $4a-3$ ,  $2a+3$  23.  $2a+3$ ,  $3a-7$  24.  $2a+6$ ,  $a+7$  25.  $\frac{3a}{2}$ ,  $2a$ ,

$(x \neq \pm \frac{a}{2})$  26.  $\frac{4a}{3}$ ,  $(x \neq \pm a)$  27.  $-4a$ ,  $6a$ ,  $(x \neq \pm 2a)$  28.  $-12a$ ,  $3a$ ,  $(a \neq 0)$

29.  $2a-4$ ,  $a-3$  30.  $-\frac{1}{3}$ ,  $a+2$ ,  $(a \neq -3 \Rightarrow x \neq -1)$  31.  $1\frac{2}{5}a$ ,  $-\frac{1+3a}{2}$

32.  $\frac{-4}{3a^2}$ ,  $3$ ,  $(a \neq 0, \frac{2}{3})$  33.  $\pm 2am$ ,  $\pm 3am$  34.  $\pm \frac{1}{b}$ ,  $\pm \frac{1}{3b}$ ,  $(b \neq 0)$

35.  $\pm \frac{m}{3}$ ,  $\pm \frac{m}{3}$  36.  $\pm m$ ,  $\pm 2m$

## פרק יא': בעיות

### 1. פתרון בעיות.

בפתרון בעיות משתלבים שני נושאים:

- בניית תבנית פסוק - תרגום "הסיפור" למשוואה.
- פתרון המשוואות המתקבלות ובדיקה אם התשובה מתאימה לתחום ההגדרה של הבעיה.

#### 1.1 תרגום הבעיה למשוואה.

בבואנו לפתור בעיה, עלינו להחליט תחילה את מה ייצג הנעלם. ואם יש יותר מגודל אחד לא ידוע, כיצד נבטא אותם. אחר כך צריך לבנות תבנית או תבניות פסוק. בעקרון, אפשר לפתור בעיה רק אם היא מספקת מספר משוואות כמספר הנעלמים.

למשל: יש למצוא שני מספרים, המקיימים: "מספר אחד קטן פי 2 מהשני, וסכום המספרים 12", תחילה צריך להחליט אם:

- המספר השני יסומן ב- $x$ , ואז הראשון הוא  $\frac{x}{2}$ .
- המספר הראשון יסומן ב- $x$  ואז השני הוא  $2x$ .
- המספר האחד יסומן ב- $x$  והשני  $12-x$ .

בעיה זו, נתונים לפחות שני קשרים בין הגורמים המוזכרים בבעיה. אפשר להשתמש בקשרים אלה באחת משתי הצורות הבאות:

- כל אחד מהגורמים המוזכרים בבעיה, יסומן כנעלם אחר -  $y, x$  - ושני הקשרים יתורגמו למשוואות - מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים.
- אחד מהקשרים מאפשר לבטא גורם אחד באמצעות הגורם האחר (שסומן כנעלם  $x$ ) ובעזרת הקשר השני בונים משוואה.

למשל, בבעיה הנ"ל, אפשרות אחת, היא לסמן מספר אחד ב- $x$ , והשני ב- $y$  ובעזרת שני הקשרים המוזכרים לבנות משוואות.

$$\begin{array}{ll} \text{מספר אחד קטן פי 2 מהשני} & x=2y \\ \text{סכום המספרים הוא 12} & x+y=12 \end{array}$$

מתקבלת מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים.

אפשרות שניה, להשתמש באחד מהקשרים לסימון הנעלמים  $2x-1$  (או  $x-1$ )  $\frac{1}{2}x$

$$\text{ובקשר השני לבניית משוואה: } x+2x=12 \text{ (או: } x+\frac{1}{2}x=12 \text{)}$$

אפשר גם להחליף את השימוש בקשרים: השני לבניית נעלמים:  $x, 12-x$ . והראשון לבניית משוואה:  $12-x=2x$ .

בתרגום הבעיה למשוואה יש לשים לב לשני עקרונות שימושיים:

**א. בציון הנעלמים:**  
מספר הגדול מ-K ב-A הוא  $K+A$   
מספר הקטן מ-K ב-A הוא  $K-A$   
מספר הגדול מ-K פי A הוא  $AK$   
מספר הקטן מ-K פי A הוא  $\frac{K}{A}$

**ב. בניית משוואה המקשרת בין שני ביטויים A ו-B, כך ש-A גדול ב-K מ-B, נעזרים בעקרון "הסוציאליסטי" - מוסיפים K לביטוי הקטן או מחסירים K מהגדול ואז יהיו שווים:**  
 $A - K = B$  או  $A = B + K$

בסעיפים הבאים, נדון בקבוצות שונות של בעיות ונלמד דרכי סימון נעלמים ויצירת משוואות מתאימות לכל קבוצה.

## 1.2 פתרון המשוואה.

אחרי שבנינו את המשוואה או את מערכת המשוואות, פותרים אותה ובודקים אם הפתרון נמצא בתחום ההגדרה של הבעיה, וזאת בנוסף לבדיקת היותו בתחום ההגדרה של המשוואה.  
למשל, אם בבעיה שבה הנעלמים מסמן משקל חבילה או אורך חדר, וכו', לא יתכן שערכו יהיה שלילי; ובמקרה שהוא מסמן מספר בלונים או מספר אנשים, לא יתכן שערכו יהיה שבר ולא מספר שלילי.  
כאמור בדיקה זו נעשית בנוסף לבדיקת היות התשובה בתחום הקיום של המשוואה.

## 2. בעיות כלליות

ההתייחסות בבעיה יכולה להיות:

- \* למספר הנעלמים שהיא מכילה.
- \* למעלת המשוואות המקשרות בין הנעלמים.

נראה כיצד בונים פתרון בעיה בהתאם למספר הגדלים הלא ידועים בה: גודל אחד בלבד לא ידוע, שני גדלים, שלושה גדלים לא ידועים.

## 2.1 נעלם אחד.

### דוגמה א'

דני קנה מדמי הכיס שלו מתנה לאמו ב- 25 ש'. אחר כך קיבל מסבו סכום השווה למה שנותר לו. אחרי שהוא קיבל בחזרה גם 8 ש', שהלווה לחבר, היו בידיו 52 ש'. כמה כסף היה לדני בתחילה.

פתרון נסמן ב- $x$  את הסכום שהיה לדני בהתחלה. אחרי קניית המתנה נותר לו  $(x-25)$  ש'. אחרי שקיבל את הכסף מסבו, היה לו  $2(x-25)$  ש', ועם החזרת ההלוואה, יש ברשותו

$2(x-25)+8$  ש'. זה הסכום שבידיו, והוא שווה ל- 52 ש'. והמשוואה היא:

$$2(x-25)+8=52$$

$$2x-50+8=52 \Rightarrow x=47$$

תשובה: לדני היו בהתחלה 47 ש'.

### דוגמה ב'

מירב בת 3, אביה בן 31. בעוד כמה שנים יהיה גיל האב גדול פי 5 מגיל בתו?

פתרון נסמן את מספר השנים ב- $x$ .

בעוד  $x$  שנים יהיה גילה של מירב:  $3+x$ , גילו של אביה יהיה:  $31+x$ , והקשר בין הגילים:  $31+x=5(3+x)$ .

$$31+x=5(3+x)$$

$$31+x=15+5x$$

$$16=4x \Rightarrow x=4$$

תשובה: כעבור 4 שנים.

בדיקה: בעוד 4 שנים יהיה גיל האב:  $31+4=35$  שהוא אמנם פי 5 מגיל בתו  $3+4=7$ .

## 2.2 שני נעלמים

### דוגמה ג'

אדם טס לאילת ומשם נסע במונית לסיני ושילם על זה 360 ש'. מחיר הטיסה עלה לו פי 3.5 ממחיר הנסיעה במונית. כמה עלתה הטיסה?

פתרון בבעיה זו שני גדלים לא ידועים: מחיר הנסיעה במונית ומחיר הטיסה. אפשר לפתור אותה בעזרת נעלם אחד, או בעזרת שני נעלמים.

נעלם אחד נסמן את מחיר הנסיעה במונית -  $x$ , ואז מחיר הטיסה -  $3.5x$ . סכומם 360 והמשוואה:

$$x+3.5x=360$$

$$4.5x=360 \Rightarrow x=80$$

תשובה מחיר הטיסה:  $3.5 \cdot 80 = 280$

**שני נעלמים** נסמן את מחיר הנסיעה במונית -  $x$ , ואת מחיר הטיסה ב- $y$  מתקבלת מערכת משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ y = 3.5x \end{cases}$$

שפתרונה:

$$x + 3.5x = 360$$

$$4.5x = 360 \Rightarrow x = 80, y = 3.5 \cdot 80 = 280$$

### דוגמה ב'

אדם נסע דרך של 6 ק"מ, חלקה בכביש אספלט וחלקה בדרך עפר. היחס בין אורך הכביש לאורך דרך העפר הוא 2:7. מצא את אורך דרך העפר.

**פתרון בעזרת שני נעלמים.** נסמן את אורך הכביש ב- $x$  ואת אורך דרך העפר ב- $y$ . נעזר בשני הקשרים הנתונים כדי להרכיב מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{7}{2} \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 7y \\ x = 6 - y \end{cases} \Rightarrow 2(6 - y) = 7y \Rightarrow 12 - 2y = 7y \Rightarrow 9y = 12 \Rightarrow y = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

**תשובה:** אורך דרך העפר היא  $1\frac{1}{3}$  ק"מ.

**פתרון בעזרת נעלם אחד** נסמן את אורך הכביש ב- $x$ , ואז אורך דרך העפר  $x - 6$ , וכו'.

### 2.3 שלושה נעלמים

גם בקבוצה זו אנו יכולים לבחור בין פתרון בעזרת שלושה נעלמים לפתרון בעזרת נעלם אחד. נדגים את הדרך השנייה.

### דוגמה א'

לרמי יש פי 3 גולות מאשר לאבי. לגיל שתי גולות פחות מאשר לאבי. לאבי ולגיל יש ביחד 5 גולות פחות מאשר לרמי. כמה גולות לאבי?

**פתרון** נסמן ב- $x$  את הגורם שאליו מתיחסים שני הגורמים האחרים (שזה מספר הגולות בידי אבי) ואת האחרים נבטא באמצעותו: מספר הגולות בידי רמי- $3x$ , מספר הגולות בידי גיל- $(x-2)$ . והמשוואה:

$$x + x - 2 + 5 = 3x$$

$$2x + 3 = 3x \Rightarrow x = 3$$

**תשובה:** לאבי יש 3 גולות.

### דוגמה ב'

משקל חבילה א' קטן ב-1 ק"ג ממשקל חבילה ב'. משקל חבילה ג' גדול פי 2 ממשקל חבילה א'. משקל כל החבילות ביחד הוא 9 ק"ג. מה משקל כל חבילה?

**פתרון.** בבעיה זו יש קשר כפול: א' קשור ל- ב', ו- ג' קשור ל- א'.  
 על כן, נסמן בתור  $x$  את המשקל של חבילה ב', ואז המשקל של חבילה א' הוא  $x-1$ ,  
 והמשקל של חבילה ג', הקשורה לחבילה א' -  $2(x-1)$ .

$$x+x-1+2(x-1)=9$$

$$x+x-1+2x-2=9$$

$$4x=12 \Rightarrow x=3$$

**תשובה:** המשקל של חבילה ב' 3 ק"ג, חבילה א':  $3-1=2$ , וחבילה ג':  $2 \cdot 2=4$ .

## דוגמה ג'

עמוד מורכב משלושה צינורות שהאחד (א') ארוך ב- 20 ס"מ מהשני, וקטן פי 3 מצינור שלישי. חשב את אורכי הצינורות אם אורך העמוד הוא 4.8 מ'.

**פתרון.** בבעיה זו יש קשר של נעלם אחד אל כל אחד מהשניים האחרים.  
 כדי שנוכל לקבוע את הביטויים בצורה נוחה, כדאי לסמן ב- $x$  את אורך צינור א' ואז להפוך את הקשרים: במקום שהוא יתייחס ל- ב' ול- ג', נהפוך את הקשר כך ש- ב' ו- ג' יתייחסו אליו:

אם א' ארוך ב- 20 ס"מ מ- ב', הרי ש- ב' קצר ב- 20 ס"מ מ- א', כלומר  $x-20$ ,  
 ואם א' קצר פי 3 מ- ג', הרי ג' ארוך פי 3 מ- א', כלומר  $3x$ . נהפוך את 4.8 מ' ל- 480 ס"מ. והמשוואה:

$$x+x-20+3x=480$$

$$5x=500 \Rightarrow x=100 \text{ ס"מ}$$

**תשובה:** אורך צינור א' = 100 ס"מ, אורך צינור ב' = 80 ס"מ, אורך צינור ג' = 300 ס"מ.

$$100 \cdot 3 = 300 \text{ ס"מ} = 300$$

$$100+80+300=480 \quad \text{בדיקה}$$

כאמור, אפשר לפתור את הבעיה גם בעזרת שלושה נעלמים:  $y, z, x$   
 אורך צינור א' -  $x$ , אורך צינור ב' -  $y$ , אורך צינור ג' -  $z$   
 הנעלמים הללו קשורים ע"י שלוש משוואות:

$$\begin{cases} y = x + 20 \\ z = 3y \\ x + y + z = 480 \end{cases}$$

פתור את המערכת!

כל הדוגמאות הנ"ל הציגו בפנינו דרכים לבניית ביטויים עבור הנעלמים.  
 בסעיפים הבאים נציג קבוצות טיפוסיות של בעיות ודרכים אופייניות לפתרונן.

### 3. תכונה כמותית, כלל הטבלה

מספר גדול של בעיות באלגברה מאופיינות ע"י שלושה מרכיבים, כאשר אחד מהם שווה למכפלה של שני האחרים. בצורה כללית ביותר המאפיינים הם:

- \* "תכונה כמותית" של פריט מסוים
- \* מספר הפריטים
- \* תכונה כמותית כוללת (של כל הפריטים הנ"ל)

למשל, אם מחיר של 1 ק"ג תפוזים הוא 5 ש', אז מחיר 3 ק"ג תפוזים יהיה 15 ש'.

במקרה זה התכונה הכמותית של פריט אחד הוא מחיר של ק"ג אחד של תפוזים, מספר הפריטים - מספר הק"ג, והתכונה הכמותית הכוללת - מחיר של 3 ק"ג.

נוהגים להכניס נתונים (או נעלמים) בטבלה, ובה מתקיים הכלל (נכנה אותו בשם "כלל הטבלה"):

**המכפלה של תוכן שתי עמודות (באותה השורה) שווה לתוכן העמודה השלישית**

נדגים זאת בעזרת מספר בעיות.



מפעל רכש 65 חולצות עבודה לפועלים - חלקן עם שרוול קצר במחיר 30 ש' כל אחת וחלקן עם שרוול ארוך במחיר 35 ש' כל אחת ושילם על הכל 2190 ש'.

כמה חולצות קנה מכל סוג.

נרשום טבלה ובה שלוש עמודות:

1. מחיר לחולצה - התכונה הכמותית לפריט אחד
2. מספר חולצות מכל סוג - מספר הפריטים
3. מחיר כולל - התכונה הכמותית הכוללת.

מחיר כולל	מספר פריטים	מחיר לפריט	
30x	x	30	ש' קצר
35(65 - x)	65 - x	35	ש' ארוך
2190	65	-	סה"כ

בשורה הראשונה - הפריטים הם חולצות עם שרוול קצר  
 בשורה השנייה - חולצות עם שרוול ארוך  
 בשורה השלישית - סה"כ מספר החולצות וסה"כ העלות שלהן.

העמודה השנייה מאפשרת לבטא את מספר החולצות עם שרוול ארוך באמצעות  $x$  :  $x - 65$ . מהעמודה השלישית מתקבלת המשוואה.

$$30x + 35(65 - x) = 2190$$

$$30x + 2275 - 35x = 2190$$

$$85 = 5x$$

$$x = 17 \Rightarrow 65 - 17 = 38$$

תשובה: המפעל רכש 17 חולצות עם שרוול קצר, ו-38 עם שרוול ארוך. אפשר לפתור את הבעיה גם בעזרת שני נעלמים, כאשר מסמנים ב- $y$  את המספר החולצות עם שרוול ארוך. מהעמודה השנייה והשלישית מתקבלות המשוואות:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ 30x + 35y = 2190 \end{cases}$$



במשאית גדולה אפשר להוביל 280 חבילות ואילו במשאית בינונית רק 220. חברה הזמינה 15 משאיות משני הסוגים והובלה באמצעותן 3900 חבילות. כמה משאיות היו מכל סוג.

התכונה הכמותית כאן היא תכולת כל משאית - בחבילות, מספר הפריטים - מספר המשאיות. נראה זאת בטבלה.

משאית	תכולת משאית	מספר משאיות	תכולה כוללת
גדולה	280	$x$	$280x$
בינונית	220	$y$	$220y$
סה"כ	-	15	3900

נעזרנו הפעם בשני נעלמים, המשוואות מתקבלות משתי העמודות השמאליות

$$\begin{cases} x + y = 15 \Rightarrow x = 15 - y \\ 280x + 220y = 3900 \end{cases}$$

$$280(15 - y) + 220y = 3900 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 10$$

תשובה: היו 10 משאיות גדולות ו-5 בינוניות. אפשר לפתור את הבעיה גם עם נעלם אחד, כאשר בעמודה האמצעית רושמים  $x - 15$  בשורה השנייה.

מחירים של 3 כרטיסים בשורה הראשונה בתיאטרון הוא כמו מחירים של 4 כרטיסים בשורות האחרונות. קבוצה קנתה 10 כרטיסים בשורה הראשונה ו- 8 כרטיסים בשורות האחרונות ושילמה עבורם 1280 ש"ח. מה מחיר כל כרטיס?

מחיר כולל		מספר כרטיסים		מחיר כרטיס	
10x	3x	10	3	x	שורה ראשונה
8y	4y	8	4	y	שורה אחרונה
1280	-				סה"כ

את העמודה של מספר הכרטיסים חילקנו לשניים: בחלק הימני הפרטים על המוצרים בתחילת הבעיה (3 כרטיסים, וכו') ובחלק השמאלי הפרטים ושבהמשך הבעיה. אותה חלוקה נעשתה בעמודה של המחיר הכולל.

מהחלק הימני מתקבלת המשוואה

$$\begin{cases} 3x = 4y \\ 10x + 8y = 1280 \end{cases}$$

ומהחלק השמאלי

$$10x + 2 \cdot 3x = 1280$$

נציב את  $y$  מהמשוואה הראשונה לשנייה

$$16x = 1280 \Rightarrow x = 80 \Rightarrow y = 60$$

תשובה: מחיר כרטיס בשורה הראשונה 80 ש"ח, ובשורות האחרונות - 60 ש"ח.

הילדים מהכיתה של רן החליטו לקנות לו מתנת יום הולדת. אך 6 מחבריו לא רצו להשתתף בקניית המתנה, ואז היה צריך כל ילד להגדיל את דמי ההשתתפות ב- 1 ש"ח.

ברגע האחרון החליטו ששת החברים כן להשתתף במתנה של כל הכיתה ונוספו עליהם גם 9 חברים של רן מהתנועה ואז היה על כל ילד לשלם 1 ש"ח פחות ממה שתוכנן תחילה. כמה ילדים בכיתה.

במקרה זה: מספר הפריטים זה מספר הילדים.  
"התכונה הכמותית" - דמי ההשתתפות של כל ילד במתנה.  
 נראה זאת בטבלה:

עלות כוללת	עלות לילד	מספר ילדים	
xy	y	x	מתוכנן
$(x - 6)(y + 1)$	y + 1	x - 6	שינוי I
$(x + 9)(y - 1)$	y - 1	x + 9	שינוי II

שלושת הביטויים בעמודה השמאלית מבטאים אותו מספר - עלות המתנה. לכן מתקבלת מערכת משוואות:

$$\begin{cases} (x-6)(y+1) = xy \\ (x+9)(y-1) = xy \\ xy + x - 6y - 6 = xy \\ xy - x + 9y - 9 = xy \end{cases}$$

אחרי ביטול  $xy$  בכל משוואה, וחיבור המשוואות אגף לאגף מתקבל

$$3y = 15$$

$$y = 5 \Rightarrow x = 36$$

תשובה: בכיתה 36 ילדים.

### דוגמה ה'

קנין רכש אגרטלים בסכום של 800 ש"ח. במהלך הפרוק, נשברו 2 אגרטלים. את האחרים הוא מכר ברווח של 10 ש"ח כל אחד, וקיבל עבור מכירתם 900 ש"ח. כמה אגרטלים נקנו.

גם במקרה זה נעזר בטבלה:

מחיר כולל	מחיר אגרטל	מספר אגרטלים	שנקנו
$xy$	$y$	$x$	שנקנו
$(x-2)(y+10)$	$y+10$	$x-2$	שנמכרו

והיות שמחירי הקניה והמכירה ידועים, מתקבלת מערכת משוואות

$$\begin{cases} xy = 800 \\ (x-2)(y+10) = 900 \\ xy = 800 \Rightarrow x = \frac{800}{y} \\ xy + 10x - 2y - 20 = 900 \end{cases}$$

$$800 + 10 \frac{800}{y} - 2y = 920$$

$$2y - \frac{8000}{y} + 920 - 800 = 0 \quad / \cdot \frac{y}{2}$$

$$y^2 + 60y - 4000 = 0$$

$$y = -30 \pm \sqrt{30^2 + 4000} =$$

$$= -30 \pm \sqrt{900 + 4000} = -30 \pm \sqrt{4900} = -30 \pm 70$$

לפי הנוסחה הזוגית:

$$y_1 = 40, \quad y_2 = -100$$

$$x_1 = 20$$

הפתרון השני אינו מתאים  
תשובה: נקנו 20 אגרטים.

אפשר לפתור בעיה זו, גם בעזרת נעלם אחד. במקרה זה משתמשים בקשר בין עמודות הטבלה כדי לקבל ביטויים למחיר האגרטה:

מחיר כולל	מחיר אגרטה	מספר אגרטים	
800	$\frac{800}{x}$	x	שנקנו
900	$\frac{900}{x-2}$	x-2	שנמכרו

ידוע שבכל אגרטה שנמכרה היה רווח של 10 ש"ח לכן

$$\frac{900}{x-2} = \frac{800}{x} + 10$$

$$900x = 800(x-2) + 10x(x-2) \quad /:10$$

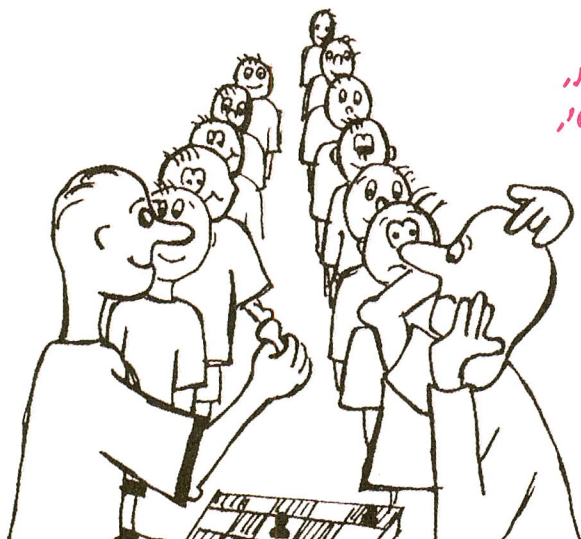
$$90x = 80x - 160 + x^2 - 2x$$

$$x^2 - 12x - 160 = 0$$

$$(x-20)(x+8) = 0$$

$$x_1 = 20, \quad x_2 = -8$$

ומקבלים אותה התשובה (הערך השלילי אינו מתאים):



ח'דה  
מאה אנשים משחקים במשחק,  
באופן הבא: נני אנשים משחקים,  
מי שמנצח משחק עם אדם שלישי,  
מי שמנצח משחק עם אדם  
רביעי, וכו'.  
כמה משחקים נצרכו?

תשובה: נערכו 99 משחקים.

## 4. בעיות עם מספרים

ראשית נציין שיש להבדיל בין **מספר לספרה**. את המספרים כותבים בעזרת ספרות (אחת או יותר), כפי שאת המילים כותבים בעזרת אותיות. יש עשר ספרות: 0-9 שבעזרתן אפשר לכתוב מספר אינסופי של מספרים. מקומה של ספרה במספר קובע את ערכה בו: אחדות, עשרות, מאות, וכו'.

- אפשר לציין מספר גם בעזרת אותיות באחת משתי צורות:
- **כאשר האות מציינת את גודל המספר כיחידה בפני עצמה.**
  - **כאשר האותיות מבטאות את ספרות המספר: ספרת אחדות, ספרת עשרות, ספרת מאות וכו'.**

### 4.1 המספר כיחידה שלמה

בהתייחסות למספר כיחידה בפני עצמה, נסמן את המספר כולו באות אחת ולא נפרטו לפי ספרת האחדות שלו, העשרות שלו וכו'.

למשל, אם נאמר, שסכום שני מספרים שווה 45, נרשום  $a+b=45$ , כאשר  $a$  מציין מספר אחד, ו-  $b$  מציין את המספר האחר.

נתייחס לבעיות, שבהן מחלקים שני מספרים זה בזה. תוצאת החילוק יכולה להיות מנה עם שארית או ללא שארית.

אם מנת החילוק של מספר  $A$  במספר  $B$  היא  $C$ , ללא שארית, נרשום:

$$BC = A \quad \text{או} \quad \frac{A}{B} = C$$

אם נוסף למנה  $C$  יש גם שארית  $D$ , אז נרשום:

$$BC + D = A \quad \text{או} \quad \frac{A - D}{B} = C \quad \text{או} \quad \frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}$$

נסביר קשר זה באמצעות הדוגמה הבאה:

כאשר מחלקים 13 ( $A=$ ) ל- 4 ( $B=$ ), מתקבלת מנה 3 ( $C=$ ) ושארית 1 ( $D=$ ).  
רושמים זאת כך:  $3\frac{1}{4}$  :  $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$  וזה מבטא את הנוסחה הראשונה.

אפשר לרשום שוויון זה גם בצורה:  $3 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}$  או  $3 = \frac{13-1}{4}$  וזה מבטא את

הנוסחה השנייה. כלומר אם מחסירים את השארית  $D$  מהמספר  $A$ , ומחלקים ב- 3, מתקבלת מנת חילוק  $C$ . ולפי הנוסחה השלישית:  $4 \cdot 3 + 1 = 13$

## דוגמה א'

מספר אחד גדול ממספר אחר ב- 5. כאשר מחלקים אותו בשני מתקבלת מנה 2 ושארית 1. מהם המספרים?

נסמן את המספר השני ב-  $x$ , ואז הראשון -  $x+5$ . אם נעזר בנוסחה השנייה:  
$$\frac{x+5-1}{x} = 2 \quad / \cdot x \Rightarrow x+4 = 2x \Rightarrow x = 4, \quad x+5 = 9$$
  
המספרים הם 4 ו- 9.

## דוגמה ב'

כאשר מחלקים מספר אחד בשני מתקבלת מנה 3 ושארית 4. אם מחסירים 3 מהמחולק, ומוסיפים 3 למחלק, תהיה מנת המספרים 2 (ללא שארית). חשב את המספרים.

נסמן מספר אחד ב-  $x$  והשני ב-  $y$ , ונעזר בנוסחה השלישית:  
$$\begin{cases} 3y + 4 = x \\ 2(y + 3) = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4 = x \\ 2y + 9 = x \end{cases} \Rightarrow 3y + 4 = 2y + 9 \Rightarrow y = 5, \quad x = 19$$
  
המספרים הם 19 ו- 5.

## דוגמה ג'

סכום שני מספרים 45. היחס ביניהם 3:2. מצא את המספרים.

מספר אחד -  $x$ , השני -  $y$ .  
סכומם - 45:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
  
היחס ביניהם או המנה - 2:3, כלומר:  
התקבלה מערכת משוואות. נבטל את המכנים:

$$\begin{cases} x + y = 45 \Rightarrow y = 45 - x \\ 3x = 2y \end{cases}$$
  
$$3x = 2(45 - x)$$
  
$$3x = 90 - 2x$$
  
$$5x = 90 \Rightarrow x = 18, \quad y = 27$$

המספרים הם 18 ו- 27

בעיות של יחס בין מספרים אפשר לפתור בצורה נוספת. בבעיה הנ"ל, אם שני מספרים מתייחסים לפי יחס נתון - 2:3, אפשר לבטא את שניהם באמצעות גורם -  $x$ : מספר אחד הוא -  $2x$ , והשני -  $3x$ , שכן היחס ביניהם הוא

אמנם:  $2x:3x = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ .

והמשוואה:  $2x+3x=45$

$$5x=45 \Rightarrow x=9$$

ואז מספר אחד הוא:  $2 \cdot 9 = 18$  והשני:  $3 \cdot 9 = 27$

## 4.2 המספר כביטוי של ספרותיו

לכל מספר כינוי משלו. למשל: 20 - עשרים, 37 - שלושים ושבע, 73 - שבעים ושלוש, וכו'. כל מספר הוא תוצר של מרכיביו - ספרותיו. **בשיטה העשרונית**, שבה אנו

$$\text{עובדים, אפשר לרשום: } 20 = 2 \cdot 10$$

$$37 = 3 \cdot 10 + 7$$

$$73 = 7 \cdot 10 + 3$$

...	D	C	B	A
			3	7

בחיי היום יום, אנחנו ממלאים טפסים ובהם **מערך תאים**, שבו יש להכניס מספר תעודת זהות, מספר דרכון וכו'. יש למלא את התאים ע"י הצמדה לימין.

בתא **A** נמצאות **האחדות** של המספר, בתא **B** - ספרת **העשרות** שלו, בתא **C** ספרת **המאות**, וכו'.

...	D	C	B	A
		2	3	7

המספר 37 מילא את שני התאים הימניים, כי הוא מספר דו-ספרתי.

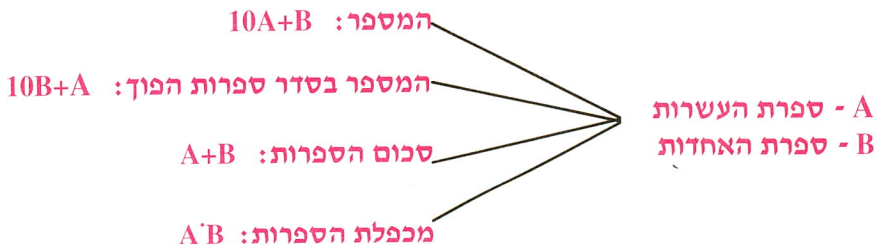
המספר 237 ימלא את שלושת התאים

הימניים, כי הוא מספר תלת ספרתי, וכו'.

ברור, כי מיקומה של ספרה חשוב מאוד, ואותן ספרות במקומות שונים, יוצרות מספרים שונים.

לפיכך, בכל בעיה, הדנה במספרים (המבוטאים בעזרת ספרותיהם), יש לקבוע תחילה את מיקומה (תפקידה) של כל ספרה במספר.

נציג את המושגים הקשורים לספרות המרכיבות מספר דו-ספרתי:



### שים לב

- \* הימנע מטעות של רישום  $10A+B$  כסכום הספרות.
- \* הימנע מטעות של רישום המספר כ-  $AB$ .
- בל נשכח, ששתי אותיות צמודות -  $AB$  מבטאות את מכפלתן, להבדיל משתי ספרות צמודות - 28, המבטאות מספר.

אם המספר הוא תלת-ספרתי, מתווספת למערך הנ"ל ספרת מאות, למשל - C, ואז המספר הופך להיות:  $100C+10A+B$ , והמספר הכתוב בסדר הפוך:  $100B+10A+C$ .

מן הראוי לשים לב לעובדה, שספרת העשרות אינה משנה את "מעמדה". נביא מספר דוגמאות, שבאמצעותן נציג את העקרונות, המנחים אותנו בפתרון בעיות עם מספרים.

### דוגמה א'

במספר דו-ספרתי, גדולה ספרת העשרות פי 2 מספרת האחדות. אם נהפוך את סדר ספרותיו, נקבל מספר, הקטן ב-27 מהמספר המקורי. מהו המספר?  
 נסמן: x - ספרת העשרות, y - ספרת האחדות.  
 נעזר בטבלה:

המספר	ספרת העשרות	ספרת האחדות	
$10x+y$	x	y	המספר המקורי
$10y+x$	y	x	המספר בסדר הפוך

לפי העיקרון "הסוציאליסטי" נוסיף 27 למספר הקטן, כדי שישווה לגדול:

$$\begin{cases} 10x + y = 10y + x + 27 \\ x = 2y \end{cases}$$

התקבלה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 9x + -9y = 27 \quad /:9 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow 2y - y = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 6$$

והמספר הוא: 63.

אפשר לפתור את הבעיה בעזרת נעלם אחד בלבד: ס' אחדות - x, ס' עשרות - 2x

### דוגמה ב'

ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי גדולה ב-1 מספרת האחדות. המספר גדול פי 6 מסכום ספרותיו. מצא את המספר.

ספרת האחדות	ספרת העשרות	המספר	סכום הספרות
x	x+1	$10(x+1)+x$	$(x+1)+x$

$$10(x+1)+x=6(x+x+1)$$

$$10x+10+x=12x+6$$

$$-x=-4 \Rightarrow x=4, x+1=5$$

והמספר - 54.

### דוגמה ג'

במספר דו-ספרתי, קטנה ספרת העשרות ב-1 מספרת האחדות. כאשר מחלקים את המספר בסכום ספרותיו, מתקבלת מנה - 5 ושארית - 1. מהו המספר?

ספרת האחדות	ספרת העשרות	המספר	סכום הספרות
x	x-1	$10(x-1)+x$	$(x-1)+x$

ולפי העיקרון, שבסעיף הראשון (נוסחה שלישית):

$$5(x-1+x)+1=10(x-1)+x$$

$$10x-4=11x-10 \Rightarrow x=6, x-1=5$$

והמספר - 56.

### דוגמה ד'

ספרת העשרות במספר תלת ספרתי גדולה ב-2 מספרת המאות וקטנה ב-1 מספרת האחדות. אם נחבר למספר זה את המספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך, נקבל 1675. מהו המספר?

ס' אחדות	ס' עשרות	ס' מאות	המספר	סדר ישר
x+1	x	x-2	$100(x-2)+10x+x+1$	
x-2	x	x+1	$100(x+1)+10x+x-2$	סדר הפוך

$$100(x-2)+10x+x+1+100(x+1)+10x+x-2=1675$$

$$100x-200+10x+x+1+100x+100+10x+x-2=1675$$

$$222x-101=1675$$

$$222x=1776 \Rightarrow x=8, x+1=9, x-2=6$$

המספר: 689.

## דוגמה ה'

למספר דו-ספרתי רשמו את הספרה 2 פעם משמאל ופעם מימין וקבלו שני מספרים, שסכומם 697. מהו המספר הדו-ספרתי?

במקרה זה, אין התייחסות לספרות, המרכיבות את המספר, אלא למספר כולו כיחידה, לכן נסמן את המספר הדו-ספרתי המבוקש ב-  $x$ . המספר הדו-ספרתי הנתון, ממלא את שני התאים של האחדות והעשרות: A ו- B. אם מוסיפים למספר את הספרה 2 משמאל, הרי 2 ימצא בתא המאות - C (המספר המקורי אינו משנה מקום). לכן, המספר החדש הראשון הוא:  $2 \cdot 100 + x$ . כדי להבין את הפתרון, נחזור לצורת הכתיבה של מספר בתוך מערך תאים. כאשר מוסיפים את הספרה 2 משמאל למספר 37, מתקבל המספר 237:

... D C B A	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 40px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">7</td> </tr> </table>		2	3	7		... D C B A	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 40px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">7</td> </tr> </table>			3	7
	2	3	7									
		3	7									

כאשר רושמים 2 מימין למספר, יש "לשחרר" את התא A. לשם כך מזיזים את המספר  $x$  שמאלה בתא אחד ולכן הוא גדל פי 10 והמספר החדש השני:  $10x+2$ . והמשוואה:

$$\begin{aligned} 200+x+10x+2 &= 697 \\ 11x+202 &= 697 \\ 11x &= 495 \Rightarrow x=45 \end{aligned}$$

תשובה: המספר הדו-ספרתי הוא 45.

## הערה

אילו הונסה הספרה 2 בין ספרותיו של מספר דו-ספרתי,  $10x+y$ :

... D C B A	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 40px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">x</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">y</td> </tr> </table>		2	x	y
	2	x	y		

\* לא היה משתנה תפקידה ספרת האחדות -  $y$ , היא היתה נשארת בתא A.

... D C B A	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 40px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">x</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">y</td> </tr> </table>		x	2	y
	x	2	y		

\* היה משתנה תפקידה של ספרת העשרות -  $x$ , שכן הספרה 2 תופסת את מקום העשרות - B, וספרת העשרות של המספר המקורי עוברת ל- C, והופכת להיות ספרת מאות. המספר החדש יהיה:  $100x + 2 \cdot 10 + y$ .

## דוגמה ו'

ספרת העשרות במספר דו-ספרתי גדולה ב- 1 מספרת האחדות. כאשר מחלקים מספר זה בסכום ספרותיו, מתקבלת מנה גדולה ב- 1 מהמחלק ושארית 2. מהו המספר?

ספרת אחדות	ספרת עשרות	המספר	סכום הספרות
$x$	$x+1$	$10(x+1) + x$	$x+1+x$

$$\frac{[10(x+1)+x]-2}{2x+1} = 2x + 1 + 1$$

$$\frac{10x+10+x-2}{2x+1} = 2x + 2 \quad / \cdot (2x + 1)$$

$$11x + 8 = (2x + 2)(2x + 1)$$

$$11x + 8 = 4x^2 + 2x + 4x + 2$$

$$4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

הפתרון השני הוא **שבר שלילי**, ולכן אינו מתאים.

והמספר הוא:  $10(2+1)+2=32$

### דוגמה ז'

מכפלת מספר דו-ספרתי בסכום ספרותיו - 36. מצא את המספר, אם ידוע שספרת האחדות גדולה ב-1 מספרת העשרות:

ספרת אחדות	ספרת עשרות	המספר	סכום הספרות
x	y	10y+x	y+x

$$\begin{cases} (10y + x)(y + x) = 33 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

$$(10y + y + 1)(y + y + 1) = 36$$

$$(11y + 1)(2y + 1) = 36$$

$$22y^2 + 13y - 35 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 + 4 \cdot 22 \cdot 35}}{2 \cdot 22} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 3080}}{44} =$$

$$= \frac{-13 \pm \sqrt{3249}}{44} = \frac{-13 \pm 57}{44} \Rightarrow y_1 = 1, y_2 < 0, x_1 = 2$$

תשובה: המספר הוא 12.

## 5. בעיות תערובת

בפתרון בעיות אלה יש להתייחס לשתי נקודות עיקריות:

\* **תערובת של a גרם בריכוז p% פירושו, שב- a גרם תערובת יש  $\frac{pa}{100}$**

**גרם חומר טהור.**

למשל, ב- 30 ג' תמיסת מלח בריכוז 10% יש 3 גרם מלח טהור

$$\left( \frac{10 \cdot 30}{100} = \right)$$

\* **כאשר מערבבים תערובות בריכוזים שונים, הכמות הכוללת של חומרים טהורים, והכמות הכוללת של תערובת נשמרות. מה שמשתנה זה אחוז החומר הטהור בתערובות.**

נדגים זאת בעזרת הבעיה הבאה:

### דוגמה א'

מערבבים 30 ג' תמיסת מלח בריכוז 10% עם 20 ג' תמיסת מלח בריכוז 25%. מתקבלים 50 ג' תמיסת מלח בריכוז 16%. נרכז את כל הנתונים בטבלא ונמצא את הקשרים ביניהם.

כמות חומר טהור	אחוז חומר טהור	כמות תערובת	
$\frac{10 \cdot 30}{100} (= 3)$	10%	30	א
$\frac{25 \cdot 20}{100} (= 5)$	25%	20	ב
$\frac{16 \cdot 50}{100} (= 8)$	16%	50	ג

את הטבלה ממלאים מימין לשמאל.

כפי שכבר אמרנו, גם במקרה זה מכפלת הגדלים בשתי העמודות הראשונות נותנת את הגודל בעמודה השלישית. למשל, 10% זו צורת כתיבה מקוצרת

ל-  $\frac{10}{100}$ , כלומר העמודה השלישית (שורה ראשונה) מתקבלת מהמכפלה של 30

$$\text{ב- } 10\% \text{ או } \frac{10}{100}.$$

הכמות הכוללת של תערובת נשמרת, כלומר ערבוב 30 ג' עם 20 ג' נותן 50 ג':  
 $30+20=50$

כמו כן נשמרת כמות החומר הטהור: 3 ג' חומר טהור בתערובת הראשונה, יחד עם 5 ג' מהשניה, יתנו 8 ג' בתערובת המתקבלת:  $5+3=8$

נקודה זו עוזרת בפתרון בעיות, שכן **השוואת כמות החומרים, לפני ואחרי ערבוב יוצרת משוואות שפתרון נותן פתרון לבעיה.**

### דוגמה ב'

מערבבים 50 ג' תמיסת מלח בריכוז 12% עם 40 ג' מי מלח בריכוז לא ידוע ומתקבלת תמיסה בריכוז 20%. מה היה אחוז המלח בתערובת השנייה.

כמות מלח	אחוז מלח	כמות תערובת	
$\frac{12 \cdot 50}{100}$	12%	50	א
$\frac{x \cdot 40}{100}$	x%	40	ב
$\frac{20 \cdot 90}{100}$	20%	90	ג

כל הפרטים על התערובת הראשונה ידועים והם ממלאים את השורה הראשונה של הטבלה. ריכוז המלח בתערובת השנייה לא ידוע, לכן נסמנו ב- x.

**העמודה הראשונה מספקת את הכמות הכוללת של תערובת קשר דומה בעמודה האחרונה מניב את המשוואה**

$$90 = 40 + 50x$$

$$\frac{12 \cdot 50}{100} + \frac{40x}{100} = \frac{20 \cdot 90}{100} \quad / \cdot 100$$

$$600 + 40x = 1800 \quad /: 40$$

$$15 + x = 45$$

$$x = 30$$

תשובה: אחוז המלח בתערובת השנייה הוא 30%.

### דוגמה ג'

מערבבים כמות כהל בריכוז 50% עם כמות כהל בריכוז 30% ומקבלים 20 ליטר כהל בריכוז 38%. כמה ליטר כהל לקחו מכל סוג.

כמות חומר טהור	אחוז חומר טהור	כמות תערובת	
$\frac{50x}{100}$	50%	x	א
$\frac{30y}{100}$	30%	y	ב
$\frac{38 \cdot 20}{100}$	38%	20	ג

מהעמודות הראשונה והשלישית מתקבלות שתי המשוואות הנחוצות לחישוב הנעלמים  $x, y$ .

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{50x}{100} + \frac{30y}{100} = \frac{38 \cdot 20}{100} \quad / \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x \\ 5x + 3y = 76 \end{cases}$$

$$5x + 3(20 - x) = 76$$

$$5x + 60 - 3x = 76$$

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8, y = 12$$

תשובה: מהסוג הראשון לקחו 8 ל', ומהסוג השני - 12 ל'.

אפשר לפתור את הבעיה גם באמצעות נעלם אחד. במקרה זה נעזרים בעמודה הראשונה כדי לבטא את כמות התערובת השניה באמצעות  $x$ , ומהעמודה השלישית מקבלים את המשוואה:

כמות ח"ט	אחוז ח"ט	כמות תערובת	
$\frac{50x}{100}$	50%	$x$	א
$\frac{30(20-x)}{100}$	30%	$20-x$	ב
$\frac{38 \cdot 20}{100}$	38%	20	ג

$$\frac{50x}{100} + \frac{30(20-x)}{100} = \frac{38 \cdot 20}{100}$$

ומקבלים אותה תשובה כמו קודם:  $x=8, 20-x=12$

**ריכוז של חומר מבטא יחס באחוזים של כמות החומר הטהור לכמות כל התערובת.**

ברור על כן, שאותם 3 ג' של מלח טהור, המהווים 10% מתערובת של 30 ג',

יהוו 20% מתערובת של 15 ג' -  $\left(\frac{20 \cdot 15}{100}\right)$  או 50% מתערובת של 6 ג', וכו'.

## דוגמה ד'

לתערובת של 30 ק"ג בריכוז 10%, מוסיפים 10 ליטר מים. מהו אחוז החומר הטהור בתערובת החדשה?

נסמן את אחוז החומר הטהור בתערובת החדשה ב-  $x$ , ונתייחס להתאמה:

**1 ליטר מים = 1 ק"ג**

הטבלה תראה כך:

	<b>כמות ח"ט</b>	<b>אחוז ח"ט</b>	<b>כמות תערובת</b>	
א	$\frac{10 \cdot 30}{100}$	10%	30	
ב	0	0	10	
ג	$\frac{40x}{100}$	$x\%$	40	

סיכום לאורך העמודה הראשונה נותן את כמות התערובת המתקבלת - 40.  
סיכום לאורך העמודה האחרונה נותן את כמות החומר הטהור המתקבל.  
מתקבלת המשוואה

$$\frac{10 \cdot 30}{100} + 0 = \frac{40x}{100} \Rightarrow x = 7.5$$

תשובה: אחוז החומר בתערובת החדשה הוא 7.5%.

## דוגמה ה'

באותו אופן, אם בתערובת של 30 ק"ג בריכוז 10%, מאיידים חלק מהמים ומתקבלת תערובת בריכוז 15%, אפשר לרשום בטבלה

	<b>כמות ח"ט</b>	<b>אחוז ח"ט</b>	<b>כמות תערובת</b>	
א	$\frac{10 \cdot 30}{100}$	10%	30	
ב	0	0	- x	
ג	$\frac{15 \cdot (30 - x)}{100}$	15%	30 - x	

$$\frac{30 \cdot 10}{100} + 0 = \frac{15(30 - x)}{100} \quad \text{המשוואה:}$$

פתרונה  $x = 10$  אומר, שלאחר אידוי 10 ק"ג מים מתקבלת תערובת של 15%.

## דוגמה ו'

השינוי בתערובת יכול לחול גם בחומר הטהור. למשל, אם בבעיה הקודמת מוסיפים לתערובת המקורית 6 ק"ג חומר טהור (כלומר ריכוז 100%), מקבלים תערובת שאחוז החומר הטהור בה -  $x$ . הטבלה מראה כך:

כמות חומר טהור	אחוז חומר טהור	כמות תערובת	
$\frac{10 \cdot 30}{100}$	10%	30	א
6	100%	6	ב
$\frac{36x}{100}$	$x$	36	ג

$$\frac{30 \cdot 10}{100} + 6 = \frac{36x}{100} \Rightarrow x = 25$$

המשוואה

תשובה: ריכוז התערובת החדשה 25%.

## דוגמה ז'

מערבבים כמות מסוימת של תמיסת מלח בריכוז 40%, עם כמות גדולה ממנה ב-20 לי', בריכוז של 60%. לתערובת זו מוסיפים 20 לי' מים ומתקבלים תמיסה בריכוז 42%. איזו כמות תמיסה מכל סוג לקחנו?

כמות ח"ט	אחוז ח"ט	כמות תערובת	
$\frac{40x}{100}$	40%	$x$	א
$\frac{60(x + 20)}{100}$	60%	$x + 20$	ב
0	0	20	ג
$\frac{42(2x + 40)}{100}$	42%	$2x + 40$	ד

בעמודה הראשונה מתקבלת הכמות הכוללת של התערובת  $2x + 40$ , ובאמצעות העמודה האחרונה מתקבלת המשוואה

$$\frac{40x}{100} + \frac{60(x + 20)}{100} = \frac{42(2x + 40)}{100} \quad / \cdot 100$$

$$40x + 60x + 1200 = 84x + 1680$$

$$16x = 480 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow x + 20 = 50$$

תשובה: לקחנו 30 ק"ג מהסוג הראשון ו-50 ק"ג מהסוג השני.

## דוגמה ח'

בתמיסה מסוימת 16 ק"ג מלח ו- 24 לי מים. את התמיסה הני"ל ערבבו עם כמות תמיסה ש-  $\frac{1}{3}$  ממנה מלח טהור. התקבלה תמיסה בריכוז של  $\frac{9}{25}$ . איזו כמות לקחו מהתמיסה השניה.

בבעיה זו מבטאים את **ריכוז התערובת כחלק של השלם** ולא באחוזים.

הכמות הכוללת של תמיסה הראשונה היא  $16+24=40$ . ריכוז המלח הטהור בתמיסה:  $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ , (אחוז - % הוא בעצם צורת כתיבה אחרת למאית -  $\frac{1}{100}$ ).  
נמלא את הטבלה

כמות ח"ט	חלק ח"ט	כמות תערובת	
$\frac{2}{5} \cdot 40$	$\frac{2}{5}$	40	א
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}$	x	ב
$\frac{9}{25}(x+40)$	$\frac{9}{25}$	x + 40	ג

והמשוואה

$$16 + \frac{x}{3} = \frac{9(x+40)}{25} \quad / \cdot 75$$

$$1200 + 25x = 27x + 1080$$

$$2x = 120 \Rightarrow x = 60$$

תשובה: לקחו 60 ק"ג מהסוג השני

## דוגמה ט'

בכלי יש 20 לי מים. מוציאים כמות מסוימת של מים ומכניסים במקומה כהל טהור. אחר כך מוציאים אותה כמות כמקודם מהתמיסה החדשה, ומכניסים במקומה שוב כהל טהור. מתקבלת תמיסת כהל בריכוז 19%. כמה כהל הכניסו כל פעם.

א'. נניח שהוצאנו x לי מים והכנסנו במקומם אותה כמות כהל. הכמות

$$\frac{x \cdot 100}{20} \% \text{ הכוללת של תערובת לא השתנתה. אחוז הכהל בתערובת זו:}$$

או  $5x\%$ .

ב'. בפעם השניה, אחרי הוצאת x לי תערובת, נותרים (20 - x) לי תערובת

שריכוזה  $5x\%$ . לכן כמות הכהל הטהור בה  $\frac{5x(20-x)}{100}$ . על זה מתוספים

x לי כהל טהור.

נארגן את כל זה בטבלה :

א'	כמות תערובת	אחוז כהל טהור	כמות כהל טהור
נשאר	$20 - x$	0	0
נכנס	$x$	100%	$x$
מתקבל	20	$\frac{x}{20} \cdot 100\% = 5x\%$	$x$

ב'	כמות תערובת	אחוז כהל טהור	כמות כהל טהור
נשאר	$20 - x$	$5x\%$	$\frac{5x(20-x)}{100}$
נכנס	$x$	100%	$x$
מתקבל	20	19%	$\frac{19 \cdot 20}{100}$

$$\frac{5x(20-x)}{100} + x = \frac{19 \cdot 20}{100} \quad / \cdot 100$$

$$100x - 5x^2 + 100x = 380$$

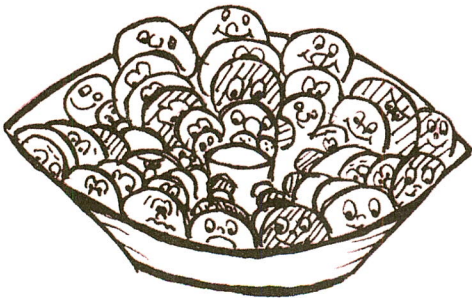
$$5x^2 - 200x + 380 = 0 \quad / :5$$

$$x^2 - 40x + 76 = 0$$

$$(x-2)(x-38) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 38$$

תשובה: הכניסו כל פעם 2 לי כהל טהור.

התשובה השניה לא מתאימה, כי אי אפשר להוציא 38 לי מתוך 20 לי  $20 - 38 < 0$ .



**חידה**  
 אירי וסירי אופות צואיות  
 באופן הפא: אחת מהן  
 מכינה צואיות קוקוס  
 והשניה צואיות שוקולד  
 באותו אודף. הן שמת  
 את הצואיות התבניות  
 אפיה משותפת צאלה,  
 שבמרכזה פתח צאל  
 מואכה. כל אחת שמה  
 צואיה משלה בלו אחר לו.

מי שהצואיה שלה משלימה את כיסוי התבניות, לוכה בכל הצואיות.  
 מי שמה צואיה ראשונה. איך צריכה שירי לנהוא כדי לזכות בצואיות?

תשובה: היא צריכה לשים כל פעם עוגיה במקום סימטרי לעוגיה ששמה מיירי ביחס לפתח (הדבר דומה לסימטריה של נקודות במערכת צירים ביחס לראשית)

## 6. בעיות תנועה

במסגרת נושא זה, נדון בתנועה בעלת מהירות קבועה (תנועה קצובה) או מהירות ממוצעת (בתנועה לא קצובה).

הגורמים המעורבים בבעיות מסוג זה הם:

המהירות (אורך הדרך ליחידת זמן) המסומנת באות V.

הזמן שארכה התנועה, מסומן באות T.

אורך הדרך הכוללת במשך זמן זה - S.

נעזר גם כאן בטבלה שבה שלוש עמודות.

למשל, אם מכונית נסעה במהירות של 60 קמ"ש במשך שעתיים, נרשום בעמודה של

V - 60 (אין לרשום יחידות בתוך הטבלה), בעמודה של T - 2, ונקבל בעמודה של S -

$$2 \cdot 60 = 120$$

S	V	T
$2 \cdot 60 = 120$	60	2

באופן כללי הקשר הוא:

$$S = V \cdot T \quad \text{ומכאן:} \quad V = \frac{S}{T}, \quad T = \frac{S}{V}$$

ניתן למצוא הקבלה מסויימת בין נוסחה זו ל"כלל הטבלה", שכן אפשר להתייחס:

- \* למהירות כאל "תכונה כמותית" לפריט: מספר יחידות האורך לכל יחידת זמן.
- \* הזמן - מספר הפריטים.
- \* הדרך - "התרומה הכמותית הכוללת", כלומר מספר יחידות האורך לכל יחידות הזמן.

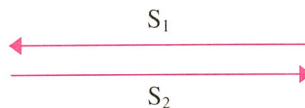
ברוב בעיות התנועה, אנו נעזרים בטבלה ובתאור סכמטי - סקיצה, המצביע על נקודת התחלת התנועה, נקודות מפגש וכו'. נציג מאפיינים עיקריים של פתרון בעיות תנועה בעזרת מספר דוגמאות.

### דוגמה א'

אדם נסע בבוקר ליעד מסוים במהירות 90 קמ"ש. כאשר חזר הביתה, הכביש היה עמוס, ולכן נסע במהירות ממוצעת של 60 קמ"ש, ולכן ארכה הדרך חזרה בשעה אחת יותר מאשר בדרך הלך. כמה זמן נסע בבוקר ומה אורך הדרך?

נעזר בטבלה:

	S	V	T	
$S_1$	90x	90	x	הלך
$S_2$	60(x+1)	60	x+1	חזר



שני הביטויים ל- S, מבטאים את אותה הדרך, לכן הם שווים:

$$90x = 60(x+1)$$

$$90x = 60x + 60$$

$$30x = 60 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = 2 \cdot 90 = 180$$

הדרך הלך ארכה שעתיים ואורכה 180 ק"מ.

אפשר לפתור את הבעיה גם ע"י סימון הדרך בנעלם - y, ואז הזמן הלך הוא -  $\frac{y}{90}$

והזמן חזור הוא -  $\frac{y}{60}$ . ידוע שהזמן בדרך חזרה גדול בשעה מהזמן הלך.

המשוואה היא:

$$\frac{y}{60} - 1 = \frac{y}{90} \quad / \cdot 180$$

$$3y - 180 = 2y \Rightarrow y = 180$$

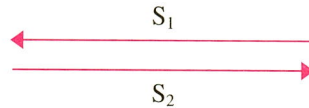
תשובה: הדרך היא 180 ק"מ, וזמן הנסיעה בבוקר היה שעתיים (90:180).

### דוגמה ב'

אדם נסע ליעד מסויים במשך 4 שעות. למחרת יצא מאוחר, ולכן הגביר את מהירותו ב- 25 קמ"ש, וכך הצליח לעבור את אותה הדרך ב- 3 שעות. מה היתה מהירותו ההתחלתית, ומה אורך הדרך?

S	V	T	
4x	x	4	א'
3(x+25)	x+25	3	ב'

היות שהתנועה היתה על אותו מסלול, הרי ש הדרכים שוות ( $S_2 = S_1$ )



$$4x = 3(x+25)$$

$$4x = 3x + 75 \Rightarrow x = 75$$

תשובה: מהירותו ההתחלתית היתה (בקמ"ש) 75. אורך הדרך - 300 ק"מ.

גם בעיה זו ניתן לפתור בדרך נוספת, כשהדרך היא הנעלם - y. מתקבלת משוואה המקשרת בין המהירויות:

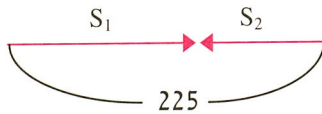
$$\frac{y}{3} = \frac{y}{4} + 25 \quad / \cdot 12$$

$$4y = 3y + 300 \Rightarrow y = 300$$

תשובה: אורך הדרך 300 ק"מ, מהירות הנסיעה בהתחלה היתה 75 קמ"ש (4:300).

המרחק בין שתי ערים A ו-B הוא 225 ק"מ. מכונית יוצאת מ-A ל-B במהירות של 70 קמ"ש. מכונית שניה יוצאת מ-B ל-A במהירות של 80 קמ"ש. כעבור כמה זמן תיפגשנה המכוניות, ואיזו דרך עוברת כל אחת עד הפגישה?

(שתי המכוניות יצאו באותה שעה ולכן נסעו אותו זמן עד המפגש - x שעות):



$$S_1 + S_2 = 225$$

	S	V	T	
S <sub>1</sub>	70x	70	x	מ-A
S <sub>2</sub>	80x	80	x	מ-B
	225			סה"כ

הסבר: שתי המכוניות "כיסו" ביחד את כל המסלול, כאשר כל אחת נסעה על חלק מן המסלול. המשוואה היא:

$$70x + 80x = 225$$

$$150x = 225 \Rightarrow x = 1.5$$

המשוואה היא:

המכוניות נפגשו כעבור שעה וחצי. האחת נסעה בזמן זה 105 ק"מ (70 · 1.5), והשניה 120 ק"מ (80 · 1.5).



**שים לב**

היזהר מפני הטעות של רישום 225 ק"מ במקום S<sub>1</sub> ו-S<sub>2</sub>, כיוון שזהו אורך המסלול כולו ולא דרך של כל אחת מהמכוניות.

גם בעיה זו ניתן לפתור בדרך אחרת, ע"י הצבת: S<sub>1</sub> = x ואז: S<sub>2</sub> = 225 - x. המשוואה תקשר בין הזמנים השווים של הנסיעה.

$$\frac{x}{70} = \frac{225-x}{80}$$

$$80x = 70(225 - x)$$

$$80x = 15,750 - 70x$$

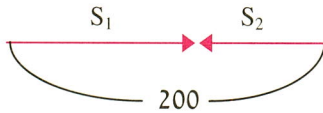
$$150x = 15,750 \Rightarrow x = 105$$

הדרך שעברה המכונית, שיצאה מ-A עד נקודת המפגש, היא 105 ק"מ, ולכן הזמן הוא 1.5 = 105:70. הדרך שעברה השניה 120 = 225 - 105.

## דוגמה ד'

מכונית יצאה בשעה 7:00 בבוקר מ-A ל-B (200 ק"מ). מהירותה של המכונית 60 קמ"ש. בשעה 8:00 יצאה מכונית שניה מ-B ל-A במהירות 80 קמ"ש. באיזו שעה תפגשנה המכוניות?

למכונית שיצאה מ-B יש בשעה אחת פחות זמן מהזמן שיש למכונית הראשונה עד המפגש. לכן, אם נסמן את הזמן שנסעה הראשונה עד למפגש ב-x, אזי הזמן של השניה: x-1.



$$S_1 + S_2 = 200$$

	S	V	T	
S <sub>1</sub>	60x	60	x	מ-A
S <sub>2</sub>	80(x-1)	80	x-1	מ-B
	200			סה"כ

$$60x + 80(x-1) = 200$$

$$60x + 80x - 80 = 200$$

$$140x = 280 \Rightarrow x = 2$$

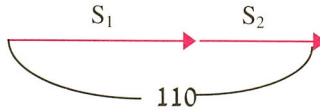
והמשוואה היא:

המכונית שיצאה בשעה 7:00 נסעה שעתיים ולכן המכוניות נפגשו בשעה 9:00

## דוגמה ה'

משאית הובילה תפוזים מפרדס לבית אריזה, הנמצא במרחק 110 ק"מ מהפרדס. בחלק הראשון של הדרך, נסעה המשאית בכביש מהיר במהירות של 100 קמ"ש. כשיצאה מהכביש המהיר, הורידה את המהירות ל-80 קמ"ש. בקטע זה, נסעה ב-15 דקות יותר מאשר בקטע הנסיעה על הכביש המהיר. כמה זמן נמשכה כל הנסיעה?

$$S_1 + S_2 = 110$$



מסמנים ב-x את זמן הנסיעה בכביש המהיר, ואז נסיעת המשאית בכביש הרגיל ארכה  $x + \frac{1}{4}$  שעות.

	S	V	T	
S <sub>1</sub>	100x	100	x	כ. מהיר
S <sub>2</sub>	$80(x + \frac{1}{4})$	80	$x + \frac{1}{4}$	כ. מהיר
	110			סה"כ

$$100x + 80(x + \frac{1}{4}) = 110$$

$$100x + 80x + 20 = 110$$

$$180x = 90 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

הדרך נמשכה שעה ורבע:  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$ .

## שים לב!

אם בבעיות המהירות נתונה בק"מ לשעה היזהרו מהטעות של רישום הזמן בדקות  $(x+15)$ . יש להפוך את הדקות לשעות, ע"י חילוק ב- 60:  $\frac{15}{60}$  ואז הזמן, בבעיה זו הוא:  $x + \frac{1}{4}$ .

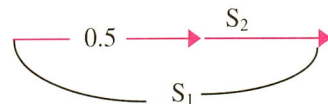
**כללית, יש לעבוד באותן יחידות מידה (לא לערבב מטרים עם ק"מ, דקות עם שעות, וכו'. לכן, לפני תחילת הפתרון יש להביא את נתוני הבעיה לאותן יחידות מידה, אם אינם במצב זה.**

## דוגמה ו'

תלמיד הולך לכיוון מועדון הספורט במהירות של 6 קמ"ש. חברו שגר במרחק 500 מ' ממנו וקרוב יותר למועדון, יצא אף הוא למועדון 10 דקות לאחר שיצא הראשון. מהירותו היתה 7 קמ"ש. שניהם הגיעו למועדון באותו הזמן. בכמה זמן הגיע הראשון למועדון?

כדי שבבעיה תהינה אותן יחידות נרשום: 500 מ' = 0.5 ק"מ

$$\frac{10}{60} \text{ שעות} = \frac{1}{6} \text{ שעות} = 10 \text{ דקות}$$



$$S_1 - S_2 = 0.5$$

	S	V	T	
$S_1$	$6x$	6	$x$	תלמיד
$S_2$	$7(x - \frac{1}{6})$	7	$x - \frac{10}{60}$	חבר
	0.5			סה"כ

$$6x - 7(x - \frac{1}{6}) = 0.5$$

$$6x - 7x + \frac{7}{6} = 0.5$$

$$\frac{7}{6} - 0.5 = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

הזמן של הראשון הוא  $\frac{2}{3}$  השעה (שני שליש השעה = 40 דקות).

## דוגמה ז'

משאית מובילה כל שבוע סחורה ליעד מסוים במהירות 80 קמ"ש. השבוע היתה תנועה איטית בכבישים בגלל עומס, והמשאית נסעה במהירות 72 קמ"ש בלבד למשך 2.5 שעות, עד שהתפנתה הדרך, ואח"כ הגביר הנהג את המהירות ל-100 קמ"ש וכך הגיעה המשאית ליעדה כמתוכנן. כמה זמן נמשכת נסיעתה בד"כ?

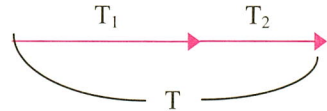
**בבעיה מסוג זה שני חלקים:**

**המתוכנן:** מה שקורה בד"כ, וזה מתייחס לדרך כולה.

**בפועל:** מה שקורה במקרה מסוים, בו הנסיעה מתפצלת למספר חלקים. אפשר לקבל קשר בין זמני הנסיעה בשני המקרים (בבעיה זו הם שווים).

נסמן את הזמן הרגיל ב- $x$ . נעזר בטבלה הבאה:

$$T = T_1 + T_2$$



	S	V	T		
S	80x	80	x	T	<b>מתוכנן</b>
S <sub>1</sub>	(72·2.5=) 80	72	2.5	T <sub>1</sub>	ב
S <sub>2</sub>	80x - 180	100	$\frac{80x-180}{100}$	T <sub>2</sub>	ג ו ע ל

$$x = 2.5 + \frac{80x-180}{100} \quad / \cdot 100$$

$$10x = 25 + 8x - 18$$

$$2x = 7 \Rightarrow x = 3.5$$

הזמן הנחוץ בד"כ לדרך זו הוא 3.5 שעות.

## דוגמה ח'

אוטובוס נוסע מתחנה A לתחנה B במהירות 90 קמ"ש. אחרי שלוש שעות נסיעה, התעכב למשך 20 דקות, והמשיך במהירות 60 קמ"ש. האוטובוס הגיע לעיר B באחור של שעה ביחס לזמן המתוכנן לפי המהירות הראשונה. מה המרחק בין A ל-B?

**עיקוב של 20 דקות, פירושו זמן, שבו מהירות האוטובוס היתה 0, וכך גם הדרך שהוא עשה.**

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$



T

$$\text{שעות } \frac{1}{3} = \text{שעות } \frac{20}{60} = \text{שעות } 20 \text{ דקות}$$

	S	V	T		
S	x	90	$\frac{x}{90}$	T	מתוכנן
S <sub>1</sub>	270	90	3	T <sub>1</sub>	ב פ ו ע ל
	0	0	$\frac{1}{3}$	T <sub>2</sub>	
S <sub>2</sub>	x-270	60	$\frac{x-270}{60}$	T <sub>3</sub>	

$$\frac{x}{90} + 1 = 3 + \frac{1}{3} + \frac{x-270}{60} \quad / \cdot 180$$

$$2x + 180 = 540 + 60 + 3x - 810$$

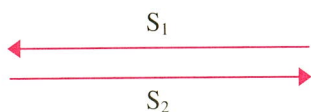
$$x = 390$$

תשובה: המרחק בין A ל-B שווה ל- 390 ק"מ.

### דוגמה ט'

אניה שטה לאורך 120 ק"מ, עם הזרם וחוזרת לנקודת ההתחלה. הזמן שלוקח לה השייט עם הזרם קצר בשעתיים מזמן השייט נגד הזרם. כמה זמן נמשך כל השייט אם מהירות הזרם 2.5 קמ"ש.

נסמן את מהירות הסירה במים עומדים (ללא השפעת הזרם) ב-x.  
מהירות הסירה עם הזרם x+2.5 ונגד הזרם x-2.5



$$S_1 = S_2$$

נעזר בטבלה:

	S	V	T	
S <sub>1</sub>	120	x+2.5	$\frac{120}{x+2.5}$	עם הזרם
S <sub>2</sub>	120	x-2.5	$\frac{120}{x-2.5}$	נגד הזרם

$$\frac{120}{x+2.5} + 2 = \frac{120}{x-2.5} \quad / \cdot (x+2.5)(x-2.5)$$

$$120(x-2.5) + 2(x+2.5)(x-2.5) = 120(x+2.5) \quad / :2$$

$$60x - 150 + x^2 - 6.25 = 60x + 150$$

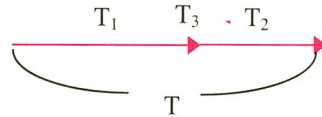
$$x^2 = 306.25 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{306.25} = \pm 17.5$$



אוטובוס עובר דרך של 920 ק"מ בזמן מסוים. יום אחד, אחרי נסיעה של שעה וחצי במהירות הרגילה, התעכב האוטובוס למשך חצי שעה. אח"כ הגביר את מהירותו ב-20 קמ"ש והצליח להגיע בשעה וחצי מוקדם מהמתוכנן. מה מהירותו הרגילה?

נסמן את מהירות האוטובוס בהתחלה ב-  $x$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + 1.5$$



	S	V	T		מתוכנן
S	920	$x$	$\frac{920}{x}$	T	ב פ ו ע ל
S <sub>1</sub>	$1.5x$	$x$	1.5	T <sub>1</sub>	
	0	0	0.5	T <sub>2</sub>	
S <sub>2</sub>	$920 - 1.5x$	$x + 20$	$\frac{920 - 1.5x}{x + 20}$	T <sub>3</sub>	

$$\frac{920}{x} = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{920 - 1.5x}{x + 20}$$

$$\frac{920}{x} = 3\frac{1}{2} + \frac{920 - 1.5x}{x + 20} \quad / \cdot 2x(x + 20)$$

$$920 \cdot 2(x + 20) = 7x(x + 20) + 2x(920 - 1.5x)$$

$$1840x + 36,800 = 7x^2 + 140x + 1840x - 3x^2$$

$$4x^2 + 140x - 36,800 = 0 \quad / :4$$

$$x^2 + 35x - 9200 = 0$$

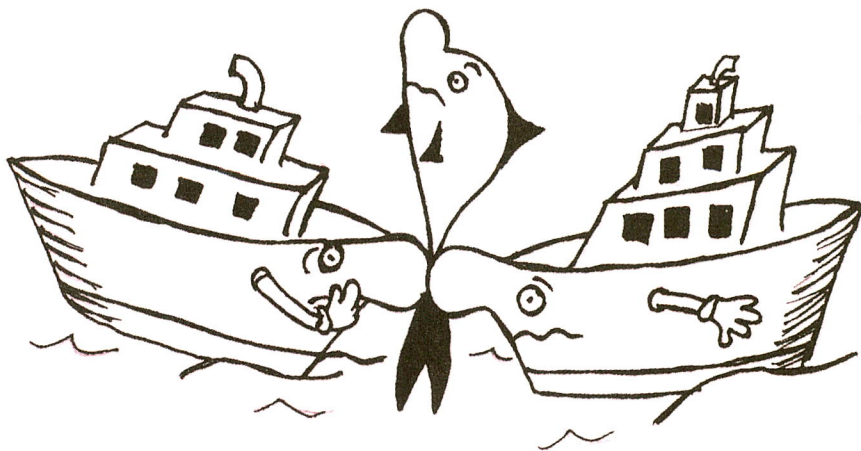
$$x = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 + 36,800}}{2} = \frac{-35 \pm \sqrt{38,025}}{2} = \frac{-35 \pm 195}{2}$$

$$x_1 = \frac{-35 + 195}{2} = 80 \quad (x_2 < 0)$$

המהירות הרגילה - 80 קמ"ש.

**חידה:**

שתי אניות שטות לו לקראת לו משתי נקודות, שהמרחק ביניהן הוא 20 ק"מ. אחת במהירות של 12 קמ"ש והשניה במהירות של 8 קמ"ש. דולפין שמהירותו הממוצעת 1 קמ"ש, שוחה מאניה אחת לשניה - האן ואן. איזו דרך יצבור הדולפין, עד שהאניות נפגשות?



תשובה: הדולפין עבר 1 ק"מ.

הסבר: האניות נפגשות אחרי שעה, כי  $12 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 20$  ובמשך שעה עובר הדולפין 1 ק"מ, כי מהירותו 1 קמ"ש.

## 7. בעיות עבודה והספק

הספק זה ביצוע עבודה ליחידת זמן.

מבחינים בשני סוגי בעיות הספק:

\* **בעיות שבהן העבודה, שיש לבצע, נתונה במספרים המבטאים יחידות:** מספר כסאות שיש לצבוע, מספר שאלות שיש לפתור, מספר מ"ר שיש לחרוש, מספר מ"ק מים שיש למלא בברכה, או מספר ימים שיש להשקיע בביצוע עבודה.

\* **בעיות שבהן העבודה שיש לבצע, מהווה שלם ללא פרוט יחידות.** למשל, שדה אחד שיש לחרוש ולא מספר המ"ר שהוא מכיל, בריכה אחת שיש למלא ולא מספר המ"ק שיש למלא בתוכה.

כאשר מתייחסים לגודל חלקי של השלם, אומרים:  $\frac{1}{3}$  שדה,  $\frac{1}{2}$  בריכה, ללא פירוט מספר היחידות, שהוא מכיל.

### 7.1 עבודה הנתונה ביחידות.

במקרה זה, אנו נעזרים בטבלה, המקשרת בין שלושה מרכיבים:

\* **כמות הפריטים המבוצעים ביחידת זמן - הספק** (זוהי בעצם "מהירות העבודה").

\* **מספר יחידות הזמן.**

\* **הכמות הכוללת, שמבצעים ביחידות הזמן הללו.**  
הקשר ביניהם הוא (כמו בכלל הטבלה):

$$(\text{כמות הפריטים ביחידת זמן}) \cdot (\text{מספר יחידות זמן}) = (\text{כמות פריטים כוללת})$$

### דוגמה א'

ביום א' צבע פועל 5 לוחות בשעה. ביום ב' רק 4 לוחות לשעה, אך עבד בשלוש שעות יותר מאשר ביום א'. בסה"כ הספיק לצבוע במשך היומיים 84 לוחות. כמה שעות עבד ביום א'?

כמות בשעה	מספר שעות	כמות כוללת	
5	x	5x	יום א'
4	x+3	4(x+3)	יום ב'
		84	סה"כ

המשוואה:

$$5x+4(x+3)=84$$
$$5x+4x+12=84$$
$$9x=72 \Rightarrow x=8$$

ביום א' עבד הפועל 8 שעות.

### דוגמה ב'

שני תלמידים קיבלו לפתור אותו מספר שאלות לחופש. תלמיד אחד פתר כל יום 10 שאלות במשך 8 הימים הראשונים, ואת יתר השאלות פתר בקצב של 6 שאלות ביום. התלמיד השני פתר כל יום 8 שאלות וסיים את כולן יומיים לפני חברו. בכמה ימים פתר התלמיד השני את כל השאלות?

כמות ליום	מספר ימים	כמות כוללת	
10	8	$8 \cdot 10$	תלמיד א'
6	x	6x	
8	x+6	$8(x+6)$	תלמיד ב'

הסבר:

מספר הימים, שבהם פתר התלמיד הראשון 6 שאלות ביום הוא - x. בסה"כ עבד x+8 ימים. לכן, השני עבד  $x+6$  ימים. הכמות הכוללת של שאלות, שפתר כל אחד זהה, ולכן:

$$80+6x=8(x+6)$$
$$80+6x=8x+48$$
$$32=2x \Rightarrow x=16$$

התלמיד השני סיים את העבודה כעבור 22 יום ( $16+6=22$ ).

### דוגמה ג'

פועל היה צריך להכין 240 חבילות ארוזות. אחרי שסיים, היה עליו להכין 288 חבילות נוספות. הוא הגביר את קצב עבודתו ב-2 חבילות לשעה, ועבודתו ארכה בשעה אחת יותר מהעבודה הקודמת. כמה חבילות הכין הפועל בשעה בהתחלה?

כמות לשעה	מספר שעות	כמות כוללת	
x	$\frac{240}{x}$	240	הזמנה א'
x+2	$\frac{288}{x+2}$	288	הזמנה ב'

מספר השעות בפעם השנייה, גדול ב-1 ממספרן בפעם הראשונה. לכן, נוסיף 1 למספר השעות הקטן יותר וניצור משוואה:

$$\frac{288}{x+2} = \frac{240}{x} + 1 \quad / \cdot x(x+2)$$

$$288x = 240(x+2) + x(x+2)$$

$$288x = 240x + 480 + x^2 + 2x$$

$$x^2 - 46x + 480 = 0$$

$$x_{1,2} = 23 \pm \sqrt{529 - 480} = 23 \pm \sqrt{49} = 23 \pm 7$$

$$x_1 = 23 + 7 = 30, \quad x_2 = 23 - 7 = 16$$

לבעיה זו שני פתרונות תקפים, שכן כל המנות המבטאות מספר שעות הן מספרים חיביים:  $240:30=8$ ,  $240:16=15$ ,  $288:32=9$ ,  $288:18=16$ .

## 7.2 עבודה בחלקים

כאמור, במקרה זה אין לנו מידע על כמות העבודה ביחידות, אלא בשלם או חלקים ממנו. במקרה זה, מתייחסים לזמן הדרוש לבצע עבודה שלמה, וע"י כך ההספק הוא חלק העבודה ביחידת זמן.

למשל, אם צבע יכול לסייד קיר גדול ב-5 שעות, הרי שאם הוא עובד בקצב קבוע, הוא יסייד בשעה אחת  $\frac{1}{5}$  מהקיר, בשעתיים  $\frac{2}{5}$  מהקיר, וב-a שעות  $\frac{a}{5}$  מהקיר, וכו'.

באופן כללי, אם הזמן הנחוץ לעשות עבודה שלמה לבד הוא A (All Alone) והזמן שמשקיעים בעבודה בפועל הוא T (Time), הרי שהיחס בין T ל-A מבטא את חלק העבודה שנעשה בזמן זה - P (Part):

$$\frac{T}{A} = P \quad \text{או} \quad \frac{\text{זמן עבודה בפועל}}{\text{זמן ביצוע העבודה לבד}} = \text{חלק העבודה שנעשה}$$

במידה ובעבודה מסוימת משתתפים 2 או יותר משתתפים, והם מסיימים ביחד עבודה שלמה, אז:

$$\frac{\text{זמן עבודה בפועל של א'}}{\text{זמן ביצוע עבודה לבד של א'}} + \frac{\text{זמן עבודה בפועל של ב'}}{\text{זמן ביצוע עבודה לבד של ב'}} = 1$$

$$\frac{T_1}{A_1} + \frac{T_2}{A_2} = 1 \quad \text{או:}$$

כאשר המספרים 1, 2 מצביעים על משתתף מספר 1, משתתף מספר 2, וכו'. נציג את שיטת העבודה עם סוג זה של בעיות, בעזרת מספר דוגמאות.

## דוגמה א'

פועל תיק יכול לבצע לבדו עבודה מסוימת ב- 20 יום. פועל מתחיל יכול לבצע לבדו את אותה עבודה ב- 30 יום. העבודה הוטלה על שניהם ביחד. כמה זמן הם צריכים להקדיש - כל אחד - כדי לסיים ביחד את העבודה, בהנחה שהם מתחילים באותה שעה?

**נעזר בטבלה בת שלוש עמודות:**

1. **זמן שנחוץ לכל משתתף לבצע עבודה שלמה לבד** (בקיצור - זמן לבד). במקרה הנ"ל, 20 יום לפועל ותיק ו- 30 יום לפועל מתחיל.
2. **הזמן שכל אחד משקיע בעבודה המשותפת בפועל** (בקיצור זמן בפועל). במקרה הנ"ל הם מקדישים את אותו הזמן -  $x$ .
3. **החלק שתורם כל משתתף בעבודה המשותפת**. במקרה זה:  $\frac{x}{20}$  ו-  $\frac{x}{30}$ .

פועל ותיק	זמן לבד	זמן בפועל	חלק העבודה
	20	$x$	$\frac{x}{20}$
פועל מתחיל	30	$x$	$\frac{x}{30}$
<b>סה"כ</b>			1

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1 \quad / \cdot 60$$

$$2x + 3x = 60$$

$$5x = 60 \Rightarrow x = 12$$

כל אחד מהפועלים הקדיש 12 שעות בעבודה המשותפת.

## דוגמה ב'

אדם לקח על עצמו עבודה, שהיה עליו לסיים לבדו תוך 21 יום. אחרי שעבד 6 ימים, הצטרף אליו אדם נוסף, שמסוגל לסיים לבד את אותה עבודה ב- 24 יום. הם המשיכו לעבוד יחד, עד שסיימו את העבודה. כמה ימים השקיע כל אחד בעבודה?

בבעיה זו, **העבודה נעשתה במשותף, אך כל אחד השקיע בה מספר שונה של ימים**. אם נניח, שהשני השקיע  $x$  ימים, הרי שהראשון השקיע בנוסף לזה עוד 6 ימים, ובסה"כ השקיע  $x+6$  ימים.

א'	זמן לבד	זמן בפועל	חלק העבודה
	21	$6+x$	$\frac{6+x}{21}$
ב'	24	$x$	$\frac{x}{24}$
<b>סה"כ</b>			1

$$\frac{6+x}{21} + \frac{x}{24} = 1 / \cdot 168$$

$$8(6+x) + 7x = 168$$

$$48 + 8x + 7x = 168$$

$$15x = 120 \Rightarrow x = 8$$

האדם השני עבד 8 ימים והראשון 14 יום.

### דוגמה ג'

דרך צינור א' נכנסים מים לבריכה ודרך צינור ב' הם יוצאים. דרך צינור א' ניתן למלא בריכה ריקה ב- 16 דקות. דרך צינור ב' אפשר לרוקן בריכה מלאה ב- 24 דקות.

יום אחד כשהבריכה היתה ריקה, פתחו בטעות את שני הצינורות. אחרי מספר דקות סגרו את הצינור שדרכו מרוקנים את הבריכה ודרך השני המשיכו להזרים מים עוד 7 דקי עד שנתמלאה מחצית מהבריכה. כמה זמן לקח למלא מחצית הבריכה?

חלק העבודה	זמן בפועל	זמן לבד	
$\frac{x+7}{16}$	$x+7$	16	צ' ממלא
$\frac{x}{24}$	$x$	24	צ' מרוקן
$\frac{1}{2}$			סה"כ

יש לשים לב, שבבעיה זו הצינור השני אינו מוסיף את "חלקו" בבריכה אלא גורע. לכן יש להחסיר מהחלק שמתמלא את החלק שמתרוקן (ובסיכום התמלאה מחצית הבריכה):

$$\frac{x+7}{16} - \frac{x}{24} = \frac{1}{2} / \cdot 48$$

$$3(x+7) - 2x = 24$$

$$3x + 21 - 2x = 24 \Rightarrow x = 3$$

העבודה נמשכה 10 דקות כאשר הפתח הממלא היה פתוח 10 דקות והמרוקן 3 דקות.

### דוגמה ד'

שני פועלים היו צריכים לבצע ביחד עבודה, כאשר אחד יעבוד 6 ימים והשני 14 יום. אולם, הפועל השני עבד רק 7 ימים, הראשון עבד 9 ימים, ונשאר להם לבצע עוד  $\frac{1}{6}$  מהעבודה. בכמה ימים יכול כל פועל לבצע לבדו את העבודה?

התכנון היה לסיים עבודה שלמה. למעשה סיימו רק  $\frac{5}{6}$  מהעבודה, כי נותרה  $\frac{1}{6}$ .

חלק בעבודה		זמן משותף		זמן לבד	
בפועל	מתוכנן	בפועל	מתוכנן		
$\frac{9}{x}$	$\frac{6}{x}$	9	6	x	א'
$\frac{7}{y}$	$\frac{14}{y}$	7	14	y	ב'
$\frac{5}{6}$	1				סה"כ

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{14}{y} = 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{7}{y} = \frac{5}{6} \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{14}{y} = 1 \\ -\frac{18}{x} - \frac{14}{y} = -\frac{5}{3} \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$-\frac{12}{x} \quad / \quad = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$$

$$\frac{6}{18} + \frac{14}{y} = 1 \Rightarrow \frac{14}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 14}{2} = 21$$

הפועל הראשון יכול לסיים את העבודה ב- 18 יום, והשני ב- 21 יום.

### דוגמה ה'

מכונה ישנה יכולה לבצע את כל עבודת האריזה במפעל ב- 20 יום. מכונה חדישה יכולה לבצע אותה עבודה ב- 15 יום. המפעל הפעיל 4 מכוונות ישנות ושתי מכוונות חדישות ביחד. בכמה ימים תסתיים העבודה?

בדוגמה זו מתווספת עבודה לטבלה. במקרה כזה, שבו יש מספר משתתפים מכל סוג, נוסיף עמודה לטבלה ובה החלק בעבודה של מספר משתתפים.

חלק כולל	חלק בעבודה	זמן בפועל	זמן לבד	
$4 \cdot \frac{x}{20}$	$\frac{x}{20}$	x	20	ישנה
$2 \cdot \frac{x}{15}$	$\frac{x}{15}$	x	15	חדשה
1				סה"כ

$$\frac{4x}{20} + \frac{2x}{15} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{2x}{15} = 1 \quad / \cdot 15$$

$$3x + 2x = 15$$

$$5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

העבודה תסתיים כעבור 3 ימים.

## דוגמה ו' : בעית תנועה - הספק

משאית שמביאה חומר גלם מעיר א' לעיר ב' עוברת את הדרך ב- 4 שעות. משאית שמביאה את תוצרת המפעל מעיר ב' לעיר א' עוברת את הדרך הזו ב- 8 שעות. המשאית, שמביאה חומרי גלם יצאה ב- 6:00 בבוקר מעיר א' לכיוון עיר ב'. בשעה 7:00 יצאה משאית המובילה את תוצרת המפעל מעיר ב' לעיר א'. באיזו שעה תיפגשנה המשאיות?

להבדיל מבעיות התנועה, שראינו עד כה, בבעיה זו מתייחסים לדרך במונחים של עבודה שיש לעשות ולא במונחים של אורך (בק"מ למשל).

נסמן ב- $x$  את הזמן שנוסעת המשאית שיוצאת מ-A עד המפגש

	זמן לבד - V	זמן בפועל - T	חלק בדרך - S
מעיר א'	4	$x$	$\frac{x}{4}$
מעיר ב'	8	$x-1$	$\frac{x-1}{8}$
סה"כ			1

$$\frac{x}{4} + \frac{x-1}{8} = 1 \quad / \cdot 8$$

$$2x + x - 1 = 8$$

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

המשאיות תיפגשנה בשעה 9:00 ( $6+3=9$ ).

## דוגמה ז'

על שני פועלים הוטלה עבודה מסויימת. אחרי שעבדו ביחד 5 ימים, עזב אחד מהם, והאחר המשיך עוד 7 ימים עד סיום העבודה. בכמה ימים יכול כל אחד מהם לבצע את העבודה, אם ידוע שלפועל שעזב לוקח ב- 4 ימים יותר לסיים את העבודה מאשר לזה שהמשיך?

נסמן ב- $x$  את מספר הימים, שנחוצים לפועל שעבד עד הסוף (א') כדי לסיים לבדו את העבודה. לפועל האחר (ב') נחוצים  $x+4$  ימים כדי לבצע לבד את העבודה. והטבלה:

	זמן לבד	זמן בפועל	חלק בדרך
פועל א'	$x$	$12 (=5+7)$	$\frac{12}{x}$
פועל ב'	$x+4$	5	$\frac{5}{x+4}$
סה"כ			1

$$\frac{12}{x} + \frac{5}{x+4} = 1 \quad / \cdot x(x+4)$$

$$12(x+4) + 5x = x(x+4)$$

$$12x + 48 + 5x = x^2 + 4x$$

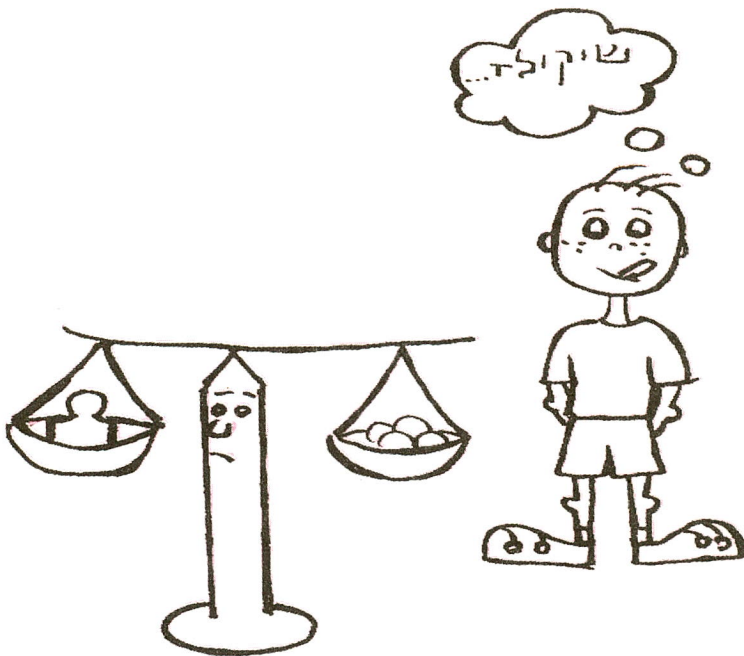
$$x^2 - 13x - 48 = 0$$

$$(x-16)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 16, x_2 = -3 (< 0)$$

לפועל אי' נחוצים 16 יום כדי לבצע לבד עבודה שלמה, ולפועל בי' 20 יום.

### חידה

ניר מראה לאורן 4 קופסאות, שכל אחת מכילה 4 כדורי סוקולד, ואומר לו: - 3 מהקופסאות הכדורים במשקל 10 ג' כל אחת, ובאחת מהן כדורים במשקל 9 ג' כל אחד. אם אתה יכולה בסקיפה אחת לזהות היכן הכדורים "הקלים" יותר, אתה מקבל את כל הקופסאות מתנה. האם יכול אורן לזכות בסוקולד?



תשובה...  
 הסבר: הוא יסמן כל קופסה במספר (הראשונה ב-1, השנייה ב-2 וכו') ויוציא מקופסה 1 כדור אחד, מקופסה 2 שני כדורים, מקופסה 3 שלושה כדורים. הוא ישים את כל הכדורים, 10 במספר (1+2+3+4=10). אילו משקל כל אחד מהכדורים היה 10 ג', היה המשקל הכולל 100 ג'. אם יש רק 99 ג', אז יש רק כדור אחד ששוקל 9 ג'. כיוון שקופסה 1 היא היחידה ממנה הוציאו כדור אחד בלבד, אז זו הקופסה ממנה הוצא הכדור הנייל. אם המשקל הכולל הוא 98 ג', אזי יש שני כדורים בעלי משקל 9 ג', ואלה הוצאו מקופסה 2 וכו'.

## תרגילים

### סעיף 2 - בעיות כלליות (תשובות בעמוד 262)

#### א. מעלה ראשונה

1. מצא מספר  $x$  המקיים:  
א. אם נחבר לו 5, נקבל 20 (רשום משוואה ופתור אותה).  
ב. כאשר מחסירים אותו מ-12 מתקבל -3.
2. מצא מספר אשר, אם מכפילים אותו ב-7 ומוסיפים לתוצאה 5, מתקבל 26.
3. מהו המספר, אשר אם מחלקים אותו ב-4 ומחברים לתוצאה 12, מתקבל 17.
4. מצא מספר, אשר אם מחסירים ממנו 5, את התוצאה מכפילים ב-2, ולמכפלה מוסיפים 1, מתקבל 25-.
5. חילקתי מספר ב-3, למנה הוספתי 5 ואת הסכום הכפלתי ב-2. התקבלה תוצאה גדולה ב-8 מהמספר. מהו המספר?
6. לקרן סכום כסף בארנק. מחציתו היא הוציאה על מחברות. ב-3 ש"ח קנתה סוכריות ואז ראתה, שבידה  $\frac{1}{3}$  מהסכום שהיה לה תחילה. כמה כסף היה לקרן בתחילה?
7. לאורי 27 ש"ח. מזה הוא החזיר חוב לחברו. ב- $\frac{1}{2}$  מהסכום הנותר קנה עט, ואז נשאר בידיו סכום הקטן ב-3 ש"ח מהחוב שהחזיר לחברו. מה היה גודל החוב?
8. בעל קיוסק קיבל בטעות מחצית מכמות העיתונים שהוא מקבל כל יום. כדי לנסות לספק עיתונים ללקוחותיו, הוא לקח מבעלת חנות שכנה 15 עיתונים ומבעל חנות אחרת עוד רבע מהכמות שהוא מקבל, ואז היו חסרים לו עוד 3 עיתונים כדי להגיע למכסה הרגילה. מהי המכסה?
9. גלית רצתה לשלם עבור כרטיס להצגה, אך הסתבר שיש בידה רק שליש מהסכום הנחוץ. חברתה הלוותה לה עוד רבע מהסכום הנחוץ וחברה אחרת נתנה לה 9 ש"ח וכך היה חסר לה רק שקל אחד, שאותו הבטיחה להביא למחרת. מה מחיר הכרטיס?
10. ילד מחזיק ביד מספר עגולים צבעוניים. אחרי שהפסיד מחצית מהם במשחק קנה 4 עגולים נוספים, ושוב הפסיד 2 מהם. נותרו בידיו  $\frac{2}{3}$  ממספר העגולים בהתחלה. כמה עגולים היו בידי הילד?

11. לציון המבחן של תלמיד ניתנה תוספת של  $\frac{1}{3}$  מהציון עבור עבודה טובה שהגיש, 15 נקי התווספו על השתתפותו בכתה, אך ירדו 5 נקי על אי סדר במחברותיו. בסיכום גדל ציונו פי 1.5 מציון המבחן. מה הציון של התלמיד בסוף?
12. מירי בת 17. אחיה בן 7. בעוד כמה שנים יהיה גילה כפליים מגיל אחיה?
13. ורד בת 3. אחותה בת 11. בעוד כמה שנים יהיה גילה של ורד שליש מגיל אחותה?
14. האב בן 37. בנו בן 15. לפני כמה שנים היה גיל האב גדול פי 3 מגיל בנו?
15. האם בת 35. בתה בת 16. בנה בן 12. בעוד כמה שנים יהיה גיל האם כסכום גילי ילדיה?
16. מספר מסויים גדול ב-5 ממספר שני. סכום שני המספרים 19. מהם המספרים?
17. ניר הביא ל"בזבז" ב-2 ש"ח יותר מחברו. שניהם ביחד הוציאו את כל הכסף, שהיה ברשותם - 20 ש"ח. כמה הביא ניר?
18. מספר מסויים קטן ב-8 ממספר שני. אם נחבר למספר הראשון פעמיים את השני, נקבל 55. מהם המספרים?
19. מיכל וסיגל היו צריכות להגיש עבודה משותפת ובה 17 סעיפים. החלק של מיכל הכיל סעיף אחד פחות מהחלק של סיגל. כמה סעיפים בחלק של מיכל?
20. מספר אחד גדול פי 3 ממספר שני. ההפרש ביניהם הוא 16. מהם המספרים?
21. הקבוצה של שלומי שתלה פי שניים ממספר השתילים ששתלה הקבוצה של אורי. אחרי ששתי הקבוצות סיימו, הוסיף הגנן עוד שלושה שתילים, ואז כוסה הגן ב-36 שתילים חדשים. כמה שתילים שתלה הקבוצה של אורי?
22. מספר אחד קטן פי 11 ממספר שני. מחצית סכום המספרים הללו שווה 24. מהם המספרים?
23. אורך צינור אחד קטן פי 3 מאורך צינור אחר. הפרש האורכים שלהם גדול ב-7 ס"מ מהצינור הקטן. מהו אורך הצינור הגדול?
24. מספר אחד גדול פי 5 ממספר שני. אם מחסירים מהמספר הגדול 9, הוא הופך להיות פי 2 מהשני. מהו המספר הראשון?
25. גילה של אישה גדול פי 6 מגיל בנה. בעוד 6 שנים יהיה גילה פי 3 מגיל בנה. מה גיל הבן?
26. גילו של ילד קטן פי שניים מגיל אחותו. בעוד ארבע שנים יהיה גיל האח קטן פי 1.5 מגיל האחות. בת כמה האחות היום?

27. גילו של כל אחד משני תאומים קטן פי 3 מגיל אביהם. בעוד 4 שנים יהיה גיל האב גדול ב- 10 שנים מסכום גילי התאומים. בן כמה האב היום?
28. האם גדולה ב- 24 שנה מילדתה. בעוד 3 שנים יהיה גיל האם גדול פי 5 מגיל בתה. בת כמה תהיה הילדה אז?
29. סכום גיל אח ואחות 16. לפני שנתיים היה גיל האחות גדול פי 2 מגיל אחיה. בני כמה הם היום?
30. גיל הסב גדול פי 3 מגיל נכדו. לפני 15 שנה היה גיל הסב גדול פי 6 מגיל נכדו. בן כמה הסב היום?
31. גיל הסבתא גדול פי 4 מגילו של כל אחד מנכדיה התאומים. לפני 6 שנים היה גילה גדול פי 3 מסכום גילי נכדיה. בת כמה הסבתא היום?
32. לפני 4 שנים היה גילה של מירי קטן פי 10 מגיל אמה. בעוד 3 שנים יהיה גיל האם גדול פי 3 מגילה של מירי. מה גיל האם היום?
33. לפני שנתיים היה גילו של יניב פי 5 מגיל אחיו הקטן. בעוד שלוש שנים יהיה גילו של יניב גדול פי 3 מגיל אחיו הצעיר. מה גילו של יניב היום?
34. לפני 4 שנים היה גילו של דני גדול פי 2 מסכום שלושת גילאי השלישייה שלו. בעוד 6 שנים יהיה גילו קטן ב- 5 שנים מסכום גיליהם. מה גילו של דני היום?
35. לאבנר אוסף בולים גדול פי 1.5 מאשר של אחיו. אחרי שהחזיר 5 בולים, שהיה חייב, ולאחר שאחיו קנה עוד 9 בולים, היה בידי שני האחרים אותו מספר בולים. כמה בולים היו לאבנר תחילה?
36. במבחן פסיכומטרי קיבל גיא פי 1.1 יותר נקודות מגילה. במועד הבא קיבל גיא אותה התוצאה, וגילה שפרה ב- 60 נק', ואז היה לשניהם אותו מספר נק'. כמה נק' היו לגיא?
37. שני סטודנטים עובדים במלצרות. האחד הרוויח בערב אחד ב- 50 ש"ח יותר מהשני. אחרי שהשני הוציא על שתיה 4 ש"ח, היה בידי הראשון פי 2 הסכום שבידי השני. כמה הרוויח הראשון?
38. פועל אחד משתכר  $\frac{3}{4}$  מפועל שני. אחרי שהוא קיבל העלאה במשכורת בסך של 400 ש"ח, ולאחר שלשני הורידו 50 ש"ח - תשלום שהיה חייב, היו משכורותיהם שוות. כמה השתכר הפועל הראשון?
39. מספר החדרים באגף הישן של מלון היה פי שניים ממספר החדרים באגף החדש. אחרי שבאגף החדש הוסיפו עוד חלק, המכיל 15 חדרים, ובאגף הישן

- הוצאו 3 חדרים משימוש בגלל אי עמידה ברמת המלון, היה מספר החדרים באגף החדש קטן פי 1.5 ממספרם באגף הישן. כמה חדרים היו באגף הישן?
40. פרדס אחד נתן בשנה שעברה פי 1.5 תפוזים יותר מאשר פרדס שני. השנה הזו, לאחר שהפרדס השני עבר טיפול בחומר אורגני, הוא הניב בטון אחד יותר מהשנה שעברה. בפרדס הראשון היתה שריפה, ולכן ירד יבולו השנה ב- 2 טון. כמה טון הניב הפרדס הראשון בשנה שעברה, אם יבולו השנה ירד עד כדי 0.8 מהשני?
41. מספר א' גדול פי 7 ממספר ב'. מספר ג' גדול ב- 5 ממספר א'. סכום שלושת המספרים - 35. חשב את המספרים.
42. בכתה א'-3 יש ב- 3 תלמידים פחות מאשר בכתה א'-2. מספר התלמידים בכתה א'-1 גדול פי 1.5 ממספר תלמידי כתה א'-2. בשלוש הכתות ביחד 81 תלמידים. כמה תלמידים בכתה א'-3?
43. צינור שאורכו 1.35 מ' מורכב משלושה חלקים, כאשר החלק הגדול ארוך פי שניים מהבינוני, והחלק הקטן קצר ב- 5 ס"מ מהבינוני. חשב את אורך החלק הקצר.
44. יריב, יפעת וגיל קנו בסה"כ 23 מדבקות צבעוניות. יריב קנה ב- 3 מדבקות יותר מאשר יפעת ויפעת קנתה חצי ממספר המדבקות שקנה גיל. כמה מדבקות ליפעת?
45. מספר אחד קטן ב- 17 ממספר שני וגדול ב- 5 ממספר שלישי. סכום שלושת המספרים הוא 81. מצא את המספר הראשון.
46. במדגם של 660 איש, שבדק את אחוזי הצפיה בשני ערוצים (הראשון והשני), היה מספר הצופים בערוץ 1 קטן ב- 100 ממספר הצופים בערוץ 2 וגדול פי 3 ממספר הצופים שלא צפו באף אחד משני הערוצים. כמה אנשים צפו בערוץ 1?
47. בשכבת כתות י' 137 תלמידים. מספר התלמידים, שבחרו ללמוד מתמטיקה ברמה של 5 יחידות, קטן פי 4 ממספר הלומדים ברמה של 3 יחידות וקטן ב- 11 ממספר הלומדים ברמה של 4 יחידות. כמה תלמידים לומדים מתמטיקה ברמה של 3 יחידות?
48. אשה ערירית ציוותה את רכושה לבית חולים באופן הבא: למחקר מחלת האיידס תרמה סכום הקטן ב- 20 מליון ש"ח מהסכום, שהיא תרמה לחקר הסרטן. למחלקת ילדים תרמה סכום קטן פי 1.5 מהסכום שתרמה למלחמה באיידס. הסכום שתרמה למחלקת ילדים מהווה  $\frac{1}{5}$  מכל התרומה. כמה מליונים תרמה האשה?
- 49\*. בערוגה אחת יש ב- 11 שתילים פחות מאשר בערוגה שניה ובשלושה שתילים יותר מאשר בשלישית. חשב כמה שתילים בערוגה השניה, אם ידוע, שמספר השתילים בה קטן ב- 1 ממספר השתילים בשתי הערוגות האחרות יחד.

50\* חבילה אחת מכילה חצי מכמות הספרים שבחבילה השניה. החבילה השלישית מכילה  $\frac{3}{4}$  ממספר הספרים שבשניה. בחבילה השניה, ב- 5 ספרים פחות מאשר בשתי החבילות האחרות יחד. כמה ספרים בחבילה השלישית?

51\* מספר התרגילים השנתי, שהגיש סטודנט א' מהווה  $\frac{4}{5}$  ממספר התרגילים שהגיש סטודנט ב'. מספר התרגילים שהגיש סטודנט ג' הוא חצי ממספר התרגילים שהגיש ב' וקטן ב- 9 ממספר התרגילים שהגיש א'. כמה תרגילים הגיש סטודנט א'?

52. לאדם בן 66 שלושה בנים. גיל הבכור גדול ב- 14 מגיל האח האמצעי וגדול פי 2 מגיל האח הצעיר. בן כמה האח הצעיר אם לפני 5 שנים היה גיל האב שווה לסכום גילי בניו?

53. האח הבכור מבוגר בשלוש שנים מאחותו ופי  $1\frac{1}{4}$  מאחיו. לפני 5 שנים היה גיל האח הבכור שווה לסכום גילי אחיו. מה גילו כיום?

54. גילו של הנכד הצעיר של אשה בת 50 הוא  $\frac{2}{3}$  מגיל אחותו וקטן בשנתיים מגיל אחיו. בעוד 10 שנים יהיה גיל האשה שווה לסכום גילי נכדיה. מה גיל האח הגדול?

55. גיל האח הצעיר קטן ב- 6 שנים מהמבוגר. גיל האב גדול פי  $2\frac{2}{9}$  מגיל האח המבוגר. בעוד 10 שנים, יהיה גיל האב שווה לסכום גילי שני בניו. בן כמה האב היום?

56\* לאשה נולד בנה הראשון בהיותה בת 21. בהיותה בת 24 נולדה בתה הראשונה ובהיותה בת 29 נולדה בתה הקטנה. בת כמה האשה היום, אם גילה שווה לסכום גילי ילדיה?

57. גיל אשה גדול פי 3 מגיל בתה. גיל בעלה גדול ב- 32 שנים מגיל בתם. לפני 6 שנים היה גיל האשה  $\frac{3}{4}$  מסכום גילי בעלה ובתה. מה גיל האשה?

58. לאשה בת 32 נולדה שלישייה וזאת לאחר שבגיל 28 נולדו לה תאומים. באיזה גיל יהיה גילה שווה לסכום גילי כל ילדיה?

59. גיל האחות הבכורה גדול פי 1.5 מהצעירה. האח קטן ב- 7 שנים מאחת האחיות וגדול בשנה מהאחרת. מה גיל האחות הבכירה?

60. גיל אשה גדול ב- 56 שנים מגיל נכדתה. גיל הנכדה קטן פי שלושה מגיל אמה. חשב את גיל אם הילדה, אם הוא הממוצע החשבוני של גיל הילדה וגיל הסבתא?

61. בשני לולים יחד יש אותו מספר אפרוחים. אם מעבירים מהלול הראשון לשני 20 אפרוחים, יהיה בלול השני פי 2 אפרוחים מאשר בראשון. כמה אפרוחים היו בכל לול בתחילה?
62. בתבנית אחת 20 ביצים, בתבנית שניה 14 ביצים. אחרי שמעבירים מספר ביצים מהראשונה לשניה, יהיו בראשונה ב- 10 ביצים פחות מאשר בשניה. כמה ביצים יש בראשונה אחרי ההעברה?
63. בשני כלים יש 36 ליטר נפט. אם מעבירים 3 ליטר מהראשון לשני, נשאר בראשון פי 3 מאשר בשני. כמה נפט היה בכל כלי לפני ההעברה?
64. אורכו של חבל אריזה בגליל אחד גדול פי 2 מאורכו של חבל בגליל שני. אם חותכים מכל גליל 21 מ' חבל, יהיה אורכו של הראשון פי 3.5 מאשר השני. מהו אורך החבר הראשון אחרי החיתוך?
65. באחד המקררים שבמכולת יש 28 פחיות שתיה. במקרר אחר, 44 פחיות שתיה. אחרי העברת חלק מהפחיות מהשני לראשון, יהיו בשני  $\frac{4}{5}$  ממספר הפחיות שיהיו בראשון. כמה פחיות הועברו?
66. בשתי ספריות ביחד 60,000 ספרים. כאשר הספרייה הראשונה העבירה לשניה 1,000 ספרים, נשאר בראשונה פי 2 ממה שבשניה. כמה ספרים היו בהתחלה בספרייה השניה?
67. בשני מחסנים יש ביחד 100 ארגזים. אם יעבירו ממחסן אחד לשני כמות ארגזים השווה לכמות הארגזים שיש בשני, תהיה כמות הארגזים במחסן הראשון גדולה פי 1.5 מאשר בשני. כמה ארגזים היו במחסן השני לפני ההעברה?
68. בשני ארגזים כמויות שונות של קופסאות שימורים. אם מעבירים קופסה אחת מהארגז הראשון לשני, יכילו הארגזים אותו מספר קופסאות. אם מעבירים מהשני לראשון 20 קופסאות, יכיל הארגז הראשון פי 3 קופסאות מאשר השני. כמה קופסאות שימורים בכל ארגז בהתחלה?
69. קבוצת אנשים היתה צריכה לעבור לגדה השניה של נהר. תחילה עברו 12 אנשים לגדה השניה של הנהר. אח"כ עברו עוד רבע מאלה שנשארו. ואז התברר, שנשארו על הגדה הראשונה בשני אנשים יותר מאלה שכבר עברו. כמה אנשים בקבוצה?
70. במדף אחד של ספרייה יש פי 2 ספרים מאשר במדף שני. אם יעבירו מהמדף הראשון לשני שליש מכמות הספרים, שיש בו, יהיו במדף השני ב- 16 ספרים יותר מאשר בראשון. כמה ספרים היו על המדף הראשון בהתחלה?
71. באוטובוס אחד יש ב- 17 תלמידים יותר מאשר באוטובוס השני. אחרי שחלק מהתלמידים שבאוטובוס הראשון עברו לשני, היו בשני ב- 3 תלמידים יותר מאשר בראשון. כמה תלמידים עברו?

72. בשני כלים כמויות מים שונות. אם מעבירים מהכלי הראשון לשני ככמות המים שיש בשני, ולראשון מוסיפים עוד 2 ליטרים מים, יהיו בשני פי 2 מים מאשר בראשון. אם לעומת זאת מעבירים מהשני לראשון כמות השווה למחצית הכמות, שיש בראשון, יהיה בראשון פי 12 מאשר בשני. מצא את כמות המים שהיתה בראשון.
73. בשלושה מיכלים ביחד אפשר למלא 162 ליטר מים. אם מהמיכל הראשון בהיותו מלא שופכים מים לשני, שהוא ריק עד שהוא מתמלא, נשאר במיכל הראשון  $\frac{2}{7}$  מתכולתו.
- אילו המיכלים השני והשלישי היו מלאים, ושופכים את תכולתם לראשון (הריק), יחסרו עוד 6 ליטרים מים כדי למלא אותו.
- בכמה מים אפשר למלא כל מיכל?
- 74\*. אם מעבירים מחצית ממספר העוגות שבמדף הראשון שבקונדיטוריה לשני, ואח"כ מעבירים בחזרה לראשון שליש ממספר העוגות שבשני, יהיו בשני ב- 2 עוגות פחות מאשר בראשון. כמה עוגות היו בהתחלה על המדף הראשון, אם ידוע שכפליים מספרן, קטן ב- 18 מ- 3 פעמים מספר העוגות שעל המדף השני?

## ב. מעלה שניה

75. מצא מספר  $x$ , הקטן ב- 72 מריבועו.
76. מצא מספר, שמכפלתו במספר הקטן ממנו ב- 3 שווה ל- 40.
77. אם נחסיר ממספר 2 ואת התוצאה נעלה בריבוע, נקבל מספר גדול ב- 4 מהמספר המקורי. מצא את המספר.
78. מספר אחד גדול פי 2 ממספר שני. הפרש ריבועי שני המספרים גדול ב- 21 מהמספר השני. מצא את המספרים, אם נתון שהם חיוביים.
79. מספר אחד גדול ב- 5 ממספר שני. מכפלת המספרים היא 84. מהם המספרים?
80. מכפלת שני מספרים היא 48. אם נוסיף למספר א' 1 ומספר ב' נחסיר 1, נקבל מכפלה גדולה ב- 7 מהמכפלה המקורית. מצא את המספרים.
81. מכפלת שני מספרים גדולה ב- 11 מסכומם. מצא את המספרים אם ידוע שהפרשם שווה ל- 1.
82. מצא שני מספרים חיוביים, זוגיים, עוקבים, שמכפלתם 168.
83. מצא שני מספרים חיוביים, אי זוגיים, עוקבים, שסכום ריבועיהם שווה ל- 290.
84. סכום ריבועי שני מספרים חיוביים עוקבים גדול ב- 5 מריבועו של המספר העוקב השלישי. חשב את המספרים.

85. אם נחבר למספר את המספר ההופכי, נקבל  $2\frac{1}{6}$ . מהו המספר?
86. נתונים שני מספרים עוקבים. ההפרש בין שני המספרים ההופכיים להם שווה ל- $\frac{1}{6}$ . חשב את המספרים.
87. מספר אחד קטן ב-5 ממספר שני. סכום המספרים ההופכיים למספרים הנ"ל שווה ל-0.3. מהם המספרים?
88. אם נחבר למכפלת שני מספרים עוקבים את מכפלת שני המספרים העוקבים הבאים, נקבל 26. מצא את המספרים (החיוביים).

## תשובות

1. 15, 15. 2. 3. 3. 20. 4. -8. 5. 6. 18. 6. 11. 7. 72. 8. עיתונים 9. 24. ש' 10. 12. עיגולים 11. 90. 12. 3. 13. 1. שנה 14. 4. שנים 15. 7. שנים 16. 7, 12. 17. 11. ש' 18. 21, 13. 19. 8. סעיפים 20. 8, 24. 21. 11. שתילים 22. 4, 44. 23. 21. ס"מ 24. 15. 25. 4. שנים 26. 8. שנים 27. 42. שנה 28. 6. שנים 29. 6, 10. שנים 30. 75. שנה 31. 60. שנה 32. 24. שנה 33. 27. שנה 34. 34. שנה 35. 42. בולים 36. 2, 14, 19. 37. 108. ש' 38. 1350. ש' 39. 102. חדרים 40. 6. טון 41. 2, 14, 19. 42. 21. תלמידים 43. 30. ס"מ 44. 5. מדבקות 45. 23. 46. 240. אנשים 47. 84. תלמידים 48. 100. מליון 49. 26. שתילים 50. 15. ספרים 51. 24. תרגילים 52. 18. שנה 53. 10. שנים 54. 10. שנים 55. 40. שנה 56. 37. שנה 57. 42. שנה 58. 38. שנה 59. 24. שנה 60. 42. שנה 61. 60. אפרוחים 62. 12. ביצים 63. 30. ל', 6. ל' 64. 49. מ' 65. 12. פחיות 66. 19,000. ספרים 67. 20. ארגזים 68. 43. קופסאות, 41. קופסאות 69. 40. איש 70. 96. ספרים 71. 10. תלמידים 72. 8. ל' 73. 84, 60, 18. ל' 74. 36. עוגות 75. -8, 9. 76. -5, 8. 77. 0, 5. 78. 3, 6. 79. (-7; -12), (12; 7). 80. (4; 12), (-12; -4). 81. (5; 4), (-2; -3). 82. 12, 14. 83. 11, 13. 84. 4, 5, 6. 85.  $(\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2})$ . 86. -3, -2, או 2, 3. 87. 10, 5 או  $-\frac{10}{3}$ ,  $\frac{5}{3}$ . 88. 2, 3, 4, 5.

## סעיף 3 - כלל הטבלה (תשובות בעמוד 274)

### א. מעלה ראשונה

1. ילד קנה 11 תמונות למשחק בשני גדלים. כל תמונה קטנה עולה 2 ש"ח וכל תמונה גדולה עולה 5 ש"ח. הוא שילם עבור כל התמונות 40 ש"ח. כמה תמונות קנה מכל סוג?
2. מחיר מכחול עבה גדול ב- 1 ש"ח ממחיר מכחול דק. ילד קנה 4 מכחולים דקים ו- 5 עבים, ושילם 23 ש"ח. מה מחיר מכחול דק?
3. אדם קנה 16 שתילים עבור גינת נוי: חלקם במחיר 11 ש"ח לשתיל והאחרים במחיר 8 ש"ח השתיל, ושילם עבורם 149 ש"ח. כמה שתילים קנה מכל סוג?
4. עלות הדפסת עמוד בעברית היא 5 ש"ח, ואילו באנגלית 8 ש"ח. פקיד הדפיס בסה"כ 34 עמודים וקיבל 215 ש"ח. כמה עמודים הדפיס בעברית ומה היה מחיר ההדפסה הכוללת באנגלית?
5. מחיר מחק אחד 80 אג' ומחיר מחדד 90 אג'. מחיר 7 פריטים (מחדדים ומחקים) הוא 5.8 ש"ח. כמה מחקים נקנו?
6. לצביעת 8 דלתות ו- 12 חלונות היה צריך לשלם 1340 ש"ח. היות ששתיים מהדלתות לא נזקקו לצביעה, והתווספו עוד 4 חלונות של המקלט, היתה עלות הצביעה 1390 ש"ח. כמה עלתה צביעת כל חלון?
7. בפנימיה תכננו לחדש מלאי ולקנות 8 שמיכות ו- 14 כריות ולשלם עבור הכל 870 ש"ח. כיוון שהיה מבצע הנחות ומחיר שמיכה ירד ב- 10 ש"ח, ומחיר כרית ירד ב- 5 ש"ח, נרכשו באותו סכום 10 שמיכות ו- 16 כריות. מה היה מחיר כרית לפני ההנחה?
8. מחיר 3 ק"ג עגבניות ו- 5 ק"ג מלפפונים - 35 ש"ח. ואילו מחיר 5 ק"ג עגבניות ו- 4 ק"ג מלפפונים הוא 41 ש"ח. מה מחיר ק"ג מלפפונים?
9. לתפירת 10 חליפות ו- 5 מעילים דרושים 36 מ' בד. ואילו לתפירת 7 חליפות ו- 2 מעילים נחוצים 21 מ' בד. כמה מטרים בד נחוצים לתפירת 10 חליפות?
10. 9 צינורות קצרים ו- 4 צינורות ארוכים יוצרים מוט שאורכו 6.4 מ'. ואילו 7 צינורות קצרים ו- 11 ארוכים יוצרים מוט שאורכו 10.5 מ'. מה אורכו של מוט המכיל 4 צינורות קצרים ושניים ארוכים?
11. משקל ארגז אשכוליות קטן ב- 0.5 ק"ג ממשקל ארגז תפוזים. בית אריזה שלח לשוק הסיטונאי 20 ארגזי תפוזים ו- 24 ארגזי אשכוליות במשקל כולל של 450 ק"ג. מה משקל שני ארגזי תפוזים ושלושה ארגזי אשכוליות?

12. במלון חדש שבו 80 חדרים הזמינו שטיחים מקיר לקיר בשני צבעים: אפור שמחירו 300 ש"ח לחדר, וארגמן שמחירו 320 ש"ח לחדר, ושילמו סה"כ 24,700 ש"ח. כמה חדרים רופדו בשטיח האפור?
13. מחיר ארוח ל- 3 ימים בבית הארחה בסוף שבוע הוא כמו מחיר של 4 ימים במהלך השבוע. חברת נסיעות הזמינה חדרים עבור 48 ימי מהלך השבוע ו- 42 ימי סוף שבוע ושילמה עבורם סה"כ 15,600 ש"ח. בכמה יקר יום ארוח בסוף השבוע לעומת יום ארוח באמצע השבוע?
14. אורך 5 אדניות קצרות כמו אורכן של 3 ארוכות. בבית ספר תלו 8 אדניות ארוכות ו- 12 קצרות ברצף על מעקה שאורכו 11.4 מ'. מה אורך אדנית ארוכה.
15. מרכז ספורט הזמין 14 מזגנים מפוצלים, המכילים כל אחד חלק פנימי וחלק חיצוני. המשקל הכולל הוא 630 ק"ג. משקלם של 6 חלקים פנימיים קטן ב- 5 ק"ג ממשקל 5 חלקים חיצוניים. מה היה משקל כל חלק?
16. מחיר 5 מכשירי טלפון מדגם א' גדול ב- 20 ש"ח ממחירים של 7 מכשירים מדגם ב'. בבנין משרדים הותקנו 8 מכשירים מדגם א' ו- 6 מכשירים מדגם ב' בעלות כוללת של 4,848 ש"ח. בכמה יקר מכשיר מדגם א' ממכשיר מדגם ב'?
17. מחיר 4 מגהצים ו- 3 קומקומים הוא 1,100 ש"ח. מחיר 8 מגהצים ו- 6 קומקומים הוא 2,200 ש"ח. האם תוכל לחשב מה מחיר מגהץ אחד ומה מחירו של קומקום אחד? נמק.
18. מחיר 5 ק"ג עגבניות ו- 5 ק"ג מלפפונים הוא 30 ש"ח.  
 א. מהו המחיר של 1 ק"ג עגבניות ומהו מחיר 1 ק"ג מלפפונים?  
 ב. מה מחיר של ק"ג אחד עגבניות וק"ג אחד מלפפונים ביחד?
19. שטחם של 5 שטיחים גדולים ו- 3 קטנים הוא 36 מ"ר. שטחם של 15 שטיחים גדולים ו- 9 קטנים הוא 102 מ"ר. מהו שטחו של שטיח גדול?
20. עוביים של 2 עותקים מספר אחד ו- 3 עותקים מספר אחר 16 ס"מ.  
 א. מה עובי 4 עותקים מהספר הראשון ו- 6 מהספר השני?  
 ב. מה עובי 6 עותקים מהספר הראשון ו- 6 מהשני?
- 21\* אורך 4 קרונות נוסעים ושני קרונות משא 48 מ'.  
 א. חשב מה אורכם של שני קרונות נוסעים וקרונ משא אחד.  
 ב. מה אורך רכבת המכילה קטר שאורכו 5 מ', 8 קרונות נוסעים ו- 4 קרונות משא?
22. בשאלון של מבחן רב ברירת (אמריקאי) המכיל 50 שאלות מקבלים 2 נק' עבור כל תשובה נכונה ומורידים חצי נקודה עבור העדר תשובה או תשובה לא נכונה. תלמיד קיבל במבחן זה 75. כמה מתשובותיו היו נכונות?

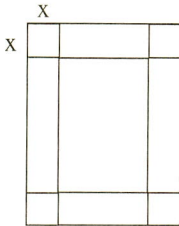
23. במשחק בן 10 שלבים מקבלים 4 נק' זכות על הצלחה באותו שלב ומורידים נק' זכות אחת על כל כשלוך. בתום המשחק קיבל ילד אחד 30 נק' זכות. בכמה שלבים נכשל?
24. בביח"ר נוהגים לתגמל עובד על כל מוצר תקין ב- 20 ש"ח ולקנוס אותו על כל מוצר פגום ב- 5 ש"ח. אדם יצר 40 מוצרים וקיבל בסיכום תגמול של 600 ש"ח. כמה מוצרים תקינים ייצר?
25. על כל עמוד שמודפס ללא שגיאות מקבלת כתבנית תוספת של 2 ש"ח ועל כל עמוד שיש בו לפחות שגיאה אחת היא מפסידה 80 אג'. במהלך חודש הדפיסה הכתבנית 600 עמודים וקיבלה 1,116 ש"ח תוספת. כמה עמודים הדפיסה ללא שגיאות?
- 26\*. במשחק של קליעה למטרה, מקבלים 5 נק' על קליעה בתוך העיגול הפנימי, 2 נק' בשטח הנותר, ומפסידים 3 נק' על כל כשלוך. קלע עשה 10 נסיונות, מתוכם 4 קליעות בעיגול הפנימי, וקיבל בסה"כ 27 נק'. כמה כשלונות היו לו?
- 27\*. כדי להגדיל את מודעות התלמידים לסדר ניתנו 3 נקודות תוספת על כל ספר עטוף, 2 נקודות על כל מחברת עטופה, והורידו נקודה אחת על כל השלכה של אשפה בביה"ס. תלמיד אחד קיבל בתום השנה 30 נק' זכות. מה מספר הפעמים שהשליך אשפה (ונתפס) אם מספר זה קטן ב- 4 ממספר ספריו העטופים וקטן פי 2 ממספר המחברות העטופות?
28. כל אחד מתלמידי הכתה הביא 35 ש"ח לאוטובוס לטיול, אך הסתבר שהסכום גדול ב- 120 ש"ח מהנחוץ ומספיק היה שכל אחד מהם ישתתף ב- 30 ש"ח. כמה תלמידים בכתה?
29. חברים החליטו לקנות לאייל מתנת יום הולדת ותכננו להוציא כל אחד 50 ש"ח. אולם המתנה שתכננו לקנות, התייקרה ב- 30 ש"ח ולכן היה סכום ההשתתפות של כל אחד 56 ש"ח. כמה עלתה המתנה?
30. לריצוף חדר אורחים יחד עם המסדרון, נחוצים 18 מ"ר שיש. היות שבחרו שיש יותר יקר ב- 20 ש"ח מזה שתכננו, החליטו לרצף רק את חדר האורחים שעבורו נחוצים 15 מ"ר. כמה הוציאו לריצוף חדר האורחים?
31. ועד הבית תכנן לקנות שתילים עבור גינת הבית המשותף כשכל דייר משתתף ב- 50 ש"ח. אולם אחד הדיירים, שהוא גנן לא שילם, כי הוא תרם את עבודת הגינון, ולכן היה על כל דייר לשלם 60 ש"ח לכיסוי מחיר השתילים. מה מחיר כל השתילים?
32. 12 ילדי כתה החליטו לרכוש כדורסל. 2 ילדים הצטרפו לקניה ולכן היה על כל ילד לשלם 3 ש"ח פחות. כמה עלה הכדור?
33. תלמידים החליטו לקנות וילונות למועדון הנוער. אם כל אחד מביא 35 ש"ח, חסרים 70 ש"ח למחיר הוילון, ואם הם מביאים 40 ש"ח כל אחד, ישארו 30 ש"ח עודף. מה מחיר הוילון?

34. אם כל אחד מדיירי הבניין ישלם 1,500 ש"ח עבור התקנת מעלית בבנין, יחסרו 2,000 ש"ח לסכום הדרוש. אם כל אחד ישלם 1,800 ש"ח ישארו בקופה המשותפת 400 ש"ח. מהו הסכום הנדרש?
35. 22 ילדים התנדבו לתרום כ"א סכום מסויים לקניית מכשיר עזר לילד חולה. ואז היו חסרים להם 60 ש"ח. אחרי שהצטרפו 3 ילדים נוספים לקניה הם רכשו את המכשיר וקנו לו גם תמונה במחיר 30 ש"ח. כמה תרם כל ילד?
36. אם כל פועלת במתפרה תכין 35 חולצות, תחסרנה 20 חולצות למשלוח שהוזמן. אם כל אחת תתפור 37 חולצות, ישארו במפעל 16 חולצות עודפות. כמה פועלות במפעל וכמה חולצות הוזמנו?
37. אם כל אחד מהפועלים במפעל ישקיע 9 ימים להכנת פרוייקט מסויים יחסרו 16 ימי עבודה להשלמת הפרוייקט. אם יוסיפו פועל אחד, וכל אחד מהם (הקבועים והנוספים) ישקיע 10 ימי עבודה, יצליח לסיים את הפרוייקט. כמה ימים נחוצים לביצוע הפרוייקט?
38. לירקן היה מלאי של 30 ק"ג תפוחים. על כל ק"ג של תפוחים במצב טוב הרוויח 3 ש"ח ועל כל ק"ג תפוחים שנפגמו הפסיד 2 ש"ח. בסיכום מכירה זו הרוויח הירקן 60 ש"ח. כמה ק"ג תפוחים התקלקלו?
39. בחנות הלבשה מלאי של 60 חולצות, חלקן אופנתיות, שעל כל אחת מהן מרוויח המוכר 25 ש"ח, וחלקן יצאו מהאופנה ועל כל אחת מהן הוא מפסיד 5 ש"ח.
- א. כמה חולצות אופנתיות יש למוכר אם בסיום המכירה של כל המלאי ירוויח 960 ש"ח?
- ב. מה מספר החולצות האופנתיות, אם בתום המכירה לא הרוויח ולא הפסיד.
40. חנות מחשבים רכשה מלאי של משחקי מחשב לילדים במחיר כולל של 600 ש"ח. שלושה משחקים הושארו להדגמה ואת האחרים מכרו במחיר כפול ממחיר הקניה וקיבלו סה"כ 1,020 ש"ח. כמה משחקים קנתה החנות?
- 41\* ירקן קנה מלונים במחיר מסויים. מחצית מהמלונים היו רקובים ואת היתר מכר ברווח של 1 ש"ח למלון. ע"י כך כיסה הירקן בדיוק את העלות. כמה שילם עבור כל מלון?
- 42\* מורה לנהיגה נתן לתלמידו בונוס של 10 נק' על כל מתן זכות קדימה להולכי רגל והוריד 15 נק' על כל עליה במהירות מעל המותר. על כל 45 נק' שהתלמיד צובר הוא מקבל שעור חינם. מה מספר המקרים של נסיעה במהירות מופרזת מתוך 14 מקרים שנבדקו אם התלמיד קיבל שני שעורים חינם?

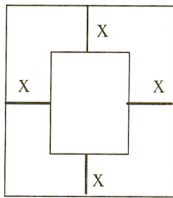
#### בעיות בהנדסה

43. אורכו של מלבן גדול ב- 3 ס"מ מרוחבו והיקפו 30 ס"מ. חשב את אורך המלבן.
44. רוחב מלבן קטן ב- 1 ס"מ מאורכו. היקף המלבן גדול ב- 9 ס"מ מאורכו. חשב את היקף המלבן ואת שטחו.

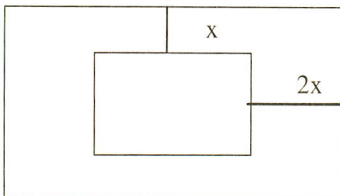
45. רוחב מלבן קטן ב- 2 ס"מ מאורכו. היקף המלבן גדול פי 6 מרוחבו. חשב את היקף המלבן ואת שטחו.
46. מישר שאורכו 40 ס"מ יצרו ריבוע ומלבן, שרוחבו כאורך צלע הריבוע שקטנה פי 2 מאורכו של המלבן. חשב את היקף הריבוע ואת שטחו.
47. האריכו צלע אחת של ריבוע ב- 4 ס"מ ואת הסמוכה לה קיצרו ב- 1 ס"מ והתקבל מלבן שהיקפו 30 ס"מ. חשב את היקף הריבוע ואת שטחו.
48. היקפו של מלבן 36 ס"מ. אחרי שקיצרו את אורכו ב- 5 ס"מ והאריכו את רוחבו ב- 7 ס"מ, התקבל ריבוע. חשב את היקף הריבוע ואת שטח המלבן.
49. כשמאריכים צלע אחת של ריבוע ב- 4 ס"מ, נוצר מלבן ששטחו גדול משטח הריבוע ב- 12 סמ"ר. חשב את צלע הריבוע.
50. האריכו צלע אחת של מלבן ב- 6 ס"מ והתקבל מלבן ששטחו גדול משטח המלבן המקורי ב- 24 סמ"ר. חשב את אורך הצלע האחרת של המלבן.



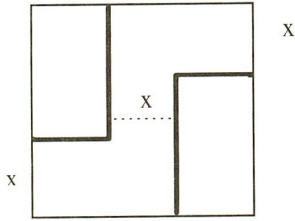
51. בגן ציבורי שממדיו 8 מ' ו- 5 מ', שתלו פרחים ב- 4 ריבועים, שבפינות הגן, ובמלבן שבמרכז (השטח המוצלל בשרטוט), וכל מרובע כזה גדרו בגדר צבעונית. לגדר זו השתמשו בתיל מיוח באורך 34 מ'. חשב את  $x$ .



52. אזור הבריכה מגודר בגדר חיה, שהיקפה 85 מ'. הבריכה עצמה היא בעלת צורת מלבן, שהיקפו 61 מ'. השטח מסביבה מרוצף בפס בעל אותו רוחב בכל צד של הבריכה. חשב את רוחב השטח, שמסביב לבריכה.



53. אורך האולם המרכזי בספריה 8 מ' ורוחבו 5 מ'. על שני קירות נגדיים מוצגים ספרים על מדפים, שעומקם גדול פי 2 מעומק המדפים שעל שני הקירות האחרים. מהו עומק המדפים בכל קיר, אם היקף אותו חלק של האולם ללא המדפים, קטן ב- 17 מ' מהיקף האולם כולו. חשב את רוחב המדפים.



54. לחצר של גן ילדים צורת ריבוע, שצלעו 8 מ'. שני המלבנים המוצללים הם: האחד פינת המשחקים והשני ארגז חול. הקווים העבים הם קיר בטון נמוך, שהילדים יוכלו לשבת עליו.  
חשב את  $x$ , שבשרטוט, אם אורך קירות הבטון ביחד הוא 18 מ'

55. במשולש שווה שוקיים אורך השוק גדול ב- 5 ס"מ מאורך הבסיס. היקף המשולש 40 ס"מ. חשב את אורך הבסיס.

56. אורך השוק במשולש שווה שוקיים מהווה  $\frac{4}{5}$  מאורך הבסיס. היקף המשולש 26 ס"מ. חשב את אורך השוק.

57. מחוט תיל, שאורכו 50 ס"מ יצרו מלבן ומשולש שווה צלעות. אורך המלבן גדול ב- 3 ס"מ מרוחבו. צלע המשולש שווה לאורך המלבן. חשב את היקף המשולש ואת שטח המלבן.

58. אורך השוק של משולש שווה שוקיים קטן ב- 1 ס"מ מבסיסו. על בסיס המשולש שרטטו מלבן, כך שהבסיס משמש לו כאורך. רוחב המלבן שווה ל-  $\frac{3}{4}$  מאורכו. היקף המלבן גדול ב- 4 ס"מ מהיקף המשולש. חשב את בסיס המשולש.

59. צלעות משולש מתייחסות כמו 7: 5: 3. היקף המשולש 60 ס"מ. חשב את הצלעות.

60. סכום השוק והבסיס במשולש שווה שוקיים - 15 ס"מ. היקף המשולש 23 ס"מ. מה אורך הבסיס.

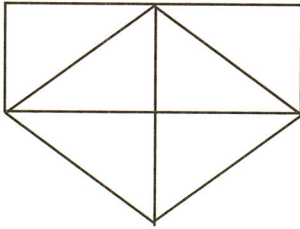
61\*. צלע אחת במשולש קטנה מסכום שתי הצלעות האחרות ב- 1 ס"מ.  
א. חשב את אורכה, אם היקף המשולש 13 ס"מ.  
ב. אם יחס שתי הצלעות האחרות, כמו 3: 2, חשב את אורכיהן.

62. אם יגדילו צלע אחת של ריבוע ב- 7, ואת השניה יקטינו ב- 2, יגדל שטח הריבוע ב- 11 ס"מ. חשב את צלע הריבוע.

63. אם יגדילו ניצב אחד של משולש ישר זווית ושווה שוקיים ב- 7 ס"מ ואת השני יקטינו ב- 5 ס"מ, יתקבל משולש, ששטחו קטן ב- 10.5 סמ"ר משטח המשולש המקורי. חשב את שטח המשולש המקורי.

64. סכום שני הניצבים במשולש ישר זווית הוא 12 ס"מ. אם יקטינו ניצב אחד ב- 4 ס"מ, ואת השני יגדילו ב- 3 ס"מ, יקטן שטח המשולש ב- 5.5 סמ"ר. חשב את אורכי הניצבים.

65. היקפו של טרפז שווה שוקיים 16 ס"מ. הבסיס התחתון גדול ב- 4 ס"מ מהעליון. חשב את שוקי הטרפז:  
 א. אם הן שוות לבסיס העליון.  
 ב. אם הן שוות לבסיס התחתון.
66. קטע האמצעים בטרפז שווה שוקיים שווה 18 ס"מ. היקף הטרפז 50 ס"מ.  
 א. חשב את אורך השוק.  
 ב. אם שטח הטרפז הוא 108 סמ"ר, חשב את הגובה.
67. קטע האמצעים בטרפז ישר זווית הוא 7.5 ס"מ. היקף הטרפז - 24 ס"מ, והשוק הארוכה של הטרפז - 5 ס"מ. חשב את שטחו.
68. היקף מקבילית 64 ס"מ. אם מקצרים צלע אחת שלה ב- 5 ס"מ, ומאריכים את השניה ב- 3 ס"מ, מתקבל מעוין. חשב את היקפו.
69. האריכו צלע אחת של מעוין ב- 3 ס"מ, וקצרו את הצלע השניה ב- 8 ס"מ, וקיבלו מקבילית, שהיקפה 26 ס"מ. חשב את היקף המעוין.



- 70\* אלכסון אחד במעוין גדול פי 4 מהאלכסון השני. על אלכסון זה בנו מלבן כמתואר בשרטוט (מוצלל), שהיקפו 80 ס"מ. חשב את שטח המעוין.

## ב. מעלה שניה

71. ילדי כיתה התחייבו לתרום 330 ש"ח לליביי. ביום שאספו את הכסף, היו שלוש ילדים חולים ולכן הוסיף כל אחד 1 ש"ח. כמה תרם כל אחד?
72. דיירי בנין החליטו לשפץ את חדר הכניסה בעלות כוללת של 31,500 ש"ח. אחד הדיירים מכר באותה תקופה את דירתו ולכן היה על כל דייר לשלם תוספת של 150 ש"ח. כמה דיירים יש בבניין?
73. במועדון קשישים מרכיבה כל קבוצה 80 פריטים ביום. כאשר הצטרף קשיש נוסף לאחת הקבוצות היה על כל אחד מהם להרכיב ב- 4 פריטים פחות. כמה קשישים היו בקבוצה?
74. עלות מסיבה רבת משתתפים היא 10,000 ש"ח. אם מספר הבאים למסיבה יעלה ב- 100, תקטן העלות של כל אחד ב- 5 ש"ח. מה מספר המשתתפים המתוכנן?
75. עלות ההסעה לקבוצת מטיילים היתה 360 ש"ח. ברגע האחרון ביטלו 3 מהמטיילים את השתתפותם ולכן היה על כל מטייל שמתתף להוסיף 10 ש"ח. כמה מטיילים היו מתוכננים להשתתף?

76. ילד קנה גולות צבעוניות ב- 40 ש"ח. למחרת קנה חברו באותו סכום גולות שקופות שמחיר כל אחת קטן ב- 40 אג' מגולה צבעונית. לכן הוא קנה ב- 5 גולות יותר. כמה גולות צבעוניות נקנו?
77. מתפרה תכננה לרכוש מלאי בדים בסכום של 6,000 ש"ח. היות שהבד האופנתי התייקר ב- 6 ש"ח למי, רכשה המתפרה 50 מ' פחות. כמה מ' בד נקנו?
78. מתנ"ס רכש גופי תאורה משני סוגים: סוג אחד לחדרי הפעילות ועבורם שילם 2,200 ש"ח. סוג אחר למסדרונות ועבורם שילם 1,440 ש"ח. מחיר גוף תאורה לחדרים יקר ב- 30 ש"ח ממחיר גוף תאורה למסדרון. מספר גופי התאורה לחדרים היה גדול ב- 2 ממספרם במסדרון. מה מחיר גוף תאורה לחדר?
79. העירייה ריצפה רחוב ראשי בשני סוגי ריצוף. אספלט - בכביש בעלות כוללת של 12,000 ש"ח. לבנים - במדרכה, בעלות כוללת של 14,000 ש"ח. עלות הריצוף של 1 מ"ר כביש קטן ב- 30 ש"ח מעלות הריצוף של 1 מ"ר מדרכה. שטח הכביש גדול ב- 100 מ"ר משטח המדרכה. מה עלות ריצוף של 1 מ"ר אספלט?
80. חנות קנתה משקפי שמש בסכום כולל של 720 ש"ח. במהלך המשלוח נשברו 4 זוגות משקפיים והיתר נמכרו במחיר כולל של 1,040 ש"ח והחנות הרוויחה 16 ש"ח לזוג משקפיים. בכמה מכרה החנות כל זוג משקפיים?
81. ירקן קנה קופסאות תות שדה ב- 320 ש"ח. 5 מהקופסאות נרקבו ואת יתר הקופסאות מכר ברווח של 6 ש"ח לקופסה. הסכום שקיבל ממכירת הקופסאות היה 490 ש"ח. כמה קופסאות קנה הירקן?
82. בעל חנות בגדים קנה מלאי של חולצות לילדים בסכום של 630 ש"ח. 10 מהחולצות הוכתמו ואת היתר הוא מכר ברווח של 8 ש"ח לחולצה. כך הוא קיבל עבור החולצות 770 ש"ח. בכמה מכר כל חולצה?
83. נער קנה במשתלה זרי פרחים בעלות של 120 ש"ח. 3 מהזרים נבלו ואת היתר הוא מכר ב- 170 ש"ח. כך הרוויח 4 ש"ח על כל זר שמכר. כמה זרים קנה הנער?
84. בעל חנות צעצועים רכש בובות במחיר 450 ש"ח. לאור הביקוש הוא מכר גם את 3 הבובות שקיבל כדוגמה וקיבל על כולן 660 ש"ח. כך הוא הרוויח 5 ש"ח על כל בובה. כמה בובות מכר?
85. בכתה אחת נסעו להצגה 12 תלמידים יותר מאשר בכתה אחרת. הכתה הראשונה שלמה עבור ההסעה באוטובוס 403 ש"ח והכתה השניה שלמה עבור הסעה במיניבוס 342 ש"ח, כך שכל תלמיד מהכתה השניה שילם ב- 5 ש"ח יותר מאשר תלמיד בכתה הראשונה. כמה שילם כל תלמיד?
86. סוחר קנה מכשירי טלוויזיה בסכום של 6,300 ש"ח. במהלך פריצה נגנבו 3 מכשירים. הסוחר מכר את המכשירים שנותרו ברווח של 175 ש"ח על כל אחד ועיי כך הצליח להחזיר לעצמו את העלות שלהם. מה מחיר העלות של כל מכשיר?

87. קבוצת תלמידים החליטה להכין משלוח מנות לפורים ל- 96 ילדי שכונה נחשלת. 4 מהתלמידים לא יכלו להשתתף בהכנה ולכן הכין כל אחד מהתלמידים האחרים בשתי מנות יותר מהמתוכנן, כדי שכל ילד יקבל מנה לפורים. כמה תלמידים היו בקבוצה תחילה?
88. בתחנת דלק מספיקים לרחוץ בימי שישי או בערבי חג 135 מכוניות. לקראת ערב ראש השנה הוסיפה התחנה שלושה עובדים זמניים וכל אחד מהעובדים (כולל הזמניים) רחץ מכונית אחת יותר, וכך נרחצו מספר מכוניות הגדול ב-  $\frac{1}{3}$  מהמספר הרגיל. כמה מכוניות רחץ כל עובד בערב ראה"ש?
89. שני צבעים ניגשו למכרז לצביעת 432 דלתות של בנין רב קומות, כאשר התנאי הוא שהעבודה צריכה להסתיים תוך 25 ימים. אם שניהם יעמדו בתנאי זה תיעשה הגרלה ביניהם. הצבע הראשון צובע בשתי דלתות פחות ביום מהשני, לכן עבודתו נמשכת בשלושה ימים יותר מאשר עבודתו של השני. האם נערכה הגרלה?
90. נגריה אחת יצרה 216 כסאות. נגריה שניה יצרה 224 כסאות. מספר הכסאות שיצרה הנגריה הראשונה בשבוע גדול ב- 16 ממספר הכסאות שיצרה הנגריה השנייה לשבוע. לכן, הראשונה סיימה את היצור שבוע אחד לפני השנייה. כמה שבועות ארך היצור לנגריה השנייה?
91. פועלת בודקת תקינות מוצרים באמצעות מדגם של 270 פריטים. יום אחד היתה חולה ולכן בדקה בשני פריטים פחות לשעה ועבדה שעה אחת פחות מאשר בדרך כלל. היא הספיקה לבדוק מדגם של 224 פריטים. כמה מוצרים לשעה בדקה הפועלת בהיותה חולה?
92. תייר תכנן להוציא על כלכלה בטיול 900 ש"י. אך התייר האריך את הטיול ב- 5 ימים, והוציא בכל יום ב- 4 ש"י יותר מהמתוכנן. לכן עלתה לו הכלכלה ב- 300 ש"י יותר משתכנן. כמה ימים ארך הטיול?
93. סוחר קנה שעוני קיר בסכום כולל של 7,200 ש"ח ומכר חלק מהם ברווח של 40 ש"ח לשעון. את 6 השעונים הנותרים לא הצליח למכור, אך המכירה שעשה כיסתה את ההוצאות. כמה שעונים מכר?
94. חנות קנתה פוסטרים בסכום של 3,600 ש"ח. בגלל הצפה נהרסו 10 פוסטרים לחלוטין, 20 הוכתמו קלות והוא מכר אותם בהפסד של 10 ש"י לאחד ואת השאר מכר ברווח של 15 ש"ח לאחד. בסה"כ הרוויח מהמכירה 300 ש"ח. כמה פוסטרים קנה?
95. ירקן קנה אבטיחים ב- 500 ש"ח. שישה אבטיחים היו רקובים, ולכן זרק אותם. שמונה אחרים נפגעו בהובלה, לכן מכר אותם בחצי ממחיר הקניה. את הנותרים מכר ברווח של 5 ש"ח לאבטיח. בסה"כ הרוויח 80 ש"ח על כל האבטיחים. בכמה מכר כל אבטיח פגום?

96. יבואן רכש משחקים בעלי אותו עקרון המופיע בצבעים שונים, ושילם על כל המשחקים 432 ש"ח. המשחקים בצבעים סגול-כחול נמכרו עם רווח של 8 ש"ח למשחק. חמשת המשחקים בצבעים צהוב-ורוד נמכרו רק אחרי שהוריד את המחיר ב- 2 ש"ח למשחק. ביחס למחיר עלות. שני המשחקים בצבע שחור-לבן לא נמכרו כלל. בסיכום קיבל היבואן מכל המכירה 550 ש"ח. כמה משחקים נמכרו ברווח?

97. יבואן קנה מלאי מכנסי ג'ינס בסכום של 5,000 ש"ח. שני זוגות הוא שם בתצוגה. 86 זוגות הוא מכר ברווח של 20 ש"ח כ"א, ואילו את הנותרים הוא מכר בהפסד של 10 ש"ח כ"א. בסה"כ קיבל מהמכירה 6,500 ש"ח. כמה זוגות מכנסיים קנה היבואן?

98\*. אדם שיצא מהארץ בחברת תעופה מסויימת שילם 600 ש"ח על משקל יתר שמעל ל- 20 ק"ג (הפטורים מתשלום). ואז הסתבר לו שבחברת טיסה מתחרה היה משלם רק 500 ש"ח. בחברה המתחרה המשקל הפטור מקנס הוא 25 ק"ג והקנס על כל ק"ג מעל משקל זה גדול ב- 10 ש"ח מאשר בחברה הראשונה. מה היה משקל המטען של הנוסע?

99. אדם שנושא מטען של 40 ק"ג משלם בחברת תעופה אחת 200 ש"ח על מטען עודף ובחברה אחרת 150 ש"ח. המטען המקסימלי הפטור מתשלום בחברה השנייה גדול בפי 1.5 מזה שב הראשונה והתשלום לכל ק"ג נוסף בשניה גדול ב- 5 ש"ח מהמחיר הראשונה. מה המשקל הפטור מתשלום בחברה הראשונה?

100\*. היקף הגלגל האחורי של רכב עבודה גדול ב- 1.5 מ' מהיקף הגלגל הקדמי. לאורך מרחק של 300 מ' עושה הגלגל האחורי ב- 100 סיבובים פחות מהאחורי. חשב את היקף הגלגל האחורי.

### בעיות בהנדסה

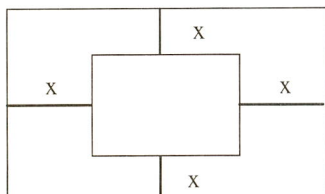
101. צלע אחת שלמלבן גדולה פי 2 מהשניה. שטח המלבן 50 סמ"ר. חשב את היקפו.

102. אם יגדילו צלע אחת של ריבוע ב- 7 ס"מ, ואת הצלע השניה יקטינו ב- 1 ס"מ, יתקבל מלבן ששטחו קטן ב- 23 מכפליים שטח הריבוע. חשב את צלע הריבוע.

103. אם מגדילים צלע אחת של ריבוע ב- 5 ס"מ ואת הצלע השניה מקטינים ב- 2 ס"מ. יגדל שטחו פי  $1\frac{1}{5}$ . חשב את צלע הריבוע.

104. צלע של משולש גדולה ב- 2 ס"מ מהגובה שלה. שטח המשולש 12 סמ"ר. חשב את אורך הגובה.

105. השוק של משולש שווה שוקיים שווה ל- 13 ס"מ. הבסיס קטן מהגובה שעליו ב- 2 ס"מ. חשב את שטח המשולש.

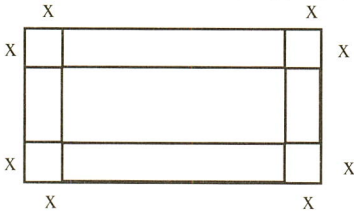


106. במגרש מלבני, שממדיו 10 מ', 16 מ', הקציבו פס ברוחב שווה מסביבו לפרחים,

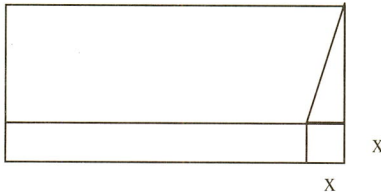
ואת החלק הפנימי, ששטחו 112 מ"ר  
לדשא. מה רוחב פס הפרחים?

107. במגרש מלבני ששטחו 280 מ"ר, רצפו מלבן פנימי, ששטחו 180 מ"ר ובשטח  
מסביב שתלו דשא. רוחב הדשא בשני פסי אורך יחד הוא 4 מ' ובשני פסי רוחב  
יחד - 2 מ'. מהם ממדי המגרש?

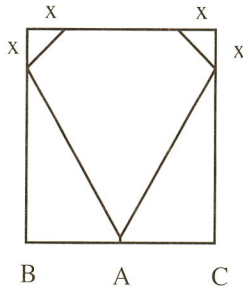
108. אדם מסגר תמונה, ששטחה 1.2 מ"ר במסגרת ברוחב 20 ס"מ, ועי"י כך גדל  
שטח התמונה ב- 0.5 מ"ר. חשב את ממדי התמונה ללא המסגרת.



109. בשטיח, שאורכו 3 מ' ורוחבו 2 מ'  
שני צבעים. הבהיר (בציור) - אפור  
והמוצלל חום. חשב את ערכו של  $x$ ,  
אם השטח החום שווה ל- 2 מ"ר.



110\*. אורך המלבן שבציור, 8 מ'.  
רוחבו - 6 מ'. חשב את רוחק  
הנקודה A מצלעות המלבן  
(ראה שרטוט), אם שטח  
החלק הכהה 10.5 מ'.



111\*. ממדי המלבן שבשרטוט  
הם 10 ס"מ, 6 ס"מ.  
חשב את  $x$ , אם השטח  
הכהה שווה 32 סמ"ר  
ואם  $AC=AB$ .

### תשובות.

1. 5,6 תי 2. 2 שי 3. 9,7 4. 19,120 עי 5. 5 מ' 6. 55 מ' 7. 25 שיח 8. 4 שיח
9. 22 מ' 10. 3 מ' 11. 51 ק"ג 12. 45 ח' 13. 50 שיח 14. 0.75 מ' 15. 20,25 ק"ג
16. 116 שיח 17. לא 18. א. אין פתרון ב. 6 שיח 19. אין פתרון 20. א. 32 ס"מ
- ב. לא מוגדר 21. א. 24 מ' ב. 101 מ' 22. 40 מ' 23. 2 שי 24. 32 מ' 25. 570 עי
26. 1 כי 27. 3 פי 28. 24 תי 29. 280 שיח 30. 1800 שיח 31. 300 שיח 32. 252 מ'
33. 770 שיח 34. 14,000 שיח 35. 30 שיח 36. 650 ח', 18 פי 37. 70 יי 38. 6 תי
39. א. 42 ח' ב. 10 ח' 40. 20 מ' 41. 1 שיח

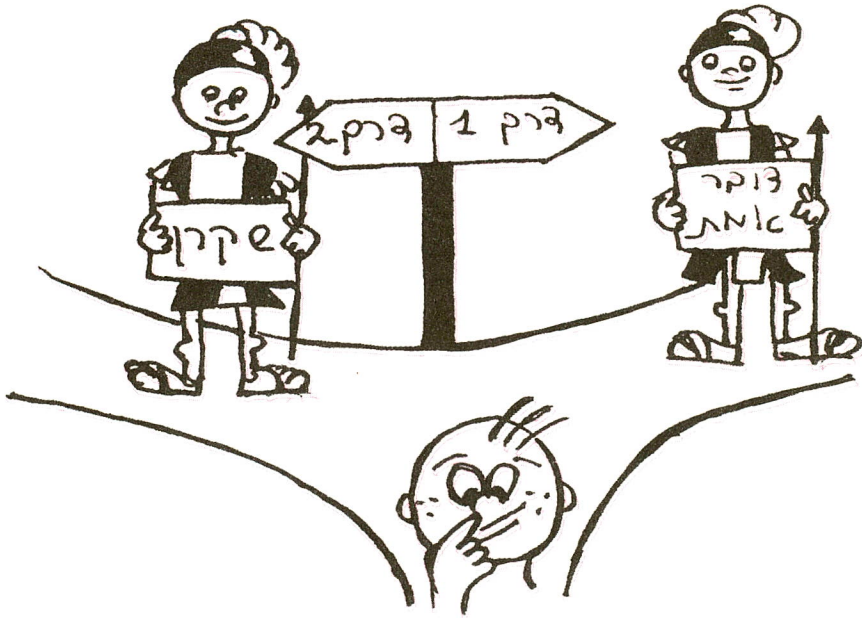
42. 2 43. 9 ס"מ 44. 26 ס"מ, 42 סמ"ר 45. 12 ס"מ, 8 סמ"ר 46. 16 ס"מ, 16
- סמ"ר 47. 24 ס"מ, 36 סמ"ר 48. 40 ס"מ, 45 סמ"ר 49. 3 ס"מ 50. 4 ס"מ 51.
- מ 52. 3 מ' 53. 0.25 מ', 0.5 מ' 54. 2 מ' 55. 10 ס"מ 56. 8 ס"מ 57. 24 ס"מ,

40 סמ"ר 4.58 ס"מ 59.12, 20, 28 ס"מ 7.60 ס"מ, 61.6 א. 6 ס"מ ב. 4.2 ס"מ,  
 2.8 ס"מ 5.62 ס"מ 63.24.5 סמ"ר 7.64 ס"מ, 5 ס"מ 65.א. 3 ס"מ ב. 5 ס"מ  
 66.א. 7 ס"מ ב. 6 ס"מ 67.30 סמ"ר 60.68 סמ"ר 36.69 ס"מ 64.70 סמ"ר

71.11 ש"ח 15.72 די 4.73 קי 400.74 מי 12.75 מי 20.76 גי 200.77 מי  
 78.110 ש"ח 40.79 ש"ח 40.80 ש"ח 40.81 קי 22.82 ש"ח 20.83 זי 33.84 ב'  
 85.13,18 ש"ח 525.86 ש"ח 16.87 תי 10.88 או 6.89 לא 4.90 שי 28.91 מי  
 92.30 או 50 יי 30.93 שי 90.94 פי 5.95 שי 20.96 מי 100.97 מי 35.98  
 99.20 ק"ג 3.100 מי 30.101 ס"מ 8.102 ס"מ 5.103 ס"מ, 10 ס"מ 4.104  
 ס"מ 60.105 סמ"ר 1.106 מי 14.107 מי 20 מי 1.5.108 ס"מ, 0.8 ס"מ  
 109.0.25 מי 1.110 מי 1.111 ס"מ או 2 ס"מ

### חידה

יורט נמצא על פרשת דרכים. בכיוון אחד, מופיאה הדרכ  
 לאן צדן, ובכיוון השני - אזהינוט. הכניסה לכל שפיה נמצא  
 אדם, שאחד מהם דובר אמת והשני דובר שקר. יורט אינו  
 יודע, לא לאן מופיאה כל שפיה, ולא מי דובר אמת ומי דובר  
 שקר. יורט יכול לשאול רק שאפה אחת את אחד מהאנשים,  
 כדי לדעת אינו היא הדרכ לאן הצדן. אינו שאפה ישאל ואת  
 מי?



תשובה. עליו לשאול "האם זו הדרך לגן העדן". לא משנה את מי ישאל. בשני המקרים יקבל תשובה שקרית.

## סעיף 4 - בעיות עם מספרים (תשובות בעמוד 281)

### א. מעלה ראשונה

1. סכום שני מספרים 36, היחס בין המספרים 5:4, חשב את המספרים.
2. מספר אחד גדול ממספר שני ב-14. היחס בין המספרים 4:3, חשב את המספרים.
3. סכום שני מספרים 42. כאשר מחלקים אחד בשני מתקבלת המנה 5. מהם המספרים?
4. מספר אחד מתייחס למספר שני כמו 3:2, המספר השני קטן ב-24 מכפליים המספר הראשון. חשב את המספרים.
5. שני מספרים מתייחסים כמו 3:2, אם נוסיף למספר הקטן 9, ומהגדול נחסיר 4, נקבל מספרים שווים. מהם המספרים?
6. שני מספרים מתייחסים זה לזה כמו 5:3, אם נוסיף לראשון 6, ולשני 3, יתייחסו המספרים כמו 6:5. מהם המספרים?
7. היחס בין שני מספרים הוא כמו 2:1, אם נוסיף 3 למספר הקטן, ונחסיר 4 מהגדול, יהיה היחס ביניהם (באותו סדר) כמו 3:2. מצא את המספרים.
8. כאשר מחלקים מספר מסוים ל-5, מתקבלת מנה 4 ושארית 2. מהו המספר?
9. כאשר מחלקים מספר במספר קטן ממנו ב-13, מתקבלת מנה 2, ושארית 4. מהו המספר?
10. סכומם של שני מספרים 25, כאשר מחלקים אחד מהם בשני, מתקבלת מנה 11 ושארית 1. מהם המספרים?
11. סכום שני מספרים 43, כאשר מחלקים אחד באחר, מתקבלת מנה 7 ושארית קטנה ב-2 מהמחלק. מהם המספרים?
12. סכום שלשה מספרים 22. היחס בין הראשון לשני 4:1. היחס בין השני לשלישי 3:2. מהם המספרים?
13. מספר א' גדול ב-1 ממספר ב' וקטן ב-2 ממספר ג'. היחס בין מספר א' ל-ג' כמו היחס בין מספר ב' ל-א'. מהם המספרים?
14. מספר אחד קטן ב-6 ממספר שני וב-24 ממספר שלישי. היחס בין המספר הראשון לשני, כמו היחס בין השני לשלישי. מהם המספרים?
15. סכום שלושה מספרים עוקבים 57. מהם המספרים?

16. סכום שלשה מספרים זוגיים עוקבים שווה 96. מהם המספרים?
17. סכום שלושה מספרים אי זוגיים עוקבים - 45. מהו המספר הראשון?
18. נתונים 4 מספרים עוקבים. מכפלת המספר הראשון בשלישי קטנה ב- 13 ממכפלת השני ברביעי. מהו המספר הראשון?
19. ספרת העשרות במספר דו-ספרתי גדולה פי 2 מספרת האחדות. אם נוסיף למספר את סכום ספרותיו נקבל 72. מהו המספר.
20. ספרת העשרות של מספר דו ספרתי גדולה פי 2 מספרת האחדות. מספר דו-ספרתי אחר, שספרת עשרותיו שווה לסכום ספרות המספר הנתון וספרת אחדותיו שווה להפרשן, גדול ב- 30 מהמספר הנתון. מצא את המספר הנתון.
21. ספרת העשרות במספר דו-ספרתי קטנה ב- 5 מספרת האחדות. כאשר מחלקים את המספר לסכום ספרותיו מתקבלת מנה 3. מהו המספר?
22. כאשר מחלקים מספר דו-ספרתי, שספרת עשרותיו גדולה ב- 1 מספרת אחדותיו, לסכום הספרות, מתקבלת מנה 6 ושארית 2. מהו המספר?
23. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי היא 7, המספר גדול פי 15 מספרת האחדות שלו. מהו המספר?
24. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי היא 8. המספר גדול פי 12 מספרת העשרות שלו. מהו המספר?
25. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי היא 4, המספר גדול פי 5 מסכום ספרותיו. מהו המספר?
26. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי היא 6. המספר גדול פי 4 מסכום ספרותיו. מהו המספר?
27. ספרת האחדות במספר דו-ספרתי היא 3, המספר גדול ב- 27 מסכום ספרותיו. מהו המספר?
28. ספרת העשרות במספר דו-ספרתי קטנה ב- 1 מספרת האחדות, המספר גדול פי 6 מספרת האחדות. מהו המספר?
29. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי גדולה ב- 2 מספרת העשרות. המספר גדול פי 7 מספרת האחדות. מהו המספר?
30. ספרת העשרות במספר דו-ספרתי גדולה ב- 3 מספרת האחדות, אם נחבר למספר את המספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך, נקבל 165. מהו המספר?
31. ספרת האחדות במספר דו-ספרתי קטנה ב- 5 מספרת העשרות. אם נחבר לו את המספר הכתוב בסדר הפוך נקבל 143. מהו המספר?

32. נתונים ארבעה מספרים חד-ספרתיים עוקבים. שני המספרים הראשונים יצרו מספר דו-ספרתי אחד ושני המספרים האחרונים יצרו מספר דו-ספרתי שני. בכל אחד מהמספרים הללו, ספרת העשרות קטנה מספרת האחדות. המספר הדו-ספרתי השני קטן ב-1 מכפליים המספר הדו-ספרתי הראשון. מהם המספרים הדו-ספרתיים?
33. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי גדולה פי 1.5 מספרת העשרות. כאשר מחלקים את המספר בסכום ספרותיו מתקבלת מנה 4 ושארית 3. מהו המספר?
34. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי מהווה  $\frac{1}{3}$  מספרת העשרות. כאשר מחלקים מספר זה במספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך מתקבלת מנה 2 ושארית 5. מהו המספר?
35. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי מהווה  $\frac{2}{3}$  מספרת האחדות. אם נחלק את המספר הכתוב בסדר הפוך במספר הנתון, נקבל מנה 1 ושארית 18. מהו המספר?
36. ספרת המאות של מספר תלת ספרתי קטנה פי 2 מספרת העשרות וגדולה ב-2 מספרת האחדות. אם נחסר מהמספר את סכום ספרותיו נקבל 351. מהו המספר?
37. הספרות של מספר תלת ספרתי הם שלושה מספרים עוקבים, אם נחבר למספר את המספר הכתוב בסדר הפוך נקבל 1110. מהו המספר?
38. ספרת האחדות של מספר תלת ספרתי היא 5, ושתי הספרות האחרות הם שני מספרים זוגיים עוקבים (ספרת המאות גדולה מספרת העשרות). אם נחבר למספר את סכום ספרותיו, נקבל 436. מהו המספר?
39. לכל אחד מהמספרים הבאים הוסיפו את הספרה 3 משמאל למספר. כתוב את המספר המתקבל: א. 5, ב. 27, ג. A (חד ספרתי), ד. B (דו ספרתי) ה. C מספר תלת-ספרתי, ו. מספר דו-ספרתי בעל M עשרות ו-N אחדות.
40. לכל אחד מהמספרים שבשאלה הקודמת רשמו את הספרה 2 מימין למספר הנתון. רשום את המספר המתקבל.
41. א. למספר דו ספרתי  $10A+B$ , הוסיפו את הספרה 5, פעם מימין פעם בין שתי ספרותיו, ופעם משמאל. רשום ביטויים למספרים המתקבלים.  
ב. כנ"ל, כאשר מוסיפים את הספרה 0.
42. ספרת העשרות במספר דו ספרתי גדולה ב-2 מספרת האחדות. למספר זה רשמו משמאל את הספרה 1 והתקבל מספר תלת ספרתי שגדול פי 40 מסכום ספרותיו (של המספר התלת-ספרתי), מהו המספר הנתון?
43. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי קטנה ב-5 מספרת האחדות. כאשר רושמים את הספרה 2 משמאל למספר זה מתקבל מספר תלת ספרתי שבחילוק במספר הנתון נותן מנה 13 ושארית 8. מצא את המספר.

44. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי גדולה פי 2 מספרת העשרות. מימין למספר זה נרשמת הספרה 7. מתקבל מספר תלת-ספרתי, שגדול פי 19 מסכום ספרותיו. מהו המספר?

45. ספרת האחדות במספר דו-ספרתי גדולה ב-2 מספרת העשרות, כאשר מכניסים את הספרה-2 בין ספרותיו מתקבל מספר תלת-ספרתי. בחילוק המספר החדש במספר נתון מתקבלת מנה 9 ושארית 10. מהו המספר?

46. ספרת האחדות במספר דו-ספרתי גדולה ב-4 מספרת העשרות. כאשר מכניסים בין ספרות מספר זה את הספרה 0 מתקבל מספר תלת-ספרתי הגדול פי 7 מהמספר המקורי. מהו המספר הנתון?

47. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי גדולה פי 3 מספרת העשרות. אם רושמים משמאל למספר ספרה השווה לספרת האחדות מתקבל מספר תלת-ספרתי, שבחילוקו במספר הנתון נותן מנה 24 ושארית 3. מהו המספר הדו-ספרתי?

48. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי גדולה פי 1.5 מספרת האחדות. אם רושמים מימין למספר זה מספר הקטן ב-2 מספרת האחדות של המספר הנתון, מתקבל מספר תלת-ספרתי שחילוקו בסכום 3 ספרותיו, נותן מנה 53 ושארית 6. מהו המספר הדו-ספרתי?

49. הספרות של מספר תלת ספרתי הם שלשה מספרים אי-זוגיים עוקבים יורדים (משמאל לימין). כאשר שמים את ספרת האחדות לפני ספרת המאות מתקבל מספר תלת-ספרתי חדש. חילוק המספר הראשון בשני נותן מנה 2 ושארית 3. מהו המספר הנתון?

50. ספרותיו של מספר תלת-ספרתי הם שלושה מספרים עוקבים(ספרת האחדות היא הקטנה ביותר). במספר זה מחקו את ספרת העשרות והתקבל מספר דו-ספרתי. חילוק המספר התלת-ספרתי במספר הדו-ספרתי נותן מנה 10 ושארית 17. מהו המספר התלת ספרתי?

51. מספר תלת-ספרתי שספרת האחדות שלו - 2 גדול פי 68 מסכום ספרותיו. אם נשמיט ממנו את ספרת האחדות מתקבל מספר דו-ספרתי הקטן ב-2 ממכפלת סכום הספרות של המספר התלת-ספרתי הנתון ב-7. מהו המספר התלת-ספרתי?

52. ספרת המאות של מספר תלת-ספרתי הוא 3. אם נשמיט ממנו את הספרה 3 מתקבל מספר דו-ספרתי הקטן פי 26 המספר הראשון. מהו המספר התלת-ספרתי?

53. ספרת האחדות במספר תלת-ספרתי היא 9. אם נשמיט את ספרת האחדות, מתקבל מספר דו-ספרתי, הקטן פי 10.25 מהמספר הראשון. חשב את המספר המתקבל.

54. אם מעבירים את ספרת האחדות של מספר תלת-ספרתי שהיא 5, לפני ספרת המאות, מתקבל מספר תלת-ספרתי חדש קטן מהקודם ב- 63. מהו המספר המתקבל?

\*55 נתונים שני מספרים תלת-ספרתיים. ספרת האחדות של המספר הראשון שווה לספרת המאות של המספר השני ושתייהן שוות ל- 9. מנת שני המספרים 2. במספרים הללו עושים שינויים: בראשון מעבירים את ספרת האחדות לפני תחילת המספר ובשני מעבירים את ספרת המאות לסוף, ואז מתקבלים שני מספרים, שהראשון גדול פי 5 מהשני. חשב את מספרים הנתונים.

\*56 נתונים שני מספרים דו-ספרתיים א' ו- ב'. כאשר רושמים את א' משמאל ל- ב' מתקבל מספר בעל 4 ספרות הגדול פי 102 ממספר א' וכאשר רושמים א' מימין ל- ב', מתקבל מספר שכאשר מחלקים אותו למספר ב' מתקבלת מנה 100 ושארית 36. מהם המספרים?

57. מספר דו ספרתי גדול ב- 18 מהמספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך. אם נגדיל את המספר הדו ספרתי ב- 20% נקבל מספר הגדול פי 7.5 מסכום ספרות המספר הראשון. מהו המספר?

58. אם מחלקים מספר דו ספרתי בסכום ספרותיו, מתקבלת מנה 8 ושארית 4. אם מקטינים את המספר ב- 25%, ומחלקים את המספר החדש בהפרש בין ספרת העשרות וספרת האחדות של המספר הנתון, מתקבלת מנה 9 ושארית 6. מהו המספר?

## ב. מעלה שניה

59. מספר אחד קטן ממספר שני ב- 3 וקטן ב- 2 מכפליים ממספר שלישי. חשב את המספרים, אם ידוע שהיחס בין המספר השני לראשון שווה ליחס בין הראשון לשלישי.

60. כאשר מחלקים את 33 למספר מסוים שלם, מתקבלת מנה קטנה ב- 1 מהמחלק והשארית השווה למחצית המחלק. מהו המספר?

61. כאשר מחלקים את 27 למספר מסוים חיובי, מתקבל מנה השווה למחלק ושארית הקטנה ב- 3 ממנו. מהו המספר?

62. כאשר מחלקים מספר אחד במספר חיובי הקטן ממנו ב- 5, מתקבלת מנה השווה למחצית המחלק ושארית הקטנה ב- 3 מהמחלק. מהו המספר?

63. מכפלת שני מספרים 54. אם נחלק מספר הגדול ב- 8 מאחד המספרים, במספר הקטן ב- 4 מהשני, מתקבלת מנה 2 ושארית הקטנה ב- 1 מהמחלק. מהם המספרים?

64. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי גדולה פי 4 מספרת האחדות. מכפלת המספר בסכום ספרותיו 820. חשב את המספר?

65. מספר דו-ספרתי גדול פי 2 ממכפלת ספרותיו. חשב את המספר אם ספרת האחדות הגדולה ב- 3 מספרת העשרות.

66. ספרת האחדות של מספר דו-ספרתי קטנה ב- 3 מספרת העשרות. אם נכפיל את המספר במספר הכתוב בסדר הפוך נקבל 574. מהו המספר?

67 מספר דו-ספרתי גדול פי 5 מסכום ספרותיו. מכפלת ספרותיו גדולה ב- 11 מסכומן. מהו המספר?

68. מספר דו-ספרתי גדול פי 7 מסכום ספרותיו. אם נשנה בו את סדר הספרות נקבל מספר שגדול פי 2 ממכפלת ספרותיו. מצא את המספר.

69. אם נחסיר ממספר דו-ספרתי את מכפלת ספרותיו, נקבל 17. אם מחלקים את מכפלת הספרות בסכומן, מתקבלת מנה 4 ושארית 4. מהו המספר?

70. מספר דו-ספרתי גדול פי 4 מסכום הספרות. אם מחלקים את המספר למכפלת ספרותיו, מתקבלת מנה 1 ושארית השווה למחצית המחלק. מהו המספר?

71. אשר מחלקים מספר דו-ספרתי בסכום ספרותיו מתקבלת מנה הגדולה ב- 1 מהמחלק ושארית 2. חשב מהו המספר אם ספרת העשרות גדולה ב- 1 מספרת האחדות.

72. מכפלת הספרות של מספר דו-ספרתי גדולה ב- 3 ממכפלת סכום הספרות ב- 3. כאשר מחלקים את המספר בסכום ספרותיו מתקבלת מנה 5 ושארית הקטנה ב- 2 מהמחלק. מהו המספר?

73. ספרותיו של מספר תלת-ספרתי הן מספרים עוקבים (ספרת המאות - קטנה ביותר). מכפלת מספר זה בסכום ספרותיו, שווה ל- 738. מהו המספר?

74. ספרת האחדות במספר דו-ספרתי גדולה פי 2 מספרת העשרות. למספר זה רושמים את הספרה 1 פעם משמאלו ופעם מימינו. מכפלת שני המספרים התלת-ספרתיים המתקבלים שווה ל- 13,552. מהו המספר הדו-ספרתי?

75. מכפלת הספרות של מספר דו-ספרתי שווה 24. למספר זה רושמים פעם מצד ימין ספרה השווה לספרת האחדות ופעם מצד שמאל ספרה השווה לספרת העשרות ומתקבלים שני מספרים תלת-ספרתיים, שסכומם 726. מהו המספר הראשון?

76. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי שווה לספרת האחדות. כאשר מכניסים בין ספרות מספר זה ספרה גדולה ב- 1 מכל אחת מספרות המספר הנתון, מתקבל מספר השווה לריבוע המספר הנתון. מהו המספר?

77. נתון מספר תלת-ספרתי, שספרת האחדות שלו 5. אם נמחק ספרה זו, מתקבל מספר דו-ספרתי שמכפלתו במספר התלת-ספרתי הנתון שווה ל- 4100. מהו המספר?

78. מספר דו ספרתי גדול פי 4 מסכום ספרותיו. אם נכפיל את המספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך, בהפרש בין ספרת האחדות לספרת העשרות של המספר הנתון, נקבל 84. מהו המספר?

\*79 מספר אחד גדול ממספר שני ב- 5. כאשר הכפילו את שני המספרים זה בזה, נפלה טעות בספרת העשרות: במקום הספרה הנכונה, נרשמה ספרה הגדולה ממנה ב- 6 וכך התקבל מספר הגדול פי 22 מהמספר הקטן. חשב את המכפלה הנכונה.

\*80 מספר אחד קטן ב- 2 ממספר שני. במכפלתם נפלה טעות: נרשמה ספרת עשרות קטנה ב- 8 מהספרה הנכונה. המספר שהתקבל גדול פי 13 מהמספר הקטן (מבין השניים שבהתחלה). מהם המספרים?

### תשובות:

1. 16,20 2. 56,42 3. 35,7 4. 48,72 5. 26,39 6. 9,15 7. 17,34 8. 22 9. 22  
10. 2,23 11. 38,5 12. 2,8,12 13. 2,1,4 14. 3,9,27 15. 18,19,20 16. 30,32,34  
17. 13 18. 5 19. 63 20. 63 21. 27 22. 32 23. 75 24. 48 25. 45 26. 36  
27. 33 28. 12 29. 35 30. 96 31. 94 32. 23,45 33. 23 34. 31 35. 46 36. 361  
37. 456 38. 425

39. א. 35, ב. 327, ג.  $30+A$ , ד.  $300+B$ , ה.  $3000+C$ , ו.  $300+10M+N$   
40. א. 52, ב. 272, ג.  $10A+2$ , ד.  $10B+2$ , ה.  $10C+2$ , ו.  $100M+10N+2$   
41. א.  $100A+10B+5$ ,  $100A+50+B$ ,  $500+10A+B$   
ב.  $100A+10B$ ,  $100A+B$ ,  $10A+B$

42. 20 43. 16 44. 24 45. 35 46. 15 47. 39 48. 64 49. 753 50. 987 51. 612  
52. 312 53. 36 54. 562 55. 459, 918 56. 36,72 57. 75, 58. 92  
59. -1, 2, 0.5 או 9, 6, 4 60. 5 61. 6 62. 9 63. 6,9 או -27, -2 64. 82 65.  
36 66. 41 67. 45 68. 63 69. 89 70. 48 71. 32 72. 76 73. 123 74. 12 75.  
38 76. 11 77. 205 78. 24 79. 204, 50 80. 16,18

**חידה**  
**מה המספר הגדול ביותר שאפשר לכתוב בצורת 4 ספרות**  
**fe ?1**

תשובה: 11<sup>11</sup>

## סעיף 5 - בעיות תערובות (תשובות בעמוד 291)

### א. מעלה ראשונה

#### אחוזים

- נתון מספר 40. חשב את הערך המספר:
  - המהווה 20% ממנו.
  - הגדול ממנו ב- 20%.
  - הקטן ממנו ב- 20%.
- נתון מספר a. מצא מספר:
  - המהווה 30% ממנו.
  - המהווה b% ממנו.
  - הגדול ממנו ב- 45%.
  - הקטן ממנו ב- 30%.
- מצא מספר, אשר:
  - 35 הוא 25% ממנו.
  - 40 הוא 20% ממנו.
  - 80 הוא 100% ממנו.
  - 100 הוא 125% ממנו.
- אורך מוט קצר מהווה 50% ממוט ארוך. עמוד שאורכו 9 מ' מכיל 5 מוטות קצרים ושניים ארוכים. מה אורך המוט הקצר?
- למיכל ב- 30% בולים יותר מאשר לאחותה מיטל. לשתיהן ביחד יש 184 בולים. כמה בולים יש למיטל?
- גיל חסך מדמי הכיס שלו סכום הקטן ב- 20% מהסכום שחסך יואב. בדמי הכיס שלהם הם קנו לחברם מתנה, שעלתה 45 ש"ח. כמה חסך גיל מדמי הכיס?
- דני ורמי השקיעו ביחד בעסק 47,000 ש"ח. דני השקיע ב- 35% יותר מרמי. כמה השקיע דני?
- שטח דירה 86 מ"ר. שטחו של חדר אחד גדול ב- 15% משטחו של חדר שני, ושניהם ביחד מהווים 60% משטח הדירה. חשב את שטחי החדרים.
- אדם קיבל משכורת של 5,400 ש"ח שכללה 20% תוספת לדמי הבראה שנתיים. מה משכורתו של האיש?
- סוחר מכר סחורה ברווח של 18%. הוא קיבל עבור הסחורה 944 ש"ח. כמה שילם עבור הסחורה?
- בגן ציבורי הוקצב שטח של 60 מ"ר לפרחים ולדשא. שטח הדשא היה גדול ב- 50% משטח הפרחים. הפרחים היו בשני צבעים: אדומים ולבנים. שטח

- הפרחים הלבנים גדול ב- 40% משטח הפרחים האדומים. מה שטח הפרחים האדומים?
12. מכונה משוכללת מפיקה ב- 40% יותר חלקים ליום ממכונה ישנה. שתי המכונות מפיקות יחד 960 חלקים ליום. המכונה המשוכללת מפיקה ב- 60% פחות חלקים סוג ב' מחלקים סוג א'. כמה חלקים סוג א' מופקים ליום?
13. סוחר קנה שני סוגי בדים, ושילם עבור שניהם ביחד 150 ש"ח. בראשון הרוויח 20% ובשני - 25%. סה"כ הרוויח 34 ש"ח. כמה שילם עבור כל סוג בד?
14. ספורטאי משתתף בתחרות משולשת לאורך מסלול של 17.6 ק"מ. בחלק הראשון - ריצה, בחלק השני רכיבה על אופניים לאורך מסלול ארוך ב- 40% ממסלול הריצה, ובחלק השלישי - שחיה לאורך מסלול הקטן ב- 20% ממסלול הרכיבה על אופניים. מה אורך מסלול השחייה?
15. מחיר כרטיס ביציע של אולם אופרה קטן ב- 40% ממחיר כרטיס בשורות הראשונות, ומחיר כרטיס בשורות האחרונות קטן ב- 30% ממחיר כרטיס ביציע. 5 כרטיסים בשורה האחרונה ו- 6 כרטיסים ביציע עלו יחד 855 ש"ח. מה מחיר כרטיס ביציע?
16. במפעל למכוניות היתה הדרישה למכוניות בצבע אדום גדולה ב- 25% ממספר המכוניות בצבע לבן. הדרישה ליתר הצבעים היתה קטנה ב- 60% מהדרישה למכוניות אדומות. בסה"כ מכר המפעל 8,000 מכוניות בצבע שאיננו אדום או לבן. כמה מכוניות אדומות נמכרו.
17. ביח"ר מייצר שני סוגי קפה: קפה נמס וקפה שחור, בסה"כ 5 טון. אחרי שנה, הגדילו את היצור של קפה נמס ב- 10% ושל הקפה השחור ב- 15%. לפי דרישות השוק, שנה לאחר מכן, הקטינו את יצור הקפה הנמס ב- 20% והגדילו את כמות הקפה השחור ב- 20%. כמה קפה מכל סוג ייצרו בהתחלה, אם בסוף ייצרו בס"כ 5.9 טון?
18. מספר המדפים, שעליהם ספרות מדעית בספריה העירונית, גדול ב- 20% ממספר המדפים, שעליהם ספרי קריאה. מספר המדפים, שעליהם פרסומים, מהווה 10% ממספר המדפים של ספרות מדעית. כמה מדפים בספריה, אם מספר מדפי ספרות מדעית גדול ב- 4 ממספר המדפים האחרים?
19. בחבית היתה כמות מסוימת של מים. הוציאו ממנה פעם אחת 10% ואח"כ הוציאו 50% מהמים הנותרים. בסוף נשארו בחבית 10.8 לי מים. כמה מים היו בהתחלה?
20. בכלי היתה כמות מסוימת של מים. אחרי שהוציאו 15% מהמים, הוסיפו 2 לי מים ומכמות זו הוציאו 75%, ואז נותרו בכלי 9 לי מים. כמה מים היו בכלי תחילה?

21. בגינה שתלו שתילים חדשים. 35% מהם נבלו, ואז הוסיפו עוד 20 שתילים. בסיכום היו בגינה ב- 25% פחות שתילים ממה ששתלו תחילה. כמה שתלו בהתחלה?
22. מספר הבנות בבי"ס עיוני גדול פי 2 ממספר הבנים. אחרי שנה גדל מספר הבנים ב- 50 ומספר הבנות ב- 5%. בסיכום, גדל מספר התלמידים בביה"ס ב- 10%. כמה בנים היו בהתחלה?
23. חנות עשתה בדיקת שינויים במכירות של שני מוצרים. במוצר א' גדלו המכירות ב- 10%. במוצר ב' מכרו 12 פריטים יותר. סה"כ המכירות משני המוצרים יחד, היו פי 2 המספר שנמכר בהתחלה ממוצר א'. כמה מוצרים נמכרו בהתחלה מכל סוג, אם ידוע, שממוצר ב' מכרו בהתחלה מספר מוצרים השווה ל- 75% ממוצר א'?
24. במחלקת כלי בית נמכרים 720 סירים ומחבתות בחודש. לקראת החג, עלתה מכירת הסירים ב- 15% והמחבתות ב- 12%, ובסיכום נמכרו 819 פריטים. כמה סירים וכמה מחבתות מוכרת מחלקה כזו בד"כ?
25. במפעל מכינים בד"כ 360 חליפות לגברים ולנשים. בחודשי החורף, גדל הביקוש לחליפות גברים ב- 10% ולחליפות נשים ב- 15%, וכך הכינו במפעל בסה"כ 404 חליפות. כמה חליפות נשים וכמה חליפות גברים הכינו בחורף?
26. תופרת קנתה בד לתפור וילונות לדירה. עבור חדר אחד היא השתמשה בכמות בד, הקטנה ב- 2.5 מ' ממחצית כל הבד. עבור החדר השני לקחה כמות הגדולה ב- 90% מהכמות שלקחה לחדר הראשון, ואז נותרו לה 6.25 מ' בד. כמה בד קנתה?
27. בחנות היה מלאי מכשירי טלוויזיה בערך כולל של 80,000 ש"ח. 6 ממכשירי הטלוויזיה היו בתצוגה ולכן נמכרו בהפסד של 20%, היתר נמכרו ברווח של 25%. במכירת כל המלאי שבחנות, הרוויח הסוחר 14,600 ש"ח. כמה מכשירי טלוויזיה היו בחנות?
28. סוחר קנה חולצות ילדים ב- 20 ש"ח לחולצה. 10% מהן היו פגומות, לכן מכר אותן בהפסד של 20%. 18 מהן מכר במחיר הקרן ואת האחרות ברווח של 30%. הוא קיבל עבור המכירה 1392 ש"ח. כמה חולצות קנה הסוחר?
29. ילד יצא עם סכום כסף לטיול. ביום הראשון הוציא 30% מהסכום ועוד 10 ש"ח. ביום השני הוציא 20% מהנותר פחות 10 ש"ח. ביום האחרון הוציא 70% מהנותר, ואז היו בידיו 51 ש"ח. עם איזה סכום הוא יצא לטיול?
- 30\*. חברה ייצאה בשנה שעברה לחו"ל 40 מליון פריטים משלושה סוגים: א', ב', ג'. השנה גדל יצוא מוצר א' ב- 10%, ב' גדל ב- 30%, ו- ג' גדל ב- 5%, וע"י כך גדל היצוא הכולל ב- 15%. התחזית לשנה הבאה היא, שהיצוא יהיה בהיקף של 52.4 מליון פריטים כתוצאה מכך, שכמות היצוא של המוצר הראשון תגדל ב- 20%, השני ישאר באותו היקף, והיצוא של השלישי יגדל ב- 25%. כמה מוצרים מכל סוג ייצאה החברה בשנה שעברה?

## תערובות

31. בכלי נמצאים 20 ליטר תמיסת מלח בריכוז 30%. מהי כמות המלח הטהור בתערובת, ומהי כמות המים בה?
32. חשב את כמות הכוהל הטהור ב- 55 ליטר כהל בריכוז 40%.
33. בכמות מסוימת של תמיסת מלח בריכוז 25% יש 17 ג' מלח טהור. מהי כמות התמיסה?
34. בכמות מסוימת של מי מלח בריכוז 17% יש 166 ליטר מים.  
א. מהו אחוז המים בתמיסה?  
ב. כמה מלח טהור בתמיסה?
35. בכמות מסוימת של כהל בריכוז 45% יש 165 לי' מים. מה כמות התערובת?
36. ב- 60 ג' מי מלח יש 15 ג' מלח טהור, מהו ריכוז המלח בתמיסה:  
א. בחלקים ב. באחוזים.
37. תמיסת כהל מכילה 60 לי' מים ו- 40 לי' כוהל טהור. מהו ריכוז הכוהל בתמיסה: א. בחלקים ב. באחוזים.
38. בכלי אחד נמצאים 30 לי' כהל טהור. בכלי שני נמצאים 90 לי' מים.  
א. מהו ריכוז הכוהל בכלי הראשון?  
ב. מהו ריכוז הכוהל בכלי השני?  
ג. אם מוזגים את תכולת הכלי הראשון לשני, מהו אחוז הכוהל בתמיסה המתקבלת - בחלקים ובאחוזים.
39. בכלי אחד נמצאים 60 ג' מי מלח ובהם 12 ג' מלח טהור. בכלי שני - 40 ג' מי מלח בריכוז של 30%.  
א. מהו ריכוז התמיסה הראשונה, ומהי כמות המלח הטהור בתמיסה השנייה?  
ב. אם מכניסים את שתי התמיסות לכלי אחד, מהי כמות המלח הטהור בכלי זה? מה ריכוזו?
40.  $\frac{4}{5}$  מנתך אחד שמשקלו 120 ג', הוא כסף. בנתך שני שמשקלו 80 ג' -  $\frac{7}{10}$  כסף.  
א. חשב את כמות הכסף בכל נתך.  
ב. אם מתיכים את שני הנתכים יחד, מהו ריכוז הכסף בנתך המתקבל - בחלקים ובאחוזים?
41. ערבבו 52 ג' תמיסת מלח בריכוז 20% עם 48 ג' תמיסת מלח בריכוז 70% מהו אחוז המלח בתערובת שהתקבלה?
42. בכלי אחד 120 לי' כהל בריכוז 25%. בכלי שני 180 לי' כוהל בריכוז לא ידוע. מוזגים את תכולת הכלי השני לראשון ומתקבל כהל בריכוז של 19%. מה היה ריכוז הכוהל בכלי השני?

43. לוקחים 30 ליי חומצה בריכוז 35% עם כמות מסוימת של חומצה בריכוז 20%, ומקבלים חומצה בריכוז 30% איזו כמות חומצה של 20% לקחו?
44. לכמות מסוימת של כוהל בריכוז 4% הוסיפו כוהל בריכוז 7% וקיבלו 60 ליי כוהל בריכוז 6%. מהי כמות הכוהל בריכוז 4%?
45. לכמות חומצה בריכוז 20% הוסיפו חומצה בריכוז 40% וקיבלו חומצה בריכוז 32%. כמה לקחו מהחומצה השניה, אם ידוע שהיו בה 10 ליי יותר מאשר בראשונה.
46. לכמות מי מלח בריכוז 21% הוסיפו כמות הקטנה ממנה ב- 45 ליי של מי מלח בריכוז 12% וקיבלו מי מלח בריכוז 18%. כמה מי מלח לקחו מכל סוג??
47. ל- 36 ג' מי מלח בריכוז מסוים הוסיפו 24 ג' מלח בריכוז הגדול ב- 15% מריכוז התמיסה הראשונה וקיבלו מי מלח בריכוז 16%. מה היה ריכוז התמיסה הראשונה?
48. ערבבו 72 ליי מי בושם בריכוז מסוים של תמצית לילך עם 36 ליי מי בושם בריכוז תמצית לילך הקטן ב- 3% מריכוזו של הראשון, וקיבלו מי בושם בריכוז 6%. מה היה ריכוז תמצית הלילך במי הבושם מהסוג השני?
49. ל- 80 ליי חומצה בריכוז מסוים הוסיפו 120 ליי בריכוז 15% וקיבלו חומצה בריכוז הגבוה ב- 3% מריכוז החומצה הראשונה. מה היה ריכוז החומצה שהתקבלה?
50. ל- 32 ליי תמיסת מלח בריכוז 20% הוסיפו 8 ליי מים. מהו ריכוז התמיסה המתקבלת?
51. ל- 54 ליי כוהל בריכוז מסוים הוסיפו 9 ליי מים והתקבל כוהל בריכוז נמוך ב- 3% מהמקור. מה היה ריכוז הכוהל המקורי?
52. ל- 44 ליי חומצה בריכוז 15% הוסיפו כמות מים והתקבלה חומצה בריכוז 12%. כמה מים הוסיפו.
53. מ- 51 ליי מי מלח בריכוז מסוים התאדו 17 ליי מים. ריכוז המלח גדל ב- 8%. מה היה ריכוז המלח אחרי התאיידות המים?
54. מכמות מסוימת של כהל בריכוז 20% התאיידו 8 ליי מים והתקבל כוהל בריכוז 25%. כמה כוהל נותר?
55. לכלי שהכיל 240 ליי כהל בריכוז 40%, מזגו 400 ליי כהל בריכוז 30% והוסיפו 160 ליי מים. מהו אחוז הכוהל בתערובת המתקבלת?

56. לכמות מסוימת של תמיסת מלח בריכוז 40% הוסיפו כמות תמיסה הקטנה ב-100 ל"י מהקודמת וריכוזה 25%. לזה הוסיפו 100 ל"י מים והתקבלה תמיסת מלח בריכוז 30%. מה היתה כמות התמיסה הראשונה?
57. לכמות מסוימת של מי מלח בריכוז 80% הוסיפו כמות מי מלח בריכוז 50%. 100 ל"י מים התנדפו מהתמיסה והתקבלו 1,000 ל"י מי מלח בריכוז 70%. כמה לקחו מהתמיסה השנייה?
58. לכלי שהכיל 375 ל"י מי מלח, הוסיפו 450 ל"י מי מלח בריכוז 25%. מהתמיסה הזו התאיידו 75 ל"י מים והתקבלה תמיסה שריכוז המלח בה קטן ב-5% מריכוז המלח בתמיסה ראשונה. מהו אחוז המלח בתמיסה שהתקבלה?
59. ל-20 ל"י מי מלח בריכוז 40% הוסיפו 4 ג' מלח טהור. מהו ריכוז המלח בתמיסה שהתקבלה?
60. ל-15 ל"י מי בושם שריכוז התמצית בו 40% הוסיפו כמות מסוימת של תמצית בושם והתקבלו מי בושם בריכוז 50%. כמה תמצית הוסיפו?
61. מתמיסה של 40 ג' מי מלח התגבשו (הפכו לגושים) 16 ג' מלח והוצאו מהתמיסה. ריכוז התמיסה הנוטרת קטן ב-16% מריכוזה לפני התגבשות המלח. מהו ריכוז המלח בתמיסה המתקבלת?
62. ל-45 ג' תמיסת מלח בריכוז 20% הוסיפו כמות מסוימת של גבישי מלח והתקבלה תמיסה בריכוז 25%. כמה ג' גבישי מלח הוסיפו לתמיסה?
63. מכמות מסוימת של תמיסת כהל בריכוז 75% התאיידו 100 ל"י כהל ובמקומם הוכנסו 100 ל"י מים והתקבלה תמיסת כהל בריכוז 50%. מהי כמות תמיסת הכהל שלקחו?
64. מתוך כלי המכיל 40 ל"י תמיסת מלח בריכוז 25%, הוציאו כמות מסוימת של תמיסה והכניסו במקומה כמות זהה של מלח טהור. ריכוז התמיסה החדשה הוא 40%. חשב את כמות התמיסה שהוצאה.
65. בכלי אחד 6 ג' מלח. בכלי שני 10 ג' מלח ו-5 ג' מים. מוזגים מהתמיסה שבכלי השני לכלי הראשון עד שכמויות המלח הטהור בשני הכלים שוות. כמה מזוג מהכלי השני לראשון?
66. מתוך כלי המכיל 12 ל"י כהל טהור ו-18 ל"י מים הוציאו כמות מסוימת והכניסו במקומה כמות זהה של כהל טהור ואז היו בכלי כמויות שוות של כהל טהור ושל מים. מהי כמות התמיסה שהוצאה מהכלי?
67. בכלי אחד 21 ג' תמיסת מלח. בכלי שני 15 ג' תמיסת מלח. כמות המלח בתמיסה הראשונה גדולה ב-2 ג' מכמות המלח הטהור בשנייה. ריכוזי המלח בשתי התערובות שווים. חשב את כמות המלח בתערובת הראשונה.

68. בכלי א' 18 לי מים ו- 6 לי כהל טהור. בכלי ב' - תערובת ובה כמות מים הגדולה ב- 24 לי מכמות הכוהל הטהור שבה. אחוז הכוהל בתערובת השניה קטן פי 2 מאחוז הכוהל בראשונה. כמה לי מים בתערובת השניה.
69. בכלי אחד תמיסת מלח המכילה 48 ג' מלח טהור. בכלי שני תמיסת מלח המכילה 45 ג' מלח טהור. כמות התמיסה הראשונה קטנה ב- 20 ג' מכמות התמיסה השניה וריכוז המלח בראשונה גדול ב- 15% מריכוז המלח בשניה. חשב את כמות התערובת השניה.
70. בכלי אחד 28 לי תמיסת מלח, המכילה 7 ג' מלח טהור. בכלי שני תמיסת מלח, שבה כמות המים גדולה ב- 26 לי מכמות המלח הטהור. כמה מלח טהור בתמיסה השניה, אם ידוע שריכוזה גדול ב- 12% מריכוז התמיסה הראשונה.
71. לכלי שבו 120 לי מי מלח בריכוז מסוים מוזגים כמות כפולה של מי מלח בריכוז 25%, ומוסיפים 40 ג' מלח טהור. מהו ריכוז התמיסה המתקבלת אם הוא גדול ב- 4% מזה של התמיסה הראשונה?
72. לכוהל בריכוז 25% הוספו 165 לי כהל בריכוז 30%. אחר כך הוסיפו עוד כהל טהור והתקבלה תערובת בריכוז 34%. כמות התערובת הראשונה גדולה פי 6 מכמות הכוהל הטהור. כמה כהל טהור הוסיפו?
73. ל- 70 ג' תמיסת מלח בריכוז מסוים הוסיפו 50 ג' מלח בריכוז הגדול כפליים מריכוז התמיסה הראשונה.  
4 ג' מהמלח הפך לגבישים והוצא. בסוף הוסיפו 9 ג' מים והתקבלה תמיסת מלח בריכוז 24%. מהו ריכוז התערובת הראשונה?
- 74\*. בכלי א' תמיסת מלח שבה כמות המים גדולה ב- 25 ליטר מכמות המלח הטהור. בכלי שני תמיסת מלח ובה 90 ק"ג מלח טהור ו- 60 ליטר מים. לקחו 45 ליטר מהתמיסה הראשונה ו- 15 לי מהשניה, וקיבלו תמיסה שבה יחס המלח למים 9:11. מה כמות המלח בתמיסה הראשונה.
- 75\*. בכלי אחד כמות מסוימת של תמיסה, שבה  $\frac{2}{5}$  כהל טהור. בכלי שני 54 לי כהל טהור ו- 36 לי מים. מוזגים מהתמיסה השניה לראשונה בכמות הקטנה ב- 24 ממה שהיה בראשונה ומתקבלת תמיסה ובה  $\frac{9}{20}$  כהל טהור. מה כמות התמיסה שיצקו לכלי הראשון?
- 76\*. בשלושה כלים, שלוש תמיסות כהל: אחת בריכוז 65%, השניה בריכוז 70% והשלישית 75%.  
כמות הכוהל הטהור בשלוש התמיסות יחד, גדול פי 2.5 מכמות המים בתמיסה הראשונה והשניה יחד.  
אם מוסיפים לכל תמיסה ליטר כהל טהור ושני ליטר מים, תשווה הכמות הכוללת של כהל טהור לכמות הכוללת של מים.  
אם נערבב את התמיסה הראשונה עם השלישית, מתקבלת תמיסה, בעלת ריכוז שווה לריכוז התמיסה השניה.  
איזו כמות תמיסה בכל כלי?

## ב. מעלה שניה

### אחוזים

77. מוצר שעלה 1200 ש"י, התייקר פעמיים באותו אחוז. מחירו הגיע ל- 1452 ש"י. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
78. מכשיר תאורת חירום, שמחירו 400 ש"י, נשרט קלות, ולכן הורידו את מחירו באחוז מסוים. מאחר שלא הצליחו למכרו, הורידו את המחיר החדש באותו אחוז, ואז הוא נמכר ב- 324 ש"י. מה היה אחוז ההנחה בכל פעם?
79. סוחר רהיטים מכר עיזבון עתיק ב- 24 מיליון ש"י. בכמה קנה הסוחר את העיזבון, אם אחוז הרווח שהרוויח, שווה למחיר הקניה (במיליונים)?
80. סוחר קנה טלוויזיה ישנה ב- 500 ש"י, ומכר אותה ליואב ברווח מסוים. יואב השקיע 25 ש"י בתיקונה. ומכר אותה ב- 690 ש"י באותו אחוז רווח כמו הסוחר. כמה הרוויח הסוחר, וכמה הרוויח יואב?
81. לאור הביקוש, שנוצר למוצר מסוים, שמחירו 150 ש"י, העלה הסוחר את המחיר. אולם אז נעצרו המכירות. הסוחר הוריד את המחיר במחצית מספר האחוזים, שהעלה קודם את המחיר, ואז במחיר 162 ש"י, נמכר המוצר במהירות. בכמה אחוזים העלה הסוחר את מחיר המוצר בהתחלה?
- 82\*. אדם הוריד את המחיר של מוצר באחוז מסוים, והוא נמכר בצורה טובה מאד, אולם אחרי ששמע, שגם המתחרה שלו מוכר כמות גדולה מן המוצר, למרות שמחירו גבוה בהרבה, העלה את מחירו ב- 20% פחות מהאחוז שבו העלה קודם את המחיר. בכמה אחוזים הוריד את המחיר תחילה, אם מחיר המוצר בסוף מהווה 77% ממחירו בהתחלה?
83. אדם רצה לקנות מכונית בהנחה מסוימת מהשנתון הנוכחי. אולם, בגלל בעיה בייצור דגמים מהשנתון החדש, "קפצו" מחירי המכוניות, שהיו במלאי, ב- 15% יותר מאחוז ההורדה של מחירן בהתחלה. בסיכומו של דבר, האדם קנה את המכונית ב- 14% יותר ממחיר המקורי (לפני השינויים). מה היה אחוז ההנחה תחילה?
84. מחיר היצור של מקטורן גדול ב- 60 ש"י ממחיר יצור מכנסיים. מקטורן נמכר ב- 261 ש"י ומכנסיים ב- 156 ש"י. חשב את מחיר היצור של מקטורן ואחוז הרווח ממכירתו, אם אחוז הרווח במקטורן גדול ב- 15% מאחוז הרווח במכנסיים?
85. שני סוחרים קנו פריטים במכרו. ירון קנה פריטים במחיר הגבוה ב- 1000 ש"י סה"כ יותר מהמחיר ששילם שרון, אך שניהם הפסידו במכירת הפריטים, כאשר שרון הפסיד ב- 10% יותר ממספר האחוזים שהפסיד ירון. שרון מכר את הסחורה ב- 4500 ש"י וירון ב- 4800 ש"י. באיזה סכום קנה שרון פריטים?
86. אבי ואייל התחילו לעבוד באותו מקום עבודה. אבי קיבל משכורת חודשית גדולה ב- 500 ש"י מאייל. כעבור שנה העלו להם את המשכורת, כאשר לאייל

העלו ב- 10% יותר מאשר לאבי. אבי קיבל 3850 ש' ואייל 3600 ש'. מה היתה המשכורת ההתחלתית של אייל, ובכמה אחוזים העלו לאבי את המשכורת?

### תערובות

87. בכלי אחד נמצאת תערובת ובה 30 ג' מלח טהור ובכלי השני נמצאת כמות תערובת הגדולה ב- 60 ג' מהכמות בכלי הראשון, ובה 27 ג' מלח טהור. ריכוז המלח בתערובת השניה קטן ב- 10% מריכוז המלח בראשונה. חשב את כמות התערובת בכלי הראשון ואת ריכוז המלח בו.
88. בכלי אחד תמיסת מלח ובה 12 ג' מלח טהור. בכלי שני תמיסת מלח ובה 18 ג' מלח טהור. כמות התמיסה השניה גדולה ב- 10 ג' מכמות התמיסה הראשונה וריכוזה גדול ב- 6% מריכוז הראשונה. חשב את כמות התמיסה הראשונה.
89. בשני כלים תמיסות מלח שהכמות הכוללת שלהם 130 ג'. בראשון 20 ג' מלח טהור ובשני 16 ג' מלח טהור. ריכוז המלח בתמיסה הראשונה קטן ב- 7% מריכוז המלח בשניה. חשב את ריכוז התמיסה השניה.
90. משקל שני נתכים ביחד הוא 290 ג'. באחד מהם 56 ג' זהב ובשני 45 ג' זהב. ריכוז הזהב בנתך הראשון גדול ב- 10% מריכוזו בנתך השני. מהו משקל כל נתך?
91. בכלי כמות מסוימת של תמיסה, המכילה 24 ל"י כהל טהור. אחרי הוספת 20 ל"י מים, קטן אחוז הכוהל בתמיסה ב- 6%. מה היה ריכוז התמיסה בהתחלה?
92. מתוך כמות מסוימת של כהל המכילה 30.4 ל"י כהל טהור התנדפו 16 ל"י כהל טהור, ולכן קטן ריכוזו ב- 16%. מה היתה כמות התערובת בהתחלה?
93. בכלי המכיל כמות מסוימת של מים הומסו 32 ג' גבישי מלח. אח"כ הוסיפו לתמיסה עוד 48 ג' מים ואז קטן ריכוז המלח ב- 15%. כמה מים היו תחילה בכלי?
94. תמיסת מלח מכילה כמות מלח טהור הגדולה ב- 20 ג' מכמות המים. אחרי ש- 15 ג' מלח הפכו לגבישים (והוצאו), הכניסו במקומם אותה הכמות מים, ואז קטן ריכוז התמיסה ב- 15%. מה היתה כמות המלח בהתחלה.
95. בכלי תמיסת כהל שריכוזה באחוזים שווה למספר הליטרים שלה. לכלי זה הוסיפו תמיסת כהל בכמות הגדולה ב- 10 ל"י מזו של הראשונה וריכוזה גדול פי 2 מריכוז הראשונה. התקבלה תמיסת כהל בריכוז 32%. מהו ריכוז התמיסה הראשונה?
96. בתמיסת כוהל, קטנה כמות המים ב- 40 ל"י מכמות הכוהל הטהור. כאשר מתנדפים מתמיסה זו 10 ל"י כהל טהור ו- 10 ל"י מים, מתקבלת תמיסה שריכוז הכוהל בה גדול ב- 5% מריכוז הכוהל בתמיסה המקורית. מהו ריכוז הכוהל בתמיסה המקורית?

97. בשתי תמיסות אותה כמות של כהל טהור. באחת מהן גדולה כמות המים ב- 12 מכמות הכוהל הטהור ובשניה קטנה כמות המים ב- 8 מכמות הכוהל הטהור. ריכוז הכוהל בתמיסה השניה גדול ב- 20% מריכוזו בראשונה. חשב את כמות הכוהל הטהור בכל תמיסה.
98. נתן אחד מכיל כמות כפולה של נחושת (חומר טהור) מנתך שני. בנתך הראשון גדול משקל הנתך ב- 45 ג' ממשקל הנחושת, ואילו בשני גדול משקל הנתך ב- 10 ג' ממשקל הנחושת שהוא מכיל. ריכוז הנחושת בנתך השני גדול ב-  $\frac{1}{5}$  מריכוז הנחושת בראשון. מהו משקל הנחושת בנתך השני?
99. בכלי נמצאים 25 ל"י מים. מוצאים מהכלי כמות מסוימת של מים וממיסים במקומם כמות שווה של כהל טהור. אח"כ מוציאים שוב אותה כמות מהתמיסה שנוצרה ומכניסים במקומה אותה כמות של כהל טהור. אחרי פעולות אלה מתקבלת תמיסת כהל בריכוז 84%. כמה מים הוציאו מהכלי בהתחלה?
100. ערבבו 35 ליטר מי מלח בריכוז מסוים, עם 45 ליטר מי מלח בריכוז הגדול ב- 20% מריכוז התמיסה הראשונה. אחרי התאדות 4 ליטר מים, התקבלה תמיסה שריכוזה גדול ב- 15% מריכוז התמיסה הראשונה. חשב את ריכוז המלח בתמיסה הראשונה.
101. בכלי נמצאים 300 ל"י מים. החליפו כמות מסוימת של מים בחומצה טהורה. אח"כ הוציאו שוב אותה כמות מתוך הכלי ושמו במקומה אותה כמות של חומצה טהורה. התקבלה תמיסה בריכוז 36%. איזו כמות החליפו כל פעם.
- 102\*. בכלי 400 ל"י כהל טהור. הוציאו כמות מסוימת מהכלי ושמו במקומה אותה כמות מים. אח"כ הוציאו שוב כמות זהה של התמיסה שהתקבלה והכניסו במקומה מים. התקבלה תמיסה בריכוז 36%. כמה מים הכניסו בסה"כ?
- 103\*. מתוך כלי המכיל 50 ל"י מים הוציאו חלק מהמים והכניסו במקומם אותה כמות של כהל טהור. מהתמיסה שהתקבלה הוציאו שוב אותה כמות כמקודם ושוב מזגו במקומה כהל טהור. ריכוז התמיסה שהתקבלה הוא 64%. איזו כמות של כהל טהור הוכנסה לכלי כל פעם?

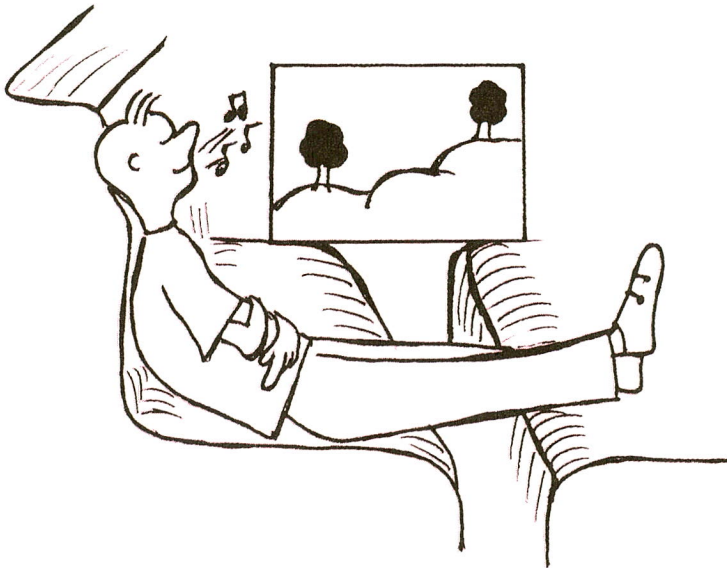
## תשובות

1. א. 8 ב. 48 ג. 32 ד. א. 0.3a ב.  $\frac{ab}{100}$  ג. 1.45a ד. 0.7a 3. א. 140 ב. 200 ג. 80
- ד. 80 4. מ' 5. 80 בולים 6. 20 ש"י 7. 27,000 ש"י 8. 24 מ"ר, 27.6 מ"ר 9. 4,500 ש"י
10. 800 ש"י 11. 10 מ"ר 12. 400 חלי 13. 70 ש"י, 80 ש"י 14. 5.6 ק"מ 15. 90 ש"י
16. 20,000 מ' 17. 2 טון, 3 טון 18. 116 מדי 19. 24 ל"י 20. 40 ל"י 21. 200 ש"י
22. 250 תלי 23. 80 (א), 60 (ב) 24. 420 סירים, 300 מח' 25. 220 לגברים, 184 לנשים
26. 30 מ' 27. 40 טלי 28. 60 ח' 29. 300 ש"י 30. 10 (א), 14 (ב), 16 (ג).
31. 6, 14, 22 32. 68 33. 22 34. 83%, 34 35. 300 36. 25%,  $\frac{1}{4}$  37.  $\frac{2}{5}$ , 40%

44%.41 96, 56, 76%, 19/25 .40 20%, 12, 24, 24%.39 25%,  $\frac{1}{4}$ , 0%, 10%.38  
 13%.49 4%.48 10%.47 90,45.46 30.45 20.44 15.43 15%.42  
 600.57 500.56 27%.55 32.54 24%.53 11.52 21%.51 16%.50  
 7.67 5.66 3.65 8.64 400.63 3.62 60%.61 3.60 50%.59 35.58  
 12.75 50.74 20%.73 55.72 34%.71 37.70 100.69 28.68  
 20% או 80%.81 15%.80 20 מיליון .79 10%.78 10%.77 0.6, 6.3, 0.6.76  
 10%, 3000 ש"י .86 5000 ש"י .85 180 ש"י , 45%.84 5%.83 30%.82  
 76 או 40.92 30%.91 140,150.90 32%.89 40 או 50.88 120,25%.87  
 60.101 60%.100 15.99 15.98 24.97 70%.96 20%.95 60.94 48.93  
 20.103 320.102

### חידה

אדם נוסע ברכבת. אחרי שצבר 70% מהדרך הלאק אישון.  
 כשהתעורר, התברר לו שנשאר לו עוד רבע מהדרך שצבר  
 בזמן שינון. כמה אחוזים מהדרך נותרו לו?



תשובה: 6%. הסבר: אם נותר לו רבע מהדרך בעת שינון, אז הדרך בזמן השינה (השלם) יחד עם מה שנותר לו (רבע) זה  $\frac{4}{5}$

וזה מהווה 30% הנותרים. לכן רבע אחד מהווה 6%:30%.

## סעיף 6 - בעיות תנועה (תשובות בעמוד 307)

### א. מעלה ראשונה

1. אדם יוצא בשעה 9:00 מ-A במהירות קבועה של 90 קמ"ש. באיזה מרחק מ-A הוא יהיה בשעה: א. 11:00 ב. 10:30 ג. 9:20 ד. 13:50
2. מכונית עוברת דרך מסויימת במהירות של 60 קמ"ש במשך a שעות. מכונית שניה עוברת אותה הדרך במהירות 75 קמ"ש בשעה אחת פחות.
  - א. כתוב ביטויים לדרך שעוברת כל מכונית
  - ב. אילו מבין המילים המופיעות בבעיה מאפשרות להרכיב משוואה? הרכב משוואה.
  - ג. מה מצאת באמצעות המשוואה?
  - ד. מה עוד תוכל לחשב?
3. אדם הלך על מסלול ריצה במשך שעתיים במהירות a קמ"ש. למחרת היה עייף ולכן האט את מהירותו ב- 2 קמ"ש. לכן, הליכה על אותו המסלול נמשכה 3 שעות.
  - א. כתוב ביטויים לאורך המסלול בשני המקרים.
  - ב. כתוב קשר בין הביטויים שקיבלת. על אילו מילים אתה מסתמך בהרכבת המשוואה?
  - ג. פתור את המשוואה. מה מצאת?
  - ד. מה עוד תוכל לחשב בבעיה זו?
4. אדם נוסע לאורך 280 ק"מ. בהתחלה נסע במהירות של 60 קמ"ש במשך a שעות. ביתרת הדרך הוא מגביר את מהירותו ב- 5 קמ"ש למשך זמן הקטן מהקודם במחצית השעה.
  - א. כתוב ביטויים לחלק הראשון ולחלק השני של הדרך.
  - ב. כתוב משוואה שמקשרת אותם. על אילו מילים מהבעיה הסתמכת?
  - ג. פתור את המשוואה. מה מצאת?
  - ד. מה עוד אפשר לחשב בבעיה זו?
5. ילד רכב על אופניו לבריכה והנסיעה ארכה 20 דקות. בדרכו חזרה היה עייף והקטין את מהירותו ב- 4 קמ"ש. לכן ארכה דרכו חזרה מחצית השעה. מה המרחק עד הבריכה?
6. אורי יצא לטיול באופניו בכיוון צפונה. אחרי שעה יצא אחריו חברו שגר לידו במהירות הגדולה ב- 5 קמ"ש ממהירותו של אורי והשיג אותו כעבור 3 שעות. מה מהירותו של אורי ובאיזה מרחק מהבית השיגו השכן?
7. בעליה להר עושה גמל 24 צעדים לדקה. וברדתו ממנו - 60 צעדים לדקה. את הדרך למטה הוא עושה ב- 45 דקות פחות מאשר את הדרך למעלה. כמה זמן ארך המסע להר ובחזרה, ומה אורך המסלול אם כל צעד מקדם את הגמל בחצי מטר?

8. דני ושלומי קבעו להיפגש במקום A. שניהם יצאו מאותה נקודה. דני הלך ל- A במהירות 6 קמ"ש. שלומי יצא רבע שעה אחרי דני, הלך במהירות 7 קמ"ש והגיע ל- A חצי שעה לפניו. כמה זמן הלך שלומי?
9. יעל יצאה בשעה 8:00 מביתה לבריכה במהירות 5 קמ"ש. בשעה 8:15 יצאה בעקבותיה אחותה במהירות 4 קמ"ש והגיעה לבריכה 20 דקות אחרי יעל. כמה זמן הלכה אחותה ומה המרחק מביתן עד הבריכה?
10. סטודנט יצא ב- 8:00 בבוקר לכיוון חיפה ונסע במהירות של 90 קמ"ש. לאחר הרצאה של 3 שעות באוניברסיטה, נסע חזרה במהירות 80 קמ"ש בזמן הארוך ב- 10 דקות מזה שלקחה הנסיעה לחיפה. מתי הגיע הסטודנט בחזרה לתל-אביב?
11. אדם נסע לירושלים בשעה 6:00 במהירות 100 קמ"ש, עשה סידורים למשך 5 שעות וחזר לביתו. כדי להימנע מפקקי תנועה, עשה את דרכו חזרה בדרך עוקפת ארוכה פי 1.5 מהדרך שנסע בבוקר. מהירות - 75 קמ"ש והנסיעה חזרה ארכה ב- 50 דקות יותר מאשר בבוקר. מתי הגיע חזרה לביתו?
12. אדם נסע במשך שעתיים במהירות מסויימת ואח"כ נסע עוד שעה במהירות הקטנה ב- 10 קמ"ש מהמהירות הקודמת ועשה בסה"כ 275 ק"מ. מה מהירותו הראשונה?
13. אדם שט בסירת משוטים במהירות של 10 קמ"ש ואח"כ המשיך בסירת מנוע במהירות 40 קמ"ש למשך זמן הגדול בשעה מהזמן הראשון. בסה"כ עבר 65 ק"מ. כמה זמן שט בסירת משוטים?
14. מכונית נסעה בכביש משובש במהירות של 40 קמ"ש והמשיכה בכביש מהיר במהירות של 90 קמ"ש. זמן הנסיעה בכביש המהיר היה קצר במחצית השעה מהזמן בכביש המשובש. בסה"כ עברה המכונית 215 ק"מ. כמה זמן נמשכה נסיעתו?
15. אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' במהירות של 120 קמ"ש. בחזרה הוא מקטין את מהירותו ל- 80 קמ"ש. חשב את המהירות הממוצעת של האוטובוס.
16. מכונית נוסעת בדרך של 95 ק"מ המורכבת משלושה חלקים. בחלק הראשון - העירוני, נסעה המכונית במהירות 50 קמ"ש, בדרך העפר - במהירות 30 קמ"ש, ובכביש בין עירוני - במהירות 80 קמ"ש. הזמן, שנסעה בדרך העפר היה קצר ב- 10 דקות מהזמן, שנסעה בכביש העירוני וב- 25 דקות מהזמן שנסעה בכביש הבין-עירוני. כמה זמן ארכה הנסיעה?
- 17\*. אדם טייל לאורך מסלול של 1230 ק"מ בשלוש צורות: בנסיעה באוטובוס במהירות של 40 קמ"ש, בהליכה ברגל במהירות של 3 קמ"ש ועל גמל במהירות של 4 קמ"ש. הזמן שטייל ברגל, היה גדול ב- 16 שעות מהזמן שנסע באוטובוס וגדול ב- 26 שעות מהזמן שרכב על הגמל. כמה ימים ארך הטיול אם טייל במוצע 12 שעות ביום.

18. בבית חרושת עובר מוצר שלושה שלבים : על מסלול היצור, במהירות של 20 ס"מ לשנייה, על מסלול קיפול במהירות של 24 ס"מ לשנייה ועל מסלול האריזה במהירות של 30 ס"מ לשנייה. הזמן הכולל מורכב משלושה מספרים עוקבים (הראשון למסלול האריזה, השני שיותר גדול - לקיפול, וכו'). בכמה זמן עובר מוצר על שלושת המסלולים אם אורכם הכולל הוא 2.12 מ'?
19. מהירות סירה במים עומדים A ו- B. כאשר הוא טס עם הרוח, אורכת הטיסה 50 עם הזרם בזמן הקצר ב- 4 שעות מהזמן שהיא שטה בחזרה - נגד הזרם (על אותה הדרך). כמה זמן נמשכה תנועת הסירה הלוך ושוב?  
רמז: בשיט עם הזרם, "דוחף" הזרם את הסירה קדימה ומוסיף לה מהירות, ובשיט נגד הזרם, הוא מתנגד לתנועתה ומפחית את מהירותה.
20. מטוס טס בין שתי נקודות A ו- B. כאשר הוא טס עם הרוח, אורכת הטיסה 50 דקות, וכאשר הוא טס נגד הרוח - 55 דקות. מהירות הרוח היא 40 קמ"ש. מהי מהירות המטוס אילו לא נשבה רוח כלל?
21. סירה שטה עם הזרם במהירות 36 קמ"ש, לאורך קטע מסויים. את הדרך חזרה היא עושה במשך שעה וחצי. מה מהירות הסירה נגד הזרם, אם היא עושה אותה דרך במים עומדים במשך שעה אחת ו- 12 דקות?
22. המרחק בין A ו- B הוא 220 ק"מ. מכונית יוצאת מ- A לכיוון B במהירות 50 קמ"ש. בדיוק באותו זמן יוצאת מכונית מ- B לכיוון A, במהירות 60 קמ"ש. כעבור כמה שעות נפגשות המכוניות?
23. משאית יוצאת בשעה 7:00 מבאר שבע לאילת במהירות 85 קמ"ש. באותה שעה יוצאת משאית מאילת לבאר שבע במהירות 95 קמ"ש. מתי חולפות המשאיות זו על פני זו, אם המרחק בין באר שבע לאילת הוא 240 ק"מ?
24. המרחק בין A ו- B 60 ק"מ. שני רוכבי אופניים נוסעים זה לקראת זה במהירות 12 קמ"ש. בכמה צריך הרוכב השני להגדיל את מהירותו, כדי שיפגשו אחרי: א. שעתיים ב. 2.5 שעות ג. שלוש שעות.
25. אוטובוס יוצא מת"א לאילת בשעה 12:00 בצהרים במהירות 60 קמ"ש. מונית יוצאת מאילת לת"א בשעה 13:00 במהירות 80 קמ"ש. מתי הם יפגשו, אם המרחק בין ת"א לאילת הוא 340 ק"מ?
26. בשעה 8:00 יוצא רוכב אופניים מנקודה A לנקודה B, שהמרחק ביניהן 112 ק"מ. בשעה 8:20 יוצא לקראתו מנקודה B רוכב אופניים שני. הם נפגשים בשעה 10:40. מה מהירותו של הרוכב השני, אם היא גדולה ממהירותו של הראשון ב- 3 קמ"ש? איפה נפגשו השניים?
27. בשעה 10, יוצאים שני רצים מאותה נקודה - אחד צפונה במהירות 12 קמ"ש והשני דרומה במהירות 14 קמ"ש. באיזו שעה יהיה המרחק ביניהם 39 ק"מ?

28. שני שליחים יצאו בשעה 7:30 מהחברה ליעדים בכיוונים מנוגדים A ו-B שהמרחק ביניהם 62 ק"מ. הראשון הגיע ל-A בשעה 9:45, והשני הגיע ל-B בשעה 10:00. מה היו המהירויות שלהם, אם מהירותו של השני גדולה ב-2 קמ"ש ממהירותו של הראשון?
- 29\*. שני אנשים עושים ריצה מסביב למגר עגול שקוטרו 70 מטר. הם יוצאים מאותה נקודה בכיוונים מנוגדים. אחד במהירות 5.8 קמ"ש והשני במהירות 7.4 קמ"ש. כל כמה זמן נפגשים השניים?
30. רכבת אחת יוצאת בשעה 7:00 מתחנה א' לכיוון תחנה ב' המרוחקת ממנה 300 ק"מ. בשעה 8:30 יוצאת מתחנה ב' לכיוון תחנה א' רכבת אחרת שמהירותה קטנה ב-10 קמ"ש ממהירות הראשונה. הרכבות נפגשות בשעה 11:00. מצא את מהירות הרכבת הראשונה.
31. רכבת משא יוצאת בשעה 5:00 מעיר A לעיר B, המרוחקת ממנה 520 ק"מ במהירות 30 קמ"ש. רכבת משא שניה שמהירותה 35 קמ"ש יוצאת בשעה 9:20 מעיר B ל-A. באיזו שעה תיפגשנה הרכבות?
32. שתי מכוניות יוצאות מאותה נקודה, באותה שעה ובאותו כיוון, אחת במהירות 64 קמ"ש, והשניה - 72 קמ"ש. כעבור כמה זמן יהיה המרחק ביניהן 20 ק"מ?
33. אוטובוס יצא מתחנה A לכיוון תחנה B במהירות 80 קמ"ש. אוטובוס שני, שמהירות 90 קמ"ש, יוצא גם הוא לכיוון B מתחנה C, שמרחקה מ-A, 2.5 ק"מ (A, B, C על קו ישר, A בין B ל-C). כעבור כמה זמן ישיג האוטובוס השני את הראשון?
34. במערת הנטיפים "צומח" נטיף אחד במהירות של 2 מ"מ לשנה והשני - 1.6 מ"מ לשנה. כעבור כמה שנים יהיה נטיף אחד גדול מהשני במטר אחד?
- 35\*. פתור את בעיה 29, כאשר שני האנשים יוצאים מאותה נקודה באותו כיוון ומתחילים באותו זמן.
36. ילד יצא מביתו לבריכה במהירות של 4 קמ"ש. אחרי 15 דקות, יצא חברו הגר במרחק 200 מ' ממנו (יותר רחוק מהבריכה) אף הוא בכיוון הבריכה (באותה דרך). מהירותו - 5.5 קמ"ש. כמה זמן אחרי יציאת הילד השני, הוא השיג את הראשון?
37. שני נערים, שהמרחק בין בתיהם 250 מ', מחלקים עתונים לאורך רחוב, שמתחיל ליד ביתו של נער א' (כל אחד בצד אחר של הכביש). נער א' יצא בשעה 5:00 במהירות הקטנה ב-0.5 קמ"ש ממהירותו של ב'. ב' יצא לחלוקה בשעה 5:30. הם סיימו לחלק ב-9:00. חשב את המהירויות שלהם.
38. הולך רגל יצא לכיוון מסוים במהירות 8 קמ"ש. אחרי שעה יצא בעקבותיו הולך רגל שני, והלך במהירות 10 קמ"ש.  
 א. כמה שעות מאז יציאתו יגיע למרחק 4 ק"מ מהראשון?  
 ב. כמה זמן נוסף יחלוף עד שהולך הרגל השני יעבור את הראשון ב-4 ק"מ?

39. רכבת משא יוצאת מ- A ל- B בשעה 6:00 בבוקר. בשעה 7:30 יוצאת בעקבותיה מאותו מקום רכבת נוסעים במהירות הגדולה ב- 5 קמ"ש מזו של רכבת המשא. בשעה 8:30 משיגה רכבת הנוסעים את רכבת המשא ב- 21 ק"מ. חשב את מהירות רכבת המשא.
40. משתי נקודות שהמרחק ביניהן 6 ק"מ יוצאים 2 רוכבי אופניים באותו כיוון. אם הם יוצאים באותה שעה, אחד ישיג את השני כעבור 3 שעות. ואם הרוכב השני (נמצא מאחורי הראשון) יוצא שעה אחרי הראשון, הוא ישיגו אחרי 8 שעות משעת יציאתו. חשב את מהירויות הרוכבים.
41. משתי נקודות, שהמרחק ביניהן 9 ק"מ, יצאו באותו זמן 2 רוכבי אופניים. אם הם נוסעים זה לקראת זה, הם נפגשים אחרי 20 דקות, ואם הם נוסעים באותו כיוון, הם נפגשים כעבור 3 שעות. מה מהירות כל אחד?
42. המרחק בין A ו- B הוא 36 ק"מ. אם רמי ודני יוצאים באותה שעה משני המקומות הללו זה לקראת זה, הם נפגשים כעבור 4 שעות. אבל רמי יצא מ- A מוקדם מדני בשעה אחת ו- 12 דקות (הם יצאו זה לקראת זה). לכן, הם נפגשו כעבור 3 שעות ו- 20 דקות. מה מהירות כל אחד מהם?
43. מכונית דואר יוצאת בשעה 10:00 צפונה. בשעה 11:30 יוצאת דרומה מאותו סניף דואר מכונית דואר אחרת, ונוסעת במהירות הקטנה ב- 10 קמ"ש מזו של המכונית האחרת. בשעה 14:00 היה המרחק ביניהן 300 ק"מ. מהי מהירות המכונית הראשונה?
44. בשעה 5:00 יצאה רכבת מעיר א' לעיר ב'. באותה שעה יצאה באותו כיוון, מעיר ג' לעיר ב' (א' נמצאת בין ג' לב') רכבת שניה במהירות הקטנה ב- 40 קמ"ש ממהירות הרכבת הראשונה, והגיעה לעיר ב' בשעה 15:45 - שש שעות אחרי שהרכבת הראשונה הגיעה לשם.  
א. מה מהירות הרכבת הראשונה, אם המרחק בין א' ל- ב' קטן ב- 290 מהמרחק בין ג' ל- ב'?  
ב. מה המרחק בין א' לב'.
45. רכבת יצאה בשעה 6:40 מתחנה A לתחנה B. בשעה 11:00 יצאה רכבת שניה מנקודה C שמרחקה מ- A 100 ק"מ (C בין A ל- B) באותו כיוון במהירות גדולה ב- 5 קמ"ש מזו של הרכבת הראשונה. שתי הרכבות הגיעו ל- B בשעה 17:00. מה מהירות הרכבת הראשונה?
46. אדם צריך להגיע למושב שכן. אחרי 40 דקות עשה דרך הקטנה ב- 1.5 ק"מ מהדרך שנותרה לו. הוא הגדיל את המהירות ב- 1 קמ"ש ועשה קטע זה של הדרך ב- 45 דקות. מה המרחק למושב השכן?
47. מכונית יצאה בשעה 8:00 ליעד מסויים. בשעה 9:30, הספיקה לעבור דרך הגדולה ב- 16.5 ק"מ מזו שנותרה לה. בקטע השני של הדרך הגדיל הנהג את מהירותו ב- 4 קמ"ש והגיע בשעה 10:15. מה אורך הקטע הראשון של הדרך?

- 48\*. בשעה 10:00 יצאו שתי מכוניות מאותה נקודה ובאותו כיוון. אחרי שעשה דרך של 60 ק"מ, וכאשר הבחין אחד הנהגים, שהנהג השני לא נמצא בקרבתו, חזר על עקבותיו, ופגש את הנהג השני בשעה 11:30. באיזו מהירות נסע הנהג השני, אם מהירותו קטנה ממהירות הנהג הראשון ב-20 קמ"ש?
49. שני אנשים הולכים ברגל על מסלול שאורכו 9.5 ק"מ. האחד במהירות 5.5 קמ"ש והאחר במהירות 4 קמ"ש. הראשון הספיק להגיע לקצה השני של המסלול ובדרכו חזרה פגש את השני, שהיה עוד בדרכו הלוך. כעבור כמה זמן משעת היציאה פגש אותו ובאיזה מרחק מנקודת היציאה?
- 50\*. אדם קשר את הסירה שלו למוט והחל לשחות במורד הנהר עם הזרם, שמהירותו 3 קמ"ש. אחרי 10 דקות החל לשחות חזרה ואחרי 12 דקות נוספות פגש את הסירה, שהשתחררה 12 דקות אחרי תחילת השחיה של האדם. מה מהירות האדם במים עומדים?
51. נער יצא לטיול של 10 ימים, והוא מטייל בממוצע 9 שעות ליום. חברו יצא לאותו מסלול על אופניים במהירות של 10 קמ"ש. הוא מטייל במשך 6 ימים ורוכב בממוצע 6 שעות ליום. מה מהירות הנער המטייל רגלית ומה היחס בינה לבין מהירות רוכב האופניים?
52. רוכב אופניים יצא ליעד המרוחק 24 ק"מ. שעה אחרי יצא רוכב אופניים שני במהירות  $V_2$ , שהיחס בינה למהירותו של הרוכב שיצא לפניו  $V_1$  הוא כמו  $V_2:V_1=3:2$ . והגיע יחד עם הרוכב השני ליעד המבוקש. מה מהירות הרוכב הראשון?
53. רוכב אופניים יצא לעיר A במרחק 25 ק"מ ממנו. אחרי 45 דקות יוצאת מאותו מקום לכיוון A מכונית, שמהירותה מתייחסת למהירות רוכב האופניים כמו 5:2. המכונית מגיעה ליעד 30 דקות לפני רוכב האופניים. חשב את המהירות שלהן.
- 54\*. מהירות סירה במים עומדים מתייחסת למהירות הזרם כמו 23:2. סירה שטה נגד הזרם במשך 4 שעות ועשר דקות. כמה זמן נחוץ לה כדי לעבור את הדרך עם הזרם?
55. משאית מובילה סחורה במסלול קבוע. אם היא תגדיל את מהירותה ב-20 קמ"ש, היא תחסוך שעה אחת של נסיעה, ואם היא תקטין את מהירותה באותה מידה, תארך הדרך שעתיים נוספות. מהי מהירות המשאית בד"כ?
56. שחיין משנה את סגנון השחיה שלו וע"י כך מגדיל את מהירות השחיה שלו ב-2 משי"ג, ואז הזמן שלוקח לו לסיים את המסלול הרגיל שלו קטן ב-4 שניות. לעומת זאת, בסגנון אחר, המוריד את מהירות שחיתו ב-1 משי"ג, גדל הזמן ב-4 שניות. כמה זמן לוקח לו לסיים את המסלול הקבוע, אם אינו משנה את סגנון השחיה שלו?

57. שתי משפחות חוזרות מטיול בשעת עומס בכבישים. אחד הנהגים עובר לדרך עוקפת, שארוכה ב- 10 ק"מ מהדרך הרגילה. הוא נוסע במהירות גדולה ב- 10 קמ"ש ממההירות שהיה נוסע בכביש העמוס, ומרוויח ע"י כך חצי שעה. הנהג השני מתרחק לדרך יותר ארוכה ב- 10 ק"מ מזו שבחר הנהג הראשון, ונוסע במהירות הגדולה ב- 40 קמ"ש ממהירות הנהיגה בכביש העמוס ומרוויח שעה וחצי. כמה זמן אורכת הנהיגה בכביש העמוס?
58. שני אנשים הולכים כל ערב מ- A עד B לשיפור הכושר. הראשון עובר את הדרך הזו ב- 3 שעות והשני בשעתיים. אם אחד יצא מ- A לכיוון B והשני יצא מכיוון B לכיוון A. כמה זמן יעבור עד שיפגשו?
59. שני ילדים מתאמנים על מסלול החלקה על קרח. אחד מהם עובר את המסלול ב- 4 דקות והשני ב- 5 דקות. הם מתחילים לנוע זה לקראת זה. כעבור כמה זמן יפגשו אם לילד השני נפתח השרוך לפני תחילת ההחלקה ולקח לו דקה לקשור אותו.
60. שני אנשים מתאמנים לקראת תחרות מרוץ סוסים לאורך מסלול קבוע. אחד עובר עם סוסו את כל המסלול ב- 6 דקות והשני ב- 9 דקות. הרוכבים יוצאים מקצות המסלול זה לקראת זה. השני יוצא דקה אחרי הראשון. כעבור כמה זמן יגיעו למרחק של שליש המסלול ביניהם?
61. אדם נסע לכיוון עיר A במהירות 50 קמ"ש. אך אחרי שעה וחצי, ראה שאם ימשיך במהירות זו, יאחר ב- 27 דקות. לכן, הגדיל את המהירות ב- 10 קמ"ש, וכך הגיע לעיר במועד. מהו המרחק שהיה עליו לנסוע?
62. אדם נסע במהירות 60 קמ"ש. אחרי נסיעה של חצי שעה, אירע תקר בגלגל. תיקון התקר ארך רבע שעה. אחרי התיקון, הגביר האדם את מהירותו ב-  $\frac{1}{3}$  ממההירות הקודמת, וכך הגיע בזמן ליעדו. כמה זמן נמשכה נסיעתו?
63. שני הולכי רגל הולכים לאורך מסלול מסויים במהירות 4 קמ"ש. אחרי הליכה של שעה וחצי התעכב אחד מהם בדרך למשך 24 דקות. לכן הגדיל את מהירותו ב- 1 קמ"ש. וכך הגיע באותו זמן כמו האחר. מה אורך המסלול?
64. אדם היה צריך להגיע לעיר A בזמן מסויים. הוא נסע במשך שעה אחת 3 ק"מ וחישב, שאם ימשיך באותה המהירות, הוא יאחר ב- 20 דקות. לכן, הגדיל את מהירותו ב- 0.5 קמ"ש ואז הגיע 40 דקות יותר מוקדם. כמה זמן צריכה היתה להימשך הנסיעה?
65. אדם רכב על סוס במהירות של 5 קמ"ש ליעד מסויים. בדרך חזרה, אחרי שעשה מחצית מהדרך נפל האיש מהסוס. אחרי עיכוב של 25 דקות במרפאה, הזהיר את הסוס במהירות הגדולה ב- 1 קמ"ש מהקודמת והגיע בחזרה 10 דקות אחרי הזמן. כמה זמן לקחה הדרך הלוך?
66. רוכב אופניים קבע להיפגש עם חברו בבי"ס שדה. הוא נסע במהירות של 15 קמ"ש, אך אחרי שעה ו- 20 דקות, התעכב למשך רבע שעה כדי להצטייד

במצרכי מזון. בקטע השני של הדרך הוא הגדיל את מהירותו בשליש מהמהירות הקודמת, וכך הגיע למקום המפגש 10 דקות לפני הזמן שקבע. אחרי כמה זמן הוא היה אמור לפגוש את חברו?

67. שליח נסע במהירות של 6 קמ"ש. בדרכו חזרה, אחרי נסיעה של שתיים, התעכב למשך 10 דקות. לכן הגדיל את המהירות ב-25%, וכך הגיע חזרה באותו זמן כמו בנסיעה לכיוון ההפוך. מה המרחק שעשה השליח באותו יום?

68. אניית משא יוצאת להוביל מטען למרחק 480 ק"מ. אחרי 4 שעות יוצאת מאותו מקום לאותו כיוון אניית משא נוספת באותה מהירות. אחרי שייט של 6 שעות היא מגדילה את מהירותה ב-4 קמ"ש ומגיעה ליעד שעה אחת אחרי האנייה הראשונה. מה מהירות האנייה השניה בחלק השני של הדרך?

69. מיניבוס נסע מאיזור חיפה לאילת. במהירות 72 קמ"ש. בדרכו חזרה, אחרי שתיים נסיעה, התעכב למשך 27 דקות. הוא המשיך את הנסיעה במהירות הקטנה ב-12 קמ"ש מהמהירות הקודמת, ואחר להגיע לחיפה בשעה ורבע. כמה זמן ארכה הנסיעה לאילת?

70. אנייה עוברת מרחק בין שני נמלים ב-8 שעות. יום אחד, אחרי שיט של שעה, התעכבה האנייה למשך 54 דקות. היא המשיכה את נסיעתה במהירות גדולה ב-20 קמ"ש מהמהירות הקודמת וכך הגיעה חזרה מחצית השעה יותר מוקדם מאשר בדרך כלל. מה המרחק בין שני הנמלים?

71. רכבת עוברת מרחק בין שתי ארצות במשך 16 שעות. בנסיעה מסויימת, אחרי נסיעה של 6 שעות, משך אחד הנוסעים בטעות את ידית האזעקה, והרכבת נעצרה למשך 20 דקות. אחר כך המשיכה את נסיעתה במהירות הגדולה ב-40 קמ"ש מהמהירות שלפני העצירה. הרכבת הגיעה ליעדה 3 שעות לפני הזמן הרגיל. מהי מהירות הרכבת תחילה?

## ב. מעלה שניה

72. רוכב אופניים יצא מביתו לנקודה במרחק 75 ק"מ וחזר ליעדו במהירות הקטנה ב-5 קמ"ש מהקודמת. מה היתה מהירות הרוכב בהתחלה, אם הנסיעה הלוך ושוב ארכה  $6\frac{3}{4}$  שעות?

73. ספורטאי מתאמן לקראת תחרות גלישה לאורך מסלול של 6 ק"מ. מהירותו בכיוון אחד - ירידה, גדולה ממהירותו בכיוון ההפוך, ב-10 קמ"ש. הספורטאי חזר לנקודת ההתחלה כעבור חצי שעה. מה היתה מהירותו בחזרה?

74. אוטובוס עובר מרחק של 360 ק"מ במהירות קבועה. אם יקטין את מהירותו ב-10 קמ"ש, תמשך הנסיעה במחצית השעה יותר. מה המהירות הרגילה של האוטובוס?

75. מוניית ואוטובוס נוסעים מתל-אביב צפונה למרחק של 120 ק"מ. מהירות האוטובוס קטנה ב- 10 קמ"ש ממהירות המונית, ולכן הוא מגיע ליעד 10 דקות אחריה. מהי מהירות המונית?
76. המרחק בין שני מקומות הוא 24 ק"מ. אורי הולך על מסלול זה במהירות יותר גדולה ב- 2 קמ"ש מחברו. לכן, הוא מגיע לסיום המסלול שעתיים לפניו. מה מהירות ההליכה של אורי?
77. אדם עושה את הדרך מביתו עד העבודה במרחק 3.75 ק"מ ברגל ב- 32 דקות יותר מאשר באופניים. מהירותו באופניים גדולה ב- 8 קמ"ש ממהירותו ברגל. כמה זמן נמשכת ההליכה ברגל?
78. שליח יצא ליעד מסויים במרחק 15 ק"מ. בדרך חזרה היה צריך לעבור דרך מקום נוסף וזה האריך את הדרך ב- 3 ק"מ. לכן הוא הגדיל את מהירותו ב- 1 קמ"ש, ואז התארך הזמן רק ב-  $\frac{1}{8}$  השעה. כמה זמן ארכה הדרך חזרה?
79. אוטובוס ישיר נוסע מעיר א' לעיר ב' לאורך דרך של 91 ק"מ. אוטובוס מאסף נוסע גם הוא מעיר א' לעיר ב'. המאסף יוצא שעה לפני האוטובוס הישיר ומגיע לעיר ב' 12 אחריו. מהירות האוטובוס הישיר גדולה ב- 30 קמ"ש ממהירות המאסף. מה מהירות המאסף? כמה זמן ארכה נסיעתו?
80. רוכב אופניים נוסע לאורך 34 ק"מ במשך 2 שעות ו- 25 דקות. בקטע דרך שאורכו 14 ק"מ, הכביש היה משובש, ולכן הקטין את מהירותו ב- 2 קמ"ש לעומת המהירות בקטע האחר. כמה זמן נסע לאורך הקטע התקין?
81. אדם רכב על סוס לאורך קטע דרך, שאורכו 25 ק"מ. אחרי 15 ק"מ התעייף הסוס ומהירותו קטנה ב- 2 קמ"ש. הקטע השני נמשך רבע שעה פחות מהראשון. חשב כמה זמן דהר הסוס בקטע השני.
82. אדם שט בסירה לאורך 24 ק"מ עם הזרם, ואחר כך חוזר לנקודת ההתחלה. משך השייט היה שעה ו- 45 דקות. מה מהירות הסירה במים עומדים, אם מהירות הזרם 4 קמ"ש?
83. מטוס טס עם הרוח ליעד המרוחק 224 ק"מ, שוהה שם שעה לתדלוק וחוזר. כל הדרך לוקחת 2.5 שעות. מה מהירות הרוח באותה שעה, אם מהירות המטוס כשאינו רוח היא 300 קמ"ש?
84. סירה שטה עם הזרם לאורך 99 ק"מ ב- 24 דקות פחות מאשר נגד הזרם. מהירות הסירה במים עומדים היא 50 קמ"ש. מה מהירות הזרם?
85. אדם שט בסירה לאורך 72 ק"מ כיוון הזרם. מהירות הסירה במים עומדים 30 קמ"ש. אם מהירות הזרם תיחלש ב- 4 קמ"ש, יגדל זמן השייט ב- 15 דקות. מה מהירות הזרם תחילה?

86. אנייה שטה עם הזרם לאורך 414 ק"מ. מהירות האנייה 40 קמ"ש. כאשר היא שטה בכיוון הפוף, נחלש הזרם ב- 2 קמ"ש. זמן השייט בחזרה היה ארוך מהזמן הלוך ב- 2.5 שעות. מה מהירות הזרם?
87. שני רוכבי אופנוע קבעו נקודת מפגש במקום הנמצא במרחק 21 ק"מ מהראשון ו- 20 ק"מ מהשני. הרוכב הראשון יצא לדרך בשעה 8:00 והשני בשעה 8:10. הם הגיע לנקודת המפגש באותו זמן. מתי נפגשו השניים, אם מהירות הרוכב השני גדולה ב- 1 קמ"ש ממהירותו של הראשון?
88. בשעה 6:00 יצא אוטובוס מתל-אביב לאילת מרחק 340 ק"מ. בשעה 6:30 יצא אוטובוס מבאר שבע לאילת מרחק 250 ק"מ. מהירות האוטובוס השני קטנה ב- 20 קמ"ש מזו של הראשון והוא מגיע לאילת 25 דקות אחריו. מה מהירות האוטובוס הראשון, ובאיזו שעה הגיע לאילת?
89. אדם נסע לאורך קטע של 120 ק"מ ואח"כ לאורך קטע של 50 ק"מ במהירות גדולה ב- 20 ק"מ ממהירותו בקטע הראשון. המהירות הממוצעת בדרך שעשה היא 85 קמ"ש. מה מהירותו בקטע הראשון?
90. בשעה 10:00 יצא רוכב אופניים מתל-אביב לירושלים, מרחק 64 ק"מ. בשעה 11:20 יצא בעל קטנוע מתל-אביב לירושלים במהירות הגדולה ב- 16 קמ"ש מזו של רוכב האופניים והוא מגיע לירושלים 40 דקות לפני רוכב האופניים. מתי הגיע רוכב האופניים לירושלים?
91. אדם נסע מ- A ל- B במהירות גדולה ב- 10 קמ"ש מאשר נסיעתו מ- B ל- A. המרחק בין A ל- B הוא 40 ק"מ. המהירות הממוצעת שלו היתה 24 קמ"ש.  
א. חשב מה מהירותו בכל כיוון.  
ב. כמה זמן נסע מ- B ל- A?
- 92\*. מכונית עוברת דרך בכיוון אחד בעליה במהירות קטנה ב- 20 קמ"ש מאשר הדרך בכיוון ההפוך. המהירות הממוצעת של המכונית בדרך זו היא 48 קמ"ש. כמה זמן נמשכה דרכה בכל כיוון?
93. מירי הולכת יום יום ברגל לאורך מסלול של 10 ק"מ. יום אחד אחרי הליכה של חצי שעה, נזכרה שעליה לסיים את ההליכה 24 דקות לפני הזמן, לכן הגבירה את מהירותה ב- 1 קמ"ש. מה היתה מהירותה הרגילה וכמה זמן נמשכה בדי"כ הליכתה?
94. אדם נוסע לעיר מעבר לגבול במדינה שכנה במרחק 640 ק"מ. בדרך חזרה התעכב בגבול 40 דקות. לכן הגדיל את מהירותו ב- 4 קמ"ש, וכך הגיע בחזרה באותו זמן כמו בדרך הלוך. מה מהירות נסיעתו בדרך הלוך?
95. אדם הולך במסלול של 20 ק"מ. אחרי שעתיים וחצי התעייף מאד ועלה על קטנוע של מכר שעבר בסביבה. כך הגיע ליעד בשעתיים יותר מוקדם מאשר תכנן. מהירות הקטנוע היתה גדולה ב- 16 קמ"ש ממהירות האדם. חשב את מהירות האדם.

96. הולך רגל ורוכב אופניים יצאו מעיר א' לעיר ב'. הולך הרגל הלך לאורך שבילים והדרך שלו היתה 24 ק"מ. רוכב האופניים נסע על הכביש בדרך ארוכה ב- 4 ק"מ מזו של הולך הרגל. מהירות רוכב האופניים גדולה ב- 3 קמ"ש מזו של הולך הרגל. הוא יצא שעה אחת אחרי הולך הרגל והגיע שעה לפניו. כמה זמן נמשכה הדרך של הולך הרגל?
97. מכונית מסחרית עוברת את המרחק בין שתי ערים שהוא 120 ק"מ, בשעה אחת יותר ממכונית פרטית. אם המסחרית תגדיל את מהירותה ב- 2 קמ"ש והפרטית תגדיל ב- 8 קמ"ש, תעבור המכונית הפרטית את המרחק הנ"ל בשעה ורבע פחות מהמסחרית. מה המהירות של כל מכונית.
98. אדם נוסע לאורך 110 ק"מ במהירות מסויימת וממשיך במהירות הגדולה ב- 10 קמ"ש מהקודמת לאורך מרחק כפול מהקודם. כל הדרך נמשכה 12 שעות ו- 5 דקות. מה מהירותו בקטע הראשון וכמה זמן נסע לאורך קטע זה?
99. אדם נסע ליעד המרוחק 260 ק"מ, ותכנן להגיע לשם בשעה מסויימת. ואולם, אחרי 2.5 שעות נסיעה, עשה הפסקה של 27 דקות, ולכן הגדיל את מהירותו ב- 10 קמ"ש, וכך הגיע ליעדו לפי המתוכנן. מה היתה מהירותו בהתחלה?
100. שתי קבוצות מטיילים נסעו בשתי מכוניות לאורך מסלול של 180 ק"מ באותה מהירות. אחרי נסיעה של שעתיים, עצרה אחת המכוניות ליד מצפה למשך רבע שעה. אח"כ הגבירו את המהירות ב- 20 קמ"ש והשיגו את המכונית האחרת בסוף המסלול. באיזו מהירות נסעה מכונית הראשונה?
101. רוכב אופניים יצא בשעה 7:00 והיה צריך להגיע למקום המרוחק ממנו 30 ק"מ בשעה מסויימת. אחרי 20 דקות נסיעה נפגע גלגל האופניים מאבן והוא התעכב 25 דקות כדי לתקן אותו. בהמשך הדרך נסע במהירות הגדולה ב- 5 קמ"ש ממהירותו הקודמת, וכך הגיע ליעדו בזמן. מה היתה מהירותו תחילה ובאיזו שעה הגיע ליעד?
102. נער נסע על אופניים לבית סבתו במרחק 11 ק"מ מביתו. למחרת התחיל לנסוע בכיוון ביתו. אחרי נסיעה של שעה הוא התעכב למשך 20 דקות. הוא המשיך את נסיעתו במהירות הגדולה ב- 1.5 קמ"ש ממהירותו הקודמת והגיע הביתה 10 דקות יותר מאוחר מהמתוכנן. לכמה זמן תכנן את נסיעתו?
103. רכבת משא יוצאת בשעה 5:00 מ- A להוביל מטען ל- B הנמצאת במרחק 720 ק"מ. בשעה 5:45 יוצאת מ- B לכיוון A באותה המהירות רכבת משא שניה. אחרי נסיעה של שלוש שעות היא מתעכבת למשך רבע שעה, ובהמשך מגדילה את מהירותה ב- 8 קמ"ש. הרכבות נפגשות באמצע הדרך. באיזו שעה נפגשות הרכבות?
104. אוטובוס יצא בשעה 9:00 לאילת מרחק 320 ק"מ. בשעה 9:15 יצא בעקבותיו אוטובוס שני באותה המהירות. אחרי נסיעה של חצי שעה, אירעה תקלה באוטובוס השני והיא תוקנה כעבור 27 דקות. בהמשך הדרך הגביר הנהג את המהירות ב- 20 קמ"ש, והגיע לאילת יחד עם האוטובוס הראשון. באיזו שעה נפגשו האוטובוסים באילת?

105. אדם רכב על קטנוע למרחק 140 ק"מ. בדרכו חזרה, אחרי נסיעה של שעתיים, התעכב למשך חצי שעה במסעדה, וכדי לא לאחר, הגדיל את מהירותו ב- 10 קמ"ש והגיע ליעדו 10 דקות לפני הזמן המתוכנן. כמה זמן עבר מאז צאתו ועד חזרתו?

106. משאית מובילה מטען, יצא בשעה 6:00 למקום הנמצא במרחק 350 ק"מ. בשעה 8:30 התעכב הנהג למשך מחצית השעה, ואח"כ נסע במהירות הקטנה ב- 5 קמ"ש מהמהירות ההתחלתית. הנהג הגיע שעה אחת יותר מאוחר מהמתוכנן. מה היתה המהירות ההתחלתית ומתי הגיעה המשאית ליעדה?

107. מכונית נוסעת לאורך כביש, שאורכו 480 ק"מ. אחרי 3 שעות נסיעה בכביש זה, הגיעה לקטע כביש משובש ולכן נסעה במשך שעה במחצית המהירות הקודמת. הקטע האחרון של הדרך היה כביש חדש ובו נסעה המכונית במהירות הגדולה ב- 20 קמ"ש מהמהירות הראשונה, וכך הגיעה המכונית ליעדה בזמן המתוכנן. מה היתה מהירות המכונית בהתחלה?

108. רכבת משא נוסעת למרחק 540 ק"מ במהירות קבועה. באותו זמן יוצאת רכבת משא אחרת, הנוסעת על אותו מסלול באותה מהירות. אחרי 3 שעות, היא פורקת מספר קרוניות עם מטען במשך מחצית השעה, וממשיכה במהירות הגדולה בחצי מהמהירות הקודמת. בסופו של דבר, היא מגיעה ליעד שעה וחצי לפני הרכבת הראשונה. כמה זמן נמשכה נסיעת הרכבת הראשונה?

109. מכונית נוסעת למרחק 420 ק"מ. אחרי נסיעה של 3.5 שעות מגלה הנהג תקלה במכונית, מתקן אותה במשך רבע שעה, וממשיך את הנסיעה במהירות הקטנה בשליש מהמהירות הקודמת, וכך מגיע ליעדו שעתיים אחרי הזמן המתוכנן. כמה זמן היה מתוכנן לנסוע?

110. שתי רכבות נוסעות באותה מהירות ליעד הנמצא במרחק 675 ק"מ. אחת הרכבות מתעכבת אחרי שעתיים של נסיעה למשך 40 דקות. היא ממשיכה בנסיעתה במהירות הגדולה ב- 20% ממהירותה הקודמת, והיא מגיעה ליעדה חצי שעה לפני הרכבת האחרת. מה היתה מהירות הרכבת השניה אחרי העצירה?

111. שתי מכוניות יצאו ליעד המרוחק 180 ק"מ באותה המהירות. אחרי נסיעה לאורך 50% מהדרך, עצר אחד הנהגים למשך 15 דקות כדי להחליף גלגל. הוא המשיך לנסוע לאורך 25% נוספים מהדרך במהירות קטנה ב- 15 קמ"ש מהקודמת, ואז הסתבר, שגם הגלגל שהוחלף אינו תקין. לכן עצר. המכונית הראשונה המשיכה עוד 15 דקות עד שהגיעה ליעדה. כמה זמן נסעה המכונית הראשונה?

112. שתי מכוניות יצאו ליעד, הנמצא במרחק 144 ק"מ באותה מהירות. מכונית א' עצרה אחרי שעתיים למשך 24 דקות ואח"כ המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב- 9 קמ"ש מהמהירות הקודמת. נהג מכונית ב', אחרי שעשה  $\frac{3}{4}$  מהדרך חש עייפות ולכן הקטין את המהירות בשליש מהמהירות הקודמת.

הוא הגיע ליעד חצי שעה אחרי המכונית הראשונה. מה המהירות ההתחלתית שלהם?

113. שתי חלליות שוגרו מאותו מקום ובאותו זמן. הן נעות סביב כדור הארץ. אחת החלליות יכולה להקיף את כדור הארץ ב- 20 שעות יותר מאשר השניה. חשב בכמה שעות יכולה כל חללית להקיף את כדור הארץ, אם הן נפגשות כל 24 שעות, כאשר הן נעות בכיוונים מנוגדים.

114. שתי חלליות מקיפות את כדור הארץ כשאחת יכולה לעשות סיבוב שלם ב- 10 שעות פחות מהשניה. כאשר הן נעות באותו כיוון, הן נפגשות כל 60 שעות. חשב בכמה זמן יכולה כל חללית להקיף את כדור הארץ.

115. שני אנשים מחליקים במסלול עגול, שהיקפו 2.4 ק"מ. הם נעים בכיוונים מנוגדים, ונפגשים כל 2 דקות. אחד המחליקים עושה את המסלול כולו ב-  $\frac{9}{10}$  הדקה יותר מההשני. מה המהירות של כל אחד מהם?

116. שני אנשים יצאו זה לקראת זה באותו הזמן ונפגשו כעברו 3 שעות ו- 36 דקות. הם המשיכו את נסיעתם, והראשון הגיע לקצה הדרך 3 שעות יותר מוקדם מהזמן, שהגיע השני לקצה האחר של הדרך. בכמה זמן יכול כל אחד לעבור את כל הדרך?

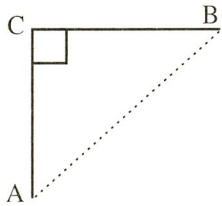
117. שני רוכבי אופניים מתאמנים לקראת תחרות על מסלול מסוים. כאשר הם נוסעים מקצות המסלול זה לקראת זה, הם נפגשים כעבור 4 שעות ו- 12 דקות. כל אחד מהם ממשיך את הנסיעה עד סיום המסלול, ואז מגיע השני 3.5 שעות אחרי הראשון. בכמה זמן יכול כל אחד לעבור את כל המסלול?

118. שתי מכוניות נוסעות זו לקראת זו מקצות מסלול, שאורכו 120 ק"מ, וקבעו להיפגש באמצע הדרך. מכונית א' מגיעה למפגש חצי שעה אחרי מכונית ב'. אחרי המפגש כל אחת ממשיכה את דרכה עד קצה הדרך (כ"א לקצה אחר). הם מגיעות באותו זמן לסיום. היות שהמכונית הראשונה הגדילה את מהירותה ב- 12 קמ"ש, והשניה הקטינה את מהירותה ב- 8 קמ"ש. מה היו מהירותותיהן בתחילה?

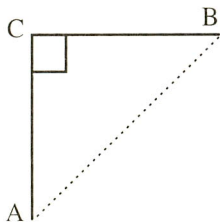
119. רוכב אופניים יוצא בשעה 7:00 בבוקר מ- A ל- B מרחק 30 ק"מ. בשעה 8:20 יוצא מ- B ל- A רוכב שני. הם נפגשים בנקודה שהיא שליש המרחק מ- B. הם ממשיכים בדרכם וכעבור 24 דקות הם התרחקו זה מזה 10 ק"מ. מה המהירותות רוכבי האופניים.

120\*. גיל יצא בשעה 10:00 מאילת לכיוון עמית שגר באזור מרכז מרחק 350 ק"מ מאילת. בשעה 12:00 יצא עמית לכיוון אילת וחלף על פני גיל בלי להבחין בו בשעה 15:00. כל אחד מהם המשיך בדרכו ליעדו. גיל הגיע לתל-אביב רבע שעה לפני שעמית הגיע לאילת. באיזו מהירות נסע כל אחד?

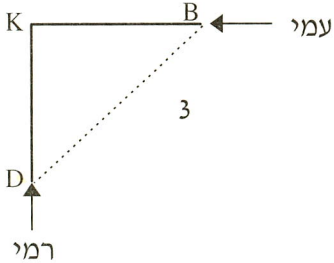
121\* רכבת אחת יוצאת בשעה 6:00 מ- A לכיוון B במרחק 540 ק"מ. בשעה 8:30 יוצאת מ- B רכבת לכיוון A והיא פוגשת את הרכבת הראשונה בשעה 10:30. כל רכבת ממשיכה ליעדה. הרכבת מ- A מגיעה ל- B שעה אחת ו- 45 דקות לפני שהרכבת השנייה מגיעה ל- A. מצא את מהירויות הרכבות.



122\* שני אנשים A ו- B יוצאים מנקודה C, האחד מזרחה והשני דרומה. בשלב מסוים בדקו את תמונת המצב שלהם וראו, ש- A התרחק מ- C ב- 3 ק"מ יותר ממה שהתרחק B מ- C. המרחק ביניהם היה 15 ק"מ.  
 א. חשב את מרחקי A ו- B מהנקודה C.  
 ב. אם הם הגיעו למרחקים הני"ל 3 שעות אחרי יציאתם מ- C, חשב את המהירויות שלהם.



123\* שני אנשים נמצאים על גדה אחת של נהר בנקודה A, וצריכים להגיע לגדה השנייה בנקודה B (רוחב הנהר אחד מהם הולך במשך 12 דקות לאורך גדת הנהר AC וכאשר הוא מגיע ל- C עובר על הגשר CB במשך רבע שעה. מהירותו לאורך הגדה היתה גדולה פי 3 ממהירותו על הגשר. האדם השני עובר בעזרת סירה ישירות מ- A ל- B כאשר  $AB = 1.3$  ק"מ. חשב את המהירות לאורך הגשר.



124\* עמי ורמי נמצאים כל אחד במרחק 4 ק"מ מנקודה K. עמי נמצא מזרחה מ- K ורמי דרומית ל- K. אחרי שנעו לעבר K במשך 24 דקות, היה המרחק ביניהם 3 ק"מ. באיזו מהירות נע כל אחד לעבר K, אם המהירות של עמי גדולה ב- 1 קמ"ש מזו של רמי?

125\* רכבת יוצאת מתחנה A ונוסעת לכיוון תחנה B דרך תחנות C, הנמצאות 25 ק"מ מ- A ו- D (סדר התחנות: A, C, D, B). כאשר הרכבת נמצאת ב- C יוצאת לעברה מתחנה B רכבת אחרת, שמהירותה גדולה פי 2 ממהירות הרכבת הראשונה. הרכבת הראשונה מגיעה ל- D, עוצרת ל- 5 דקות וממשיכה לכיוון B. 14 דקות אחרי שעזבה את D היא פוגשת את הרכבת שיצאה מ- B. הרכבת הראשונה מגיעה ל- B, ו- 45 דקות אחריה מגיעה חזרה ל- B גם הרכבת השנייה, שהספיקה להגיעה ל- A ובחזרה ללא הפסקות. חשב את מהירות הרכבת הראשונה ואת המרחקים בין התחנות C ו- D, אם ידוע, שהרכבת המהירה עוברת את הקטע BD בשתיים.

## תשובות.

1. א. 180 ק"מ ב. 135 ק"מ ג. 30 ק"מ ד. 435 ק"מ א. 2.  $75(a-1)$ ,  $60a$   
 ב. אותה הדרך,  $60a = 75(a-1)$ ,  $a = 5$ , ג. זמן הנסיעה של הראשונה בשעות:  $a = 5$ ,  
 ד. זמן הנסיעה של המכונית השניה:  $a-1=4$  ואורך הדרך בק"מ:  $60 \cdot 5 = 300$   
 3. א.  $2a$ ,  $3(a-2)$  ב.  $2a = 3(a-2)$ , אותו המסלול ג. המהירות הראשונה בקמ"ש -  $a = 6$ ,  
 ד. המהירות השניה - 4, הדרך - 12 א. 4.  $60a$ ,  $65(a-0.5)$  ב.  $60a + 65(a-0.5) = 280$ ,  
 בהתחלה, ביתרת הדרך ג.  $a = 2.5$ , החלק הראשון לקח 2.5 שעות  
 ד. החלק השני ארך שעתיים, חלקי הדרך - 150 ק"מ ו- 130 ק"מ 5. 4 ק"מ  
 6. 15 קמ"ש, 60 ק"מ. 7. 105 דקות, 900 מטר 8. 4.5 ש' 9. 25 דקות,  $1\frac{2}{3}$  ק"מ  
 10. בשעה 13:50 11. בשעה 13:30 12. 95 קמ"ש 13. 30 ד' 14. 3.5 ש'  
 15. 96 קמ"ש 16. 95 ד' 17. 7 ימים 18. 9 שני 19. 10 ש' 20. 840 קמ"ש  
 21. 24 קמ"ש 22. שעתיים 23. בשעה 8:20 24. א. להגדיל ב- 6 קמ"ש ב. ללא  
 שינוי ג. להקטין ב- 4 קמ"ש 25. בשעה 15:00 26. 24 קמ"ש, באמצע 27. בשעה  
 11:30 28. 12 קמ"ש, 14 קמ"ש 29. 1 דקה 30. 50 קמ"ש 31. בשעה 15:20 32.  
 2.5 ש' 33. רבע שעה 34. 2500 שנה 35. 8.25 ד' 36. 48 ד' 37. 4 קמ"ש, 4.5 קמ"ש  
 38. א. 2 ש', 4 ש' ב. 7 ש' 39. 36 קמ"ש 40. 12 קמ"ש, 10 קמ"ש 41. 15 קמ"ש,  
 12 קמ"ש 42. 4 קמ"ש, 5 קמ"ש 43. 50 קמ"ש 44. 120 קמ"ש, 570 ק"מ  
 45. 30 קמ"ש, 13.5 ק"מ 47. 39 ק"מ 48. 30 קמ"ש 49. 8 ק"מ, שעתיים  
 50. 18 קמ"ש 51. 2:5, 4 קמ"ש 52. 8 קמ"ש 53. 12 קמ"ש, 30 קמ"ש 54. 3.5 ש'  
 55. 60 קמ"ש 56. 12 שניות 57. 3.5 שעות 58.  $1\frac{1}{5}$  ש' 59.  $2\frac{2}{3}$  ד' 60.  $2\frac{4}{5}$  ד'  
 61. 210 ק"מ 62. שעה וחצי 63. 14 ק"מ 64. 7:40 ש' 65. 3 ש' 66. 3 ש'  
 67. 17 ק"מ 68. 24 קמ"ש 69. 6 ש' 70. 640 ק"מ 71. 80 קמ"ש 72. 25 קמ"ש  
 73. 20 קמ"ש 74. 90 קמ"ש 75. 90 קמ"ש 76. 6 קמ"ש 77. 50 ד' 78. 2 ש'  
 או  $1\frac{1}{8}$  79. 35 קמ"ש, 2.6 ש' 80.  $1\frac{1}{4}$  שעות 81.  $1\frac{1}{4}$  ש' 82. 28 קמ"ש  
 83. 20 קמ"ש 84. 5 קמ"ש 85. 6 קמ"ש 86. 6 קמ"ש 87. בשעה 9:30 88. 80  
 קמ"ש, בשעה 10:25 89. 80 קמ"ש 90. בשעה 14:00 91. א. 30 קמ"ש, 20 קמ"ש  
 ב. שעתיים 92. בירידה - דקה אחת, בעליה - 1.5 דקות 93. 4 קמ"ש, 2.5 ש'  
 94. 60 קמ"ש 95. 4 קמ"ש 96. 6 97. 30 קמ"ש, 40 קמ"ש 98. 20 קמ"ש, 5.5 ש'  
 99. 50 קמ"ש 100. 60 קמ"ש 101. 15 קמ"ש, בשעה 9:00 102. שעה ו- 50 דקות  
 103. בשעה 14:00 104. בשעה 13:00 105.  $9\frac{1}{6}$  ש' 106. 50 קמ"ש, בשעה 14:00  
 107. 80 קמ"ש 108. 9 ש' 109. 7 ש' 110. 90 קמ"ש 111. 4 ש' או 3 ש' 112. 36  
 קמ"ש 113. 40 י', 60 י' 114. 20 ש', 30 ש' 115. 40 קמ"ש, 32 קמ"ש 116. 6 ש', 9  
 ש' 117. 10.5 קמ"ש, 7 קמ"ש 118. 60 קמ"ש, 40 קמ"ש 119. 10 קמ"ש, 15 קמ"ש  
 120. 40 קמ"ש, 50 קמ"ש 121. 90 קמ"ש, 80 קמ"ש 122. א. 12 ק"מ, 9 ק"מ ב.  
 4 קמ"ש, 3 קמ"ש 123. 2 קמ"ש 124. 4 קמ"ש,  
 3 קמ"ש 125. 30 קמ"ש, 47 ק"מ.

## סעיף 7 - בעיות עבודה והספק (תשובות בעמוד 320)

### א. מעלה ראשונה

#### עבודה כביטוי של יחידות זמן או מספר פריטים

1. 8 אנשים במפעל צריכים לבצע עבודה, שהוטלה עליהם במשך 12 ימים. אולם 2 מהאנשים שובצו לעבודה דחופה אחרת, ולכן עשו הנותרים את העבודה. כמה זמן נמשכה העבודה?
2. קבוצה של 6 פועלות עובדת במשך 15 ימים, כל יום 8 שעות, כדי לסיים עבודה מסוימת. לפני תחילת העבודה, הצטרפו אליהן שתי פועלות ממחלקה אחרת, והן עבדו 10 ימים לביצוע העבודה. כמה שעות עבדו כל יום?
3. קבוצה של 14 עובדים צריכה לעשות עבודה מסוימת. אחרי שעבדו 6 ימים, פרשו שניים מהפועלים, והיתר המשיכו יום אחד מעבר למתוכנן, עד שסיימו את העבודה. לכמה ימים תוכננה העבודה?
4. קבוצה אחת של 15 צבעים עבדה במשך 4 ימים בעבודה קבלנית, ואח"כ החליפה אותה קבוצה אחרת של 12 איש, שעבדו 6 ימים. בכמה זמן היתה יכולה לעשות את כל העבודה, קבוצה אחרת של 11 אנשים (כולם עובדים באותו קצב)?
5. עבודה במפעל תוכננה ל-9 פועלות למשך 10 ימים, כשהן עובדות אותו מספר שעות כל יום. אחרי שפועלות אלה עבדו 5 ימים, וכל יום בשעה אחת פחות מהמתוכנן, הצטרפו אליהן 3 עובדות למשך 3 ימים, בכל יום ב-3 שעות יותר מהמתוכנן. כמה שעות ביום היו הפועלות מתוכננות לעבוד?
6. פועל תכנן להכין בכל שעה 15 אריזות, וע"י כך לסיים את כל העבודה, שהוטלה עליו ב-32 שעות. אולם הוא הצליח לסיים את כל מלאכתו ב-24 שעות. כמה אריזות הכין כל שעה?
7. פועלת תכננה לעבוד 6 שעות ולגהץ כל שעה 8 חולצות. אולם היא גיהצה כל שעה ב-4 חולצות יותר. כמה שעות עבדה?
8. שני סטודנטים קיבלו אותו שאלון רב-ברירתי. האחד סיים לענות על השאלון מחצית השעה לפני השני, כי הוא ענה בקצב של 24 שאלות לשעה, בעת שהשני ענה רק על 20 שאלות בשעה. בכמה שעות ענה הראשון על השאלון כולו?
9. שני פועלים קיבלו להרכיב אותו מספר מכשירים. פועל אחד יכול להרכיב 25 מכשירים בשעה. פועל שני יכול להרכיב 30 מכשירים בשעה, ולכן הוא מסיים את הרכבת כל המכשירים בשעה אחת פחות מהראשון. בכמה שעות הכין הראשון את המוצרים, וכמה פריטים הכין בשה"כ?
10. תופרת מנוסה יכולה לתפור ב-7 חולצות יותר ביום מאשר תופרת מתחילה, ולכן העבודה, שהוטלה עליה לוקחת לה 5 ימים ולמתחילה 6 ימים. כמה חולצות יכולה להכין התופרת המנוסה ביום, וכמה חולצות הוטל עליה לתפור?

11. כדי לחרוש שדה בזמן מסוים, צריך לחרוש כל יום 15 דונם. אם מגדילים את הכמות היומית ב- 5 דונם, מסיימים יומיים לפני הזמן המתוכנן. בכמה זמן היה מתוכנן לסיים את החריש?
12. תלמיד קיבל מספר תרגילים לפתור. אם יכין כל יום 14 תרגילים, תקח העבודה יומיים פחות מאשר, אם יכין 10 תרגילים ליום. כמה תרגילים הוטלו על התלמיד?
13. פועל קיבל עבודת אריזה. אילו ארז ב- 5 פריטים יותר לשעה, היה מסיים את העבודה שעתיים יותר מוקדם, ואם יארוז ב- 3 פריטים פחות לשעה, יסיים את העבודה שעתיים יותר מאוחר. כמה פריטים ארז הפועל ובכמה שעות?
14. לבריכה מחוברים 3 צינורות. צינור ב' מזרים לבריכה ב- 3 מ"ק לדקה יותר מצינור א', והוא ממלא את הבריכה ב- 4 דקות פחות ממנו. צינור ג' מזרים לבריכה ב- 3 מ"ק לדקה פחות מצינור א' והוא ממלא את הבריכה ב- 6 דקות יותר ממנו. בכמה דקות ממלא צינור א' את הבריכה?
15. פועל היה צריך להרכיב 60 מכשירים כל יום. אך הוא הרכיב ב- 5 מכשירים יותר מהמתוכנן, ואז הוא גם סיים 3 ימים לפני הזמן המתוכנן, והסתבר לו, שהוא גם הרכיב 120 חלקים יותר מהכמות הדרושה. מה היתה הכמות המתוכננת?
16. אשה התחייבה להכין מלאי של מפות רקומות ב- 26 יום. אולם, האשה סיימה יומיים לפני הזמן, כי הכינה כל יום 5 מפות יותר. בנוסף לזה, הסתבר לה, שהכינה 60 מפות יותר מהמתוכנן. כמה מפות היה עליה להכין?
17. מפעל משקאות היה צריך להכין מלאי משקאות לתקופת הקיץ. אם יכין 3 טון פחות לשבוע, תיקח ההכנה שבועיים יותר לאותה כמות כללית של משקאות. אם יכינו 2 טון יותר לשבוע, במשך שבוע אחד פחות מהמתוכנן, יחסרו 2 טון מלאי המתוכנן. לכמה שבועות תוכננה ההכנה?
18. שתי כתות קבלו להכין אותו מספר קישוטים למסיבת השכבה. כתה אחת הכינה כל יום ב- 7 קישוטים יותר מהמתוכנן, ועבדה יומיים פחות. בסה"כ הכינה 12 קישוטים יותר מהמתוכנן. הכתה השניה הכינה כל יום ב- 2 קישוטים פחות ממה שתוכנן, ולמרות שעבדה יום אחד יותר, חסרו 6 קישוטים. כמה קישוטים היו מתוכננים?
19. שני פועלים צריכים להרכיב יחד 200 חלקים, כאשר הראשון עובד 4 ימים והשני 5 ימים. למעשה, הפועל הראשון עבד 5 ימים והשני 4 ימים, ובסוף העבודה היו חסרים 4 חלקים. כמה חלקים יכול כל פועל להכין ליום?
20. שני רתכים קבלו עבודה של 206 פריטים. אחד עבד 11 יום והשני 12 יום עד שסיימו את העבודה. הראשון יכול להכין ב- 4 ימים אותה כמות שמכין השני ב- 5 ימים. כמה פריטים יכול כל אחד מהם להכין ליום?

21. אדם עבד 6 ימים על הכנת תבניות יציקה, ועבד בקצב קבוע. אחר כך החליף אותו חברו, שמכין בשתי תבניות יציקה יותר ליום, ואחרי 7 ימים נוספים הושלם ביצוע כל 170 תבניות היציקה הדרושות. כמה תבניות ליום הכין הראשון?
22. לבריקה מחוברים שני צינורות. אחד פתוח 8 שעות והשני רק 6 שעות. כמות המ"ק של מים, שמכניס השני לשעה גדול ב- 20% מהכמות שמכניס הראשון לשעה. בסה"כ נכנסו לבריקה 684 דמ"ק. כמה דמ"ק נכנסים דרך כל צינור בשעה?
23. מעצב תכשיטים התחייב לספק כמות מסוימת של פריטים לסיטונאי. הוא התחיל לעבוד בקצב של 12 פריטים לשעה. אחרי שסיים חצי מהעבודה, לקח עוזר, וכמות הפריטים לשעה גדלה ברבע ממספרם הקודם. העבודה הסתיימה יומיים לפני הזמן. לכמה ימים תוכננה העבודה?
24. אדם תכנן להרכיב 10 צעצועים בשעה, וכך היתה העבודה נמשכת עד 19:00. אחרי שסיים להרכיב מחצית מהכמות, הוא הגביר את קצב עבודתו, והרכיב 12 צעצועים לשעה, וכך הצליח לסיים את העבודה בשעה 18:00. באיזו שעה התחיל האדם להרכיב את הצעצועים?
- 25\*. חשמלאי התכוון לחבר 8 עמודים לחשמל בשעה ולסיים ע"י כך את העבודה בשעה 17:00. אולם, אחרי שסיים מחצית מהעבודה, הרגיש עייפות, וחיבר רק 6 עמודים לשעה, וסיים את העבודה בשעה 19:00. כמה עמודים חיבר באותו יום לחשמל ובכמה שעות?
- 26\*. קבוצה התחייבה לזפת כביש בקצב של 5 קמ"ש. אחרי שזיפתו 2/3 מהכביש, הצטרפו אליהם פועלים נוספים, קצב העבודה גבר ב- 1 קמ"ש, וכך חסכו שעה מהזמן המתוכנן. מה היה הזמן המתוכנן?

### עבודה בחלקים

27. עוזי יכול לסיים עבודה שלמה לבדו ב- 20 יום.
- א. איזה חלק של העבודה יסיים עוזי במשך: 1. יום אחד 2. יומיים 3. 5 ימים 4. 12 יום 5. a ימים?
- ב. בכמה ימים יסיים עוזי: 1. מחצית מהעבודה 2. חמישית מהעבודה 3.  $\frac{3}{4}$  העבודה?
- ג. אחרי כמה ימים ישאר לעוזי לעשות עוד: 1. מחצית מהעבודה, 2.  $\frac{2}{5}$  מהעבודה 3.  $\frac{1}{8}$  מהעבודה.

28. עמיר יכול לסיים עבודה מסוימת ב-  $a$  ימים.
- א. איזה חלק של העבודה יעשה: 1. ביום אחד 2. ביומיים 3. ב- 8 ימים 4.
- ב-  $x$  ימים?
- ב. בכמה ימים יעשה עמיר:
1. מחצית מהעבודה, 2.  $\frac{1}{3}$  מהעבודה, 3.  $\frac{5}{6}$  מהעבודה.
- ג. אחרי כמה ימים ישאר לעמיר לסיים עוד: 1. מחצית מהעבודה 2. שליש מהעבודה 3.  $\frac{3}{8}$  מהעבודה?
29. יעל יכולה לעשות עבודה ב-  $a$  ימים. עידית יכולה לעשות אותה עבודה לבד ב-  $b$  ימים.
- א. איזה חלק של העבודה הן עושות: 1. ביום אחד 2. ביומיים 3. ב-  $x$  ימים?
- ב. נניח שהן מסיימות אל כל העבודה ב- 10 ימים. הרכב תבנית פסוק.
- ג. נניח שהן מסיימות את מחצית העבודה ב- 6 ימים. הרכב תבנית פסוק.
30. א' יכול לסיים עבודה לבדו ב-  $k$  ימים. ב' יכול לסיים אותה עבודה לבדו ב-  $f$  ימים. מה אומרות לך תבניות הפסוק הבאות:
- א.  $\frac{5}{k} + \frac{5}{f} = 1$       ב.  $\frac{8}{k} + \frac{7}{f} = 1$       ג.  $\frac{3}{k} + \frac{4}{f} = \frac{1}{2}$
- ד.  $\frac{a}{k} = \frac{1}{2}$       ה.  $\frac{b}{f} = \frac{2}{3}$       ו.  $\frac{k}{2} + \frac{f}{2} = 15$
31. פועל אחד יכול לעשות עבודה שלמה לבדו ב- 30 שעות. פועל אחר יכול לעשות אותה עבודה ב- 45 שעות. בכמה זמן הם יסיימו את העבודה, אם יעבדו ביחד?
32. מסגר מסיים עבודה, שהוטלה עליו ב- 10 ימים. הוא החליט לקחת פועל, שיעזור לו. בכמה ימים יסיימו את העבודה, אם העוזר יכול לעשות אותה עבודה לבדו ב- 15 ימים?
33. צבעי יכול לסיים צביעת בנין ב- 21 שעות. העוזר שלו יכול לסיים אותה עבודה ב- 30 שעות. הצבעי עבד 4 ימים יותר מעוזרו. כמה ימים עבד העוזר?????
34. פועל ותיק יכול לסיים עבודה מסוימת ב- 18 יום. פועל מתחיל יכול לסיים אותה עבודה ב- 3 ימים יותר. הם התחילו לעבוד ביחד, ואחרי מספר ימים הפועל המתחיל עזב, והותיק המשיך עוד 5 ימים עד סיום העבודה. כמה ימים עבדו יחד?
35. דרך פתח אחד אפשר למלא בריכה ב- 24 דקות. דרך פתח אחר, צר יותר, אפשר למלא אותה הבריכה ב- 36 דקות. בשעה 8:00 הזרימו מים לבריכה דרך הפתח השני, ואחרי 6 דקות פתחו גם את הראשון. באיזו שעה התמלאה הבריכה?
36. למכל ענק שני פתחי יציאה. כאשר רק הראשון פתוח, מתרוקן המכל (שהיה מלא) תוך 28 דקות. דרך השני בלבד, הוא מתרוקן תוך 35 דקות. יום אחד, אחרי שהפתח השני היה פתוח במשך 8 דקות, פתחו גם את הראשון עד שהמכל התרוקן. כמה זמן ארכה הרקת המכל?

37. פועל אחד יכול לסיים עבודה לבדו ב- 16 שעות. אם הוא עובד עם פועל נוסף, הם יכולים לסיים את העבודה יחד במשך 6 שעות. בכמה זמן יכול הפועל השני לסיים לבד את העבודה?
38. פועל אחד יכול לסיים הרכבת מכונה חדשה ב- 21 דקות. הוא עובד במשך 6 דקות, ואז מצטרף אליו פועל נוסף, ואחרי 8 דקות נוספות, הם מסיימים את ההרכבה. בכמה דקות יכול הפועל השני לסיים לבדו את ההרכבה.
39. א' יכול לעשות עבודה לבדו ב- 20 יום. אחרי 6 ימי עבודה הוא מצרף אליו את ב' ועובדים ביחד עוד 6 ימים, עד סיום העבודה. בכמה ימים יכול ב' לסיים לבדו את העבודה?
40. מכונה חדשה עושה את כל עבודת הקיפול והאריזה במפעל במשך 14 שעות. מכונה ישנה עושה את אותה עבודה במשך 35 שעות. שתי המכונות עובדות יחד. כמה זמן עבדו, אם סיימו מחצית מהמלאי?
41. שרטטת מקצועית יכולה לסיים עבודה מסוימת ב- 20 יום. שרטטת מתחילה יכולה לסיים אותה עבודה ב- 30 יום. שתי השרטטות מתחילות לעבוד יחד עת אותה עבודה. אחרי מספר ימים, עוזבת השרטטת המקצועית, והשניה עובדת עוד 4 ימים. בשלב זה הסתיימו  $\frac{4}{5}$  מהעבודה. כמה ימים הן עבדו יחד?
42. דרך ברז אחד אפשר למלא בריכה ב- 15 דקות. בבריכה יש ברז נוסף. בכמה זמן אפשר למלא את הבריכה דרך הברז השני בלבד, אם בהיותם פתוחים יחד במשך 6 דקות, התמלאה הבריכה עד כדי 70%?
43. שתי מחלקות במפעל המכינות ביחד מלאי חלפים, יכולות לעשות את כל העבודה ב- 15 יום. אם מחלקה אחת תעבוד 20 יום והשניה 6 ימים, הם יסיימו  $\frac{3}{4}$  מהעבודה. בכמה ימים יכולה כל קבוצה לסיים לבד את העבודה?
44. שתי קבוצות פועלים סוללות יחד קטע כביש. הם תכננו, שהקבוצה הראשונה תעבוד 7 שעות והשניה 11 שעות, אך כך היה נסלל רק  $\frac{3}{4}$  מהכביש. לכן, הקבוצה הראשונה עבדה 21 שעות והשניה 5.5 שעות, ואז הם סיימו לסלול את הכביש. בכמה שעות יכולה כל קבוצה לסלול לבד את הכביש?
45. שני נגרים העובדים יחד 4 ימים, יכולים לסיים ציפוי בעץ של קירות מתני"ס. הם התחילו לעבוד יחד, ואחרי יומיים הפסיק אחד מהם. אחרי 4 ימים נוספים, שהשני עבד, היו  $\frac{5}{6}$  מהקירות מצופים בעץ. בכמה ימים יכול כל פועל לסיים לבדו את הציפוי?

46. שני פועלים מקבלים עבודה משותפת ומסיימים אותה ב- 30 שעות. אילו אחד מהם עבד 10 שעות והשני 24 שעות היה נשאר להם עוד  $\frac{5}{11}$  מהעבודה. בכמה זמן יכול כל אחד לסיים לבד את העבודה?
47. שני פועלים עובדים במחסן רהיטים בציפוי בלקה. הם יכולים לצפות בלקה את כל המלאי שבמחסן, אם אחד יעבוד 20 שעות והשני 24 שעות. באחת הפעמים הם התחילו לעבוד ביחד, ואחרי שהתברר ש-  $\frac{1}{8}$  ממלאי הרהיטים מצופה בפורמייקה (ולכן אין צורך לצפותו בלקה), הפסיק השני אחרי 12 שעות, והראשון המשיך עוד 13 שעות עד הסיום. בכמה זמן יכול כל אחד מהם לצפות לבדו את כל המלאי בלקה?
48. שני צינורות ממלאים בריכה, כאשר הראשון פתוח 6 דקות והשני 8 דקות. הצינור הראשון יכול למלא ב- 9 דקות אותו חלק של הבריכה, שהשני יכול למלא ב- 6 דקות. חשב בכמה זמן יכול כל צינור למלא את הבריכה.
49. דרך הפתח המכניס מים מתמלאת בריכה בעשר דקות. דרך הפתח המוציא מים, מתרוקנת בריכה מלאה ב- 30 דקות.  
א. בכמה זמן תתמלא בריכה ריקה, אם שני הצינורות נפתחים באותו זמן?  
ב. אם הבריכה היתה מלאה עד מחציתה, בכמה זמן היא תתמלא?
50. לבריכה מחוברים שני צינורות. דרך אחד מהם זורמים מים לבריכה, ואפשר למלא דרכו בריכה ריקה במשך 21 דקות. דרך השני יוצאים המים מהבריכה, ואפשר לרוקן דרכו בריכה מלאה ב- 42 דקות. יום אחד היו שני הצינורות פתוחים זמן מה, ואח"כ סגרו את הצינור המרוקן, והצינור הממלא היה פתוח עוד 14 דקות, ואז התמלאה הבריכה. כמה זמן היו פתוחים שני הצינורות יחד?
51. דרך ברז אחד אפשר למלא בריכה ריקה ב- 18 דקות. דרך ברז שני אפשר לרוקן בריכה מלאה ב- 24 דקות. כשהבריכה היתה מלאה עד מחציתה, פתחו את שני הברזים. בשעה 8:30 סגרו את הברז המרוקן וב- 8:34 את הברז הממלא, ואז היה חסר  $\frac{1}{6}$  כדי שהבריכה תהיה מלאה. באיזו שעה פתחו את שני הברזים?
- 52\*. דרך ברז אחד ממלאים בריכה ריקה ב- 18 דקות ודרך השני מרוקנים בריכה מלאה ב- 24 דקות. בשעה 7:00 כאשר הבריכה היתה מלאה עד מחציתה, פתחו את שני הברזים. בשעה 7:16, כאשר הלכו לסגור את הברזים, הסתבר שמישהו הספיק לסגור את הברז הממלא, והבריכה היתה מלאה עד מחציתה.  
א. מה אפשר להסיק מהנתון האחרון?  
ב. מתי סגרו את הברז הממלא?
53. שלושה פועלים העובדים יחד יכולים לבצע עבודה ב- 12 שעות. בכמה שעות יכול הפועל הראשון לבצע את העבודה לבדו, אם השני עושה זאת ב- 24 שעות והשלישי ב- 36?
54. דרך שלושה ברזים מכניסים מים לבריכה. אם פותחים רק את הברז הראשון והשני, תתמלא הבריכה ב- 36 דקות. אם פותחים רק את השני והשלישי, היא

- תתמלא ב- 25.2 דקות, ואם פותחים רק את הראשון והשלישי - ב- 28 דקות.  
בכמה דקות אפשר למלא את כל הברכה דרך כל ברז?
55. מפעל חוטים רכש 6 מכונות אריגה חדשות בנוסף לישנות שברשותו. המפעל קיבל הזמנה גדולה ורצה להפעיל את 6 המכונות החדשות ו- 10 מהישנות למשך שעתיים ולסיים את כל ההזמנה. אולם אחת מהמכונות החדשות לא היו עדיין מורכבות, ולכן הפעיל רק 5 חדשות ו- 5 ישנות, וסיים את ההזמנה ב- 3 שעות. בכמה זמן יכולה כל מכונה לסיים לבד את העבודה?
56. משרד פרסום מעסיק שרטטים מתחילים וותיקים. הוא תכנן לתת עבודה גדולה ל- 2 שרטטים מתחילים ול- 2 ותיקים, כדי שהעבודה תסתיים תוך 4 ימים. אולם אחד השרטטים הוותיקים היה עסוק בעבודה אחרת והשני יכול לעבוד רק יומיים, לכן עבדו השרטטים המתחילים 10 ימים עד סיום העבודה. בכמה זמן יכול שרטט מתחיל לסיים לבדו את העבודה?
57. במאפיה יש 5 עובדים ותיקים ו- 3 חדשים. המאפיה קיבלה הזמנה גדולה מבית מלון. אם האופים הוותיקים היו עובדים במשך 5 שעות והחדשים במשך 8 שעות, היו מספיקים לעשות רק  $\frac{9}{11}$  מהעבודה. לכן העובדים הוותיקים עבדו שעה נוספת והחדשים שעתיים נוספות, וסיימו את כל ההזמנה. כמה שעות נחוצות לכל עובד לבצע לבדו את ההזמנה?
58. בעבודת גינון של פארק חדש השתתפו גנן ותיק אחד ושני גננים מתחילים. אחרי 3 שעות סיימו רק  $\frac{7}{12}$  מהעבודה. אילו היו לקוחים 2 גננים ותיקים ו- 6 מתחילים, היתה מסתיימת כל העבודה תוך שעתיים. בכמה זמן יכול גנן ותיק לסיים לבדו את העבודה?
59. בברכה 4 פתחי כניסה למים ו- 3 פתחי יציאה. אם פותחים את כל הפתחים במשך 2 דקות ואח"כ סוגרים את פתחי היציאה ומשאירים את פתחי הכניסה פתוחים לעוד 2 דקות, מתמלאת כל הברכה. אם כל הברזים יהיו פתוחים במשך 3 דקות, תתמלא מחצית הברכה. בכמה זמן אפשר לרוקן בריכה מלאה דרך פתח יציאה אחד?
60. במפעל אריזה 3 מכונות ישנות ואחת חדשה. בעל המפעל תכנן שהמכונה החדשה תעבוד 8 שעות והאחרות 4 שעות כל אחת, וכך יסיימו את כל העבודה. אולם המכונה החדשה התקלקלה, וקצב העבודה שלה קטן למחצית. לכן עבדה מכונה זו 10 שעות וכל אחת מהישנות 6 שעות, וכך הצליחו לסיים את העבודה. בכמה זמן יכולה מכונה ישנה אחת לסיים לבד את העבודה?
61. במשרד הדפסות התקבלה עבודה דחופה. כתבן א' רצה להדפיס שליש מהעבודה וכתבן ב' את ההמשך, ואז היתה מסתיימת ההדפסה ב- 7 שעות ו- 20 דקות. אולם, מנהל המשרד נתן שני שלישי מההדפסה לראשון ואת השאר לשני, וכך הוא חסך 40 דקות מזמן ההדפסה. בכמה זמן יכול כל כתבן להדפיס לבד את העבודה?

62. לבריכה שני פתחי כניסה למים. אם פותחים תחילה את השני וממלאים מחצית מהבריכה וסוגרים אותו, ואח"כ ממשיכים למלא בעזרת הפתח הראשון בלבד, מתמלאת הבריכה בשעתיים. ואם ממלאים  $\frac{2}{3}$  מהבריכה באמצעות הראשון ואת היתר באמצעות השני, תתמלא הבריכה ב- 130 דקות. בכמה זמן אפשר למלא בריכה באמצעות כל פתח בנפרד?
63. מכונית אחת עוברת מסלול מסוים ב- 20 דקות. מכונית שניה עוברת אותו מסלול ב- 30 דקות. המכוניות יוצאות זו לקראת זו באותה שעה מקצות המסלול. כעבור כמה זמן תיפגשנה?
64. רוכב קטנוע יכול לעבור מסלול מסוים ב- 20 דקות ורוכב שני ב- 28 דקות. הרוכב הראשון מתחיל לנסוע מקצה אחד לעבר הקצה השני ואחרי 8 דקות מתחיל השני לנסוע מהקצה השני לעברו. כמה דקות מתחילת נסיעתו של הראשון יפגשו?
65. שני גופים הנעים זה לקראת זה מקצות מסלול מסוים, נפגשים כעבור 1.2 דקות. אחד מהגופים יכול לעשות שליש מהמסלול באותו זמן שהשני עושה מחצית מהמסלול. בכמה זמן יכול כל גוף לעשות את כל המסלול לבדו?
66. רכבת א' עוברת מסלול מסוים ב- 18 שעות. רכבת ב' עוברת אותו מסלול ב- 24 שעות. הרכבות נסעו מקצות המסלול באותו כיוון כאשר רכבת ב' ראשונה בכיוון התנועה. כעבור כמה זמן משעת יציאתה תשיג רכבת א' את ב', אם היא יוצאת 8 שעות אחריה?

## ב. מעלה שניה

### עבודה כביטוי של יחידות זמן או מספר פריטים

67. לעבודת קטיף בפרדס נחוצים 480 ימי עבודה. אם יעדרו 2 קוטפים יצטרכו כל האחרים להשקיע 8 ימים יותר בקטיף. כמה עובדים כעת בפרדס.
68. ברכה יכולה להתמלא מים אם צינור אחד יהיה פתוח 96 דקות. לברכה מחוברים מספר צינורות שדרך כל אחד נכנסים מים באותו קצב (כמו הקצב של הצינור הראשון) והם פתוחים מספר דקות עד מילוי הברכה. אולם שניים מהצינורות נסגרו כי החלידו, ולכן התמלאה הברכה ב- 4 דקות יותר מהמתוכנן. כמה צינורות בברכה.
69. עריה התחייבה לספק לבי"ס 720 "שעות מחשב" במתנ"ס. 10 תלמידים נוספים ביקשו להצטרף לקבוצה הלומדים מחשבים. לכן יקבל כל תלמיד מספר שעות מחשב קטן ב- 1 מהמתוכנן. כמה תלמידים בקבוצה וכמה שעות מחשב היה אמור לקבל כל אחד.
70. הביטוח הלאומי מקציב 240,000 שעות עזרה לנזקקים של עיר מסוימת. מספר הצרכנים של שעות אלה גדל השנה ב- 120, ולכן קיבל כל נזרף ב- 100 שעות פחות מהמתוכנן. כמה נזקקים היו מתוכננים.

71. מפעל מזון התחייב לספק 720 ארגזים של שימורים תוך מספר מסוים של ימים. אולם מספר הארגזים שהכינו ליום היה קטן ב- 12 מהמספר המתוכנן. לכן נמשכה הכנת הארגזים 3 ימים יותר. כמה ארגזים תכננו להכין ליום?
72. בבית דפוס שתי מכוונות לכריכת ספרים אחת ישנה ואחת חדשה שכורכת ב- 150 ספרים יותר לשעה מהשניה. המכונה החדשה כרכה 2800 ספרים ב- 4 שעות פחות מהזמן שכרכה המכונה הישנה 2400 ספרים. כמה שעות עבדה המכונה החדשה.
73. נער עבד בחנות ממתקים והכין 192 סלסלות לחג. ביום הראשון הכין  $\frac{3}{8}$  מהכמות. ביום השני הכין ב- 3 סלסלות לשעה יותר מאשר ביום הראשון ועבד שעתיים יותר. כמה סלסלות הכין לשעה ביום הראשון.
74. נגר הבטיח להרכיב 180 מדפים בספריה העירונית החדשה. בגלל התנאים בשטח הרכיב הנגר בעשרה מדפים פחות ליום ולכן נמשכה עבודת ההרכבה ביום וחצי יותר מהמתוכנן. כמה זמן נמשכה עבודת הנגר.
75. חברה צריכה להתקין 150 דודי שמש בשני בנינים חדשים והתחייבו לבצע את העבודה בזמן מסוים. פועל מנוסה בחברה התקין 80% מהדודים. העבודה נפסקה ליום אחד בגלל גשם. להמשך העבודה שלחו פועל פחות יעיל והוא התקין ב- 5 דודים ליום פחות מאשר קודמו. כמה דודים לשעה התקין הראשון, אם העבודה הסתיימה באחור של יומיים.
76. כתבנית קיבלה להדפיס ספר של 330 עמודים. במשך 5 שעות ראשונות הדפיסה כל שעה בעמוד אחד פחות מהמתוכנן ובהמשך הגדילה ב- 3 את מספר העמודים לשעה (ביחס למתוכנן) וכך סיימה את ההדפסה 5 שעות יותר מוקדם משתכננה. כמה עמודים תכננה להדפיס לשעה?
77. פועל היה צריך להכין 360 חגורות. הוא תכנן להכין כל שעה מספר קבוע של חגורות. הוא עבד לפי תכנית זו במשך 4 שעות, ואחר כך הגדיל ב- 5 את מספר החגורות שהכין כל שעה ועל ידי כך חסך 5 שעות. כמה חגורות לשעה הכין תחילה?
78. על זבנית בכל-בו הוטל להטביע מחירים על 420 מוצרים. היא עבדה 3.5 שעות. אחר כך היא נחה במשך 10 דקות והמשיכה בעבודתה כשהיא מטביעה ב- 10 מוצרים יותר לשעה מקודם. בסה"כ נמשכה עבודתה ב- 20 דקות פחות מאשר אילו המשיכה באותו קצב עבודה מהתחלה עד הסוף. על כמה מוצרים לשעה הטביעה מחירים תחילה?
79. לברכה שקיבולה 87 מ"ק 2 ברזים שדרכם מזרימים מים לברכה. יום אחד פתחו ברז אחד דקה אחת לפני השני וסגרו אותו דקה אחת אחריו. דרך הברז הראשון אפשר להזרים בדקה כמות הקטנה ב- 3 מ"ק מהבמות שאפשר להזרים דרך השני. דרך הברז הראשון נכנסו מים שמילאו  $\frac{11}{29}$  מתוך תכולת הברכה. כמה מ"ק מים זורמים דרך הברז הראשון לדקה?

\*80. לברכה מחוברים 2 צינורות: דרך צינור א' נכנסים מים ודרך צינור ב' - יוצאים. תכולת הברכה 432 מ"ק. יום אחד, כאשר הברכה הייתה מלאה עד מחציתה פתחו את צינור ב' ושתי דקות אחרי זה פתחו גם את צינור א'. אחרי שדרך צינור א' נכנסו מים בכמות של רבע מתכולת הברכה סגרו אותו וזה היה 10 דקות אחרי שסגרו את צינור ב'. בסופו של דבר היו בברכה 268 מ"ק. באיזה קצב מילא/רוקן כל צינור אם דרך הראשון אפשר למלא בדקה כמות הגדולה ב- 1 מ"ק ממה שאפשר לרוקן דרך השני?

## עבודה בחלקים

81. פועל א' יכול לסיים עבודה ב- 3 ימים פחות מפועל ב'. הם התחילו לעבוד ביחד על העבודה ואחרי 4 ימים, הועבר פועל א' למחלקה אחרת, ופועל ב' המשיך עוד 6 ימים עד סיום העבודה. בכמה ימים יכול פועל א' לסיים לבד את העבודה?
82. על חיים ומשה הוטלה עבודה מסויימת, אך חיים היה צריך להשלים עבודה אחרת, ולכן הצטרף למשה 4 ימים אחרי תחילת העבודה. הם עבדו ביחד 8 ימים. בכמה זמן יכול כל אחד מהם לסיים לבד את העבודה, אם משה יכול לעשות את כל העבודה לבד ב- 6 ימים פחות מחיים?
83. שני פועלים יכולים לסיים עבודה ביחד במשך 18 יום. אחד מהם יכול לסיים את העבודה לבדו ב- 15 ימים פחות מהשני. בכמה ימים יכול כל אחד לסיים לבד את העבודה?
84. מירב ועינת עובדות יחד על עבודת פסיפס. מירב יכולה לסיים את כל העבודה לבד בשלושה ימים פחות מאשר עינת. הן מתחילות לעבוד בשעה 8:00. בשעה 13:30 מירב חייבת ללכת, ולכן עינת ממשיכה עד השעה 15:00, ומסיימת את הפסיפס. בכמה זמן יכולה עינת לסיים לבד את כל הפסיפס?
85. מסגר ותיק יכול לסיים עבודה מסויימת לבדו ב- 12 יום פחות מאשר מסגר מתחיל. שניהם התחילו לעבוד במשותף על עבודה. המסגר הותיק הפסיק אחרי 8 ימים ונתן הנחיות למסגר המתחיל כיצד להשלים את העבודה. אולם, לאחר 4 ימים נוספים, הוא עזב את העבודה, לכן הם סיימו רק  $\frac{2}{3}$  מהעבודה. בכמה זמן יכול המסגר הותיק לסיים לבדו את העבודה?
86. שני פועלים התחילו לעבוד ביחד על מיון מוצרים. אולם, אחרי יומיים, נאלץ אחד מהם להפסיק, והשני המשיך עוד 4 ימים עד סיום המיון. אילו היה אחד מסיים מיון מחצית מהמלאי ואח"כ עושה השני את המיון של המחצית השניה של המלאי, היתה העבודה מסתיימת ב- 8 ימים. בכמה זמן יכול כל פועל לסיים לבד את כל העבודה?
87. שתי קבוצות פועלים, בעובדן יחד מסיימות לסלול כביש ב- 6 ימים. הן החליטו להפריד את העבודה, כי הם לא יכלו לעבוד באותו זמן. כל קבוצה לקחה על עצמה מחצית מהעבודה ואז סלילת הכביש נמשכה 13.5 יום. בכמה זמן יכולה כל קבוצה לסיים לבד את סלילת הכביש?

88. שתי כתבניות, המדפיסות עבודה מסויימת במקביל, מסיימות אותה אחרי 14 שעות ו-24 דקות. אילו כתבנית אחת היתה מבצעת  $\frac{2}{3}$  העבודה, היתה העבודה מסתיימת ב-28 שעות. בכמה שעות יכולה כל כתבנית לסיים לבד את העבודה?

89. שני פועלים קיבלו עבודת צביעה של בנין משרדים. אם אחד יעבוד 4 ימים, והשני 5 ימים, ישאר להם עד הסיום  $\frac{1}{6}$  מהעבודה. בפועל עבדו אחרת: אחד עבד על מחצית מהעבודה, אח"כ חיכו יום אחד, שהצבע יתייבש, ואז המשיך השני את המחצית השניה של המלאכה. כל העבודה נמשכה 12 יום. בכמה זמן יכול כל אחד לסיים לבדו את העבודה?

90. שני נגרים יכולים לסיים הרכבת ארון תוך 48 דקות. אחד מרכיב  $\frac{1}{4}$  מהארון ב-20 דקות פחות מהזמן, שבו מרכיב השני  $\frac{1}{3}$  מהארון. בכמה דקות יכול כל אחד להרכיב לבדו את הארון?

91. במחסן כמות מסויימת של קמח. למחסן מחוברים שני שרוולים, שדרך אחד מהם נכנס קמח ודרך השני יוצא. דרך השרוול הממלא אפשר למלא אותה כמות קמח בזמן ארוך ב-2 דקות מהזמן הנחוץ לשרוול השני לרוקן את אותה כמות קמח. בקר אחד פתחו את שני פתחי השרוולים יחד, ואחרי 20 דקות סגרו את השרוול המרוקן. אחרי 10 דקות נוספות סגרו את השרוול הממלא, ואז ראו, שכמות הקמח שיש במחסן גדולה פי  $1\frac{1}{2}$  מזו שהיתה. בכמה זמן יכול השרוול השני לרוקן את כמות הקמח שהיתה בתחילה?

92. במיכל כמות מסויימת של שמן. למיכל מחוברים 2 ברזים: דרך אחד ממלאים את המיכל, דרך השני מרוקנים אותו. דרך הברז המרוקן אפשר לרוקן אותה כמות שמן שבמיכל ב-14 דקות יותר מהזמן, שלוקח לברז הממלא להכניס אותה למיכל. עובד חדש פחת בטעות את שני הברזים בשעה 30:7. בשעה 47:7 הבחין אחד העובדים בטעות, וסגר את הברז המרוקן. בשעה 20:8 היתה במיכל כמות שמן פי 3 מאשר בהתחלה. בכמה זמן יכול הברז הממלא להכניס אותה כמות שמן?

93. למיכל מחוברים שני צינורות. דרך פתח אחד מתמלא המיכל, ודרך השני הוא מתרוקן. המיכל מלא עד כדי  $\frac{2}{3}$  מקיבולו. פותחים את שני הפתחים ביחד ואחרי 8 דקות סוגרים את פתח הצינור המרוקן. אחרי 4 דקות נוספות סוגרים גם את הממלא, כי בדיוק התמלא המיכל. בכמה זמן יכול צינור אחד למלא מיכל ריק, אם הזמן הנחוץ לו למלא מחצית מיכל גדול בדקה אחת מהזמן הנחוץ לצינור השני לרוקן  $\frac{1}{3}$  מיכל?

94. מכונית יכולה לעבור מסלול מסויים ב-16 דקות פחות ממכונית שניה. המכונית הראשונה יוצאת בשעה 10:00 מקצה אחד של המסלול לעבר הקצה השני. אחרי 16 דקות מתחילה המכונית השניה לנסוע מהקצה השני לעבר

הקצה הראשון, והן נפגשות בשעה 30:10. בכמה זמן יכול הראשון לעבור לבדו את המסלול?

95. אדם יוצא מנקודה A לנקודה B. אחרי 10 דקות יוצא אדם שני מ-C ל-B (A) (נמצא בין B ל-C) ומשיג את האדם הראשון כעבור 18 דקות משעת יציאתו של השני. בכמה זמן יכול כל אדם לעשות את כל הקטע AC אם הראשון עושה מחצית הקטע בדקה אחת יותר מהזמן שהשני עושה שליש מהקטע?

96. שני פועלים עובדים על עבודה ביחד עד השלמתה. הזמן (בימים) שנחוץ לפועל הראשון לסיים את העבודה לבדו, קטן ב-5 מכפליים הזמן, שהשקיע בעבודה המשותפת. הזמן הנחוץ לפועל השני לסיים את העבודה לבדו, גדול ב-6 מכפליים הזמן, שהוא השקיע בעבודה המשותפת. כמה זמן השקיעו בעבודה המשותפת?

97. שני פועלים עובדים על עבודה משותפת, כאשר פועל א' מתחיל יומיים מאוחר יותר מפועל ב' והם מסיימים באותו יום. פועל א' יכול לסיים את העבודה בזמן הגדול ב-6 ימים מכפליים הזמן שהשקיע בעבודה המשותפת. פועל ב' יכול לבצע לבדו בזמן הגדול ב-4 ימים מהזמן שהוא השקיע בעבודה המשותפת. כמה ימים השקיע פועל א' בעבודה המשותפת?

98. בקיבוץ מפעילים 5 מחרשות רגילות ו-7 משוכללות במשך שעתיים כדי לחרוש שדה. למחרשה רגילה נחוץ כדי לחרוש מחצית מהשדה, בשעה אחת יותר מכפליים מספר השעות הנחוץ למחרשה משוכללת לחרוש  $\frac{1}{3}$  מהשדה. בכמה שעות יכולה מחרשה משוכללת לחרוש את השדה?

99\*. חבית מתמלאת על ידי שלושה ברזים במשך 5 דקות. הברז הראשון יכול למלא את החבית לבדו בזמן הארוך ב-3 דקות מהברז השני לבדו, והוא מהווה  $\frac{3}{4}$  מהזמן הדרוש לברז השלישי למילוי החבית לבדו. בכמה זמן מתמלאת החבית ע"י כל אחד משלושת הברזים לבד?

100. למחסן מלח שלושה פתחים: דרך פתחים א' ו-ב' נכנס מלח ודרך פתח ג' יוצא. הזמן הנחוץ ל-א' למלא מחסן ריק גדול פי 3 מהזמן הנחוץ ל-ב'. הזמן הנחוץ ל-ג' לרוקן מחסן מלא גדול ב-6 דקות מהזמן הנחוץ ל-ב' למלא מחסן. יום אחד, כאשר  $\frac{1}{3}$  מהמחסן היה מלא במלח, פתחו את שלושת הפתחים במשך 12 דקות, והמחסן התמלא. כמה זמן נחוץ לכל פתח לעשות את מלאכתו לבדו?

101. לבריכה 3 ברזים, שדרכם נכנסים המים ושני פתחים שדרכם הם יוצאים. בבריכה כמות מסוימת של מים. בשעה 5:00 פתחו את הברזים הממלאים ואחרי 2.5 דקות פתחו גם את הברזים המרוקנים. בשעה 5:10 היתה בבריכה כמות מים כפולה מזו שהיתה קודם. בכמה זמן יכול ברז אחד למלא אותה כמות אם זמן זה גדול ב-5 ממצצית הזמן הדרוש לברז היציאה לרוקן אותה כמות מים?

102\*. במפעל 9 עובדים. חלק מהם מומחים וחלקם לא. פועל לא מומחה יכול לבצע עבודה מסוימת במפעל במספר ימים הגדול ב- 24 מכפליים מספר הימים, שיקח לפועל מומחה לעשות זאת. אם כל אחד מהפועלים יעבוד 8 ימים, הפ יסיימו את כל העבודה. ואילו, אם המומחים יעבדו 3 ימים כ"א, והאחרים 6 ימים כ"א, תתבצע רק מחצית מהעבודה. כמה פועלים מומחים במפעל?

### תשובות

1. 16 יי 2. 9 ש' 3. 12 יי 4. 12 יי 5. 7 ש' 6. 20 אי 7. 4 ש' 8. 2.5 ש' 9. 6 ש' 10. 42 ח', 210 ח' 11. 8 יי 12. 70 ת' 13. 15 פ', 8 ש' 14. 24 ד' 15. 3780 מ' 16. 780 מ' 17. 6 ש' 18. 48 ק' 19. 20 ח' 20. 24 ח' 21. 10 פ', 8 פ' 22. 45 דמ"ק, 54 דמ"ק 23. 20 יי 24. בשעה 7:00 25. 96 ע', 14 ש' 26. 18 ש' 27. א.  $\frac{1}{20}$  2. א.  $\frac{1}{10}$  3. א.  $\frac{1}{4}$  4. א.  $\frac{3}{5}$  5. א.  $\frac{a}{20}$  6. ב. 10 7. ב. 4 8. ב. 15 9. ג. 12 10. ג. 17.5 28. א.  $\frac{1}{a}$  29. א.  $\frac{2}{a}$  30. א.  $\frac{8}{a}$  31. א.  $\frac{x}{a}$  32. ב.  $\frac{a}{2}$  33. א.  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$  34. א.  $\frac{2}{a} + \frac{2}{b}$  35. א.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  36. א.  $\frac{5a}{8}$  37. ג.  $\frac{2a}{3}$  38. ג.  $\frac{a}{2}$  39. ג.  $\frac{5a}{6}$  40. ב.  $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = \frac{1}{2}$  41. ג.  $\frac{10}{a} + \frac{10}{b} = 1$
30. א. במשך חמישה ימי עבודה יחד הם מסיימים את כל העבודה.  
 ב. אם אי עובד 8 ימים ו- בי - 7 ימים, יסיימו את כל העבודה  
 ג. אם אי יעבוד 3 ימים ו- בי יעבוד 4 ימים, יסיימו מחצית מהעבודה.  
 ד. אם אי יעבוד a ימים, יסיים חצי מהעבודה.  
 ה. אם בי יעבוד b ימים, יסיים שני שלישי מהעבודה.  
 ו. אם אי יעשה מחצית מהעבודה (במחצית מהימים) ואח"כ בי ימשיך את המחצית השנייה, תימשך העבודה 15 יום.
31. 18 יי 32. 6 יי 33. 10 יי 34. 7 יי 35. בשעה 8:18 36. 20 ש' 37. 9.6 ש' 38. 24 ד' 39. 15 יי 40. 5 ש' 41. 8 יי 42. 20 ד' 43. 40 יי, 24 יי 44. 28 ש', 22 ש' 45. 12 יום, 6 ימים 46. 55 ש', 66 ש' 47. 40 ש', 48 ש' 48. 18 ד', 12 ד' 49. א. 15 ד' ב. 7.5 ד' 50. 14 ד' 51. בשעה 8:22 52. א. מהנתון האחרון ניתן להסיק, שחלק הברכה שהתמלא, שווה לחלק שהתרוקן. ב. בשעה 7:12 53. 72 ש' 54. 42, 63, 84 ד' 55. 24 ש', 40 ש' 56. 24 יום 57. 55 ש', 66 ש' 58. 12 ש' 59. 18 ד' 60. 14 ש' 61. 6 ש', 8 ש' 62. 2.5 ש', 1.5 ש' 63. 12 ד' 64. 15 ד' 65. 3 ש', שעתיים 66. 96 ד' 67. 12 68. 8 צי 69. 80 ת', 9 ש' 70. 480 אי 71. 60 אי 72. 8 ש' 73. 12 סי או 9 סי 74. 6 יי 75. 15 ד' 76. 11 ע' 77. 15 ח' 78. 60 מ' 79. 3 מ"ק 80. 3 מ"ק או 4.5 מ"ק 81. 12 יי 82. 18 יי, 24 יי 83. 30 יי, 45 יי 84. 14 ש' 85. 24 יי 86. (8,8) או (4,12) 87. 9 יי, 18 יי 88. (24,36) או (25.2,33.6) 89. (8.8,13.2) או (12,10) 90. 120 ד', 80 ד' 91. 10 ד' או 8 ד' 92. 20 ד' 93. (4,3) או (18,24) 94. 40 ד' 95. (4,3) או (14,18) 96. 30 יי 97. 6 יי 98. 21 ש' 99. (15,12,20) ד' 100. 12, 18, 36 ד' 101. 20 ד' או 7.5 ד' 102. 4 מומחים

## בעיות עם אותיות (תשובות בעמוד 327)

1. כתוב תבנית מספר (ביטוי אלגברי) המבטאת:
  - א. מספר הגדול ב- 5 מהמספר a.
  - ב. מספר הקטן ב- 4 מהמספר a.
  - ג. מספר הגדול פי 10 מהמספר a.
  - ד. מספר הקטן פי 8 מהמספר a.
  - ה. מספר המהווה  $\frac{2}{3}$  מהמספר a.
  - ו. מספר גדול ב- 1 ממחצות המספר a.
  - ז. מספר המהווה סכום המספרים המתקבלים בסעיפים א' ו-ג'.
  - ח. מספר שקטן ב- 3 מזה שמתקבל בסעיף ד'.
  - ט. מספר המהווה 50% מהמספר a.
  - י. מספר, הגדול מהמספר a ב- 10%.
  - יא. מספר הקטן מהמספר a ב- 20%.
  - יב. מספר המהווה 30% מהמספר המתקבל בסעיף ג'.
2. כמה אגורות ב:
  - א. a שקלים ב. m שקלים ו- n אגורות ג. 10 שקלים ו- a אגורות
  - ד. a שקלים ו- 2 אגורות.
3. כמה שקלים ב:
  - א. a אגורות, ב. b שקלים ו- 50 אגורות, ג. a שקלים ו- m אגורות.
4. כמה ס"מ ב:
  - א. m מ', ב. a ד"מ (דצימטר), ג. a מ' ו- b ד"מ, ד. b מ' ו- c ס"מ
  - ה. 5 ד"מ ו- a ס"מ.
5. כמה ד"מ ב:
  - א. a מ', ב. b ס"מ, ג. a מ' t ד"מ n-1 ס"מ.
6. כמה ק"ג ב:
  - א. a טונות, ב. b ג', ג. 0.05a טונות ו- 100b ג'.
7. אייל קנה 5 מחברות במחיר a ש' כל אחת ו- b עטים צבעוניים במחיר c ש' כל אחד. כמה שילם אייל?
8. מירי קנתה a ק"ג תפוחים במחיר b ש"ח לק"ג ו- k ק"ג תפוזים במחיר m ש"ח לק"ג. אחרי ששילמה נותרו בידיה c שקלים. כמה שקלים היו בידי מירי לפני הקניה?
9. לגלית a שקלים בארנק. היא קנתה 300 ג' גבינה מותכת במחיר b ש' לק"ג

ו-200 ג' גבינה לבנה במחיר c ש' לק"ג. כמה שקלים נותרו בידי גלית אחרי התשלום?

10. רמי קיבל x ש' דמי כיס. הוא קנה a קלפים במחיר b ש' כ"א ובכסף הנותר קנה 2 חפיסות שוקולד. כמה שילם רמי לחפיסה?

11. צבעי קנה a גלונים סיד במחיר x ש' לגלון. היות שהייתה בידי המחאה של b ש' הוא קנה גם c קופסאות צבע שמן. כמה שילם הצבעי לקופסה, אם ההמחאה כיסתה בדיוק את קניה.

12. ארז מקבל a ש' דמי כיס לשבוע. אחיו הגדול מקבל ב- b ש' יותר. הם החליטו לחסוך את דמי הכיס במשך שלושה שבועות כדי לקנות מתנה להוריהם. אחרי קניית המתנה נותר בידי שניהם ביחד c ש'. כמה הוציאו על המתנה.

13. מרים קנתה חולצה ב- a ש' ומכנסיים שמחירים גדול בשליש ממחיר החולצה. כמו כן, היא קנתה שמלה שעלתה לה ב- b ש' יותר מאשר החולצה והמכנסיים גם יחד. בתום הקניות נותרו בידה c ש'. מה הסכום שהיה בידה לפני הקניות.

14. טכנאי מתחיל מקבל m ש' לשעת עבודה. טכנאי מנוסה מקבל ב-  $\frac{1}{4}$  יותר

מהטכנאי המתחיל. בחברה שני טכנאים מתחילים ואחד מנוסה. כל הטכנאים עבדו במשך 10 שעות בפרוייקט מסוים ובעקבות הצלחתו קיבל כל טכנאי תוספת של 2k ש'. כמה שילמה החברה לטכנאים.

15. אגודה המטפלת בבעלי חיים זקוקה ל- m ש' לטיפול שנתי בחתול וב-  $\frac{1}{3}$  יותר

לטיפול שנתי לכלב. באגודה a חתולים ו- b כלבים. בקופת האגודה היו רק c ש"ח, לכן ערכו התרמה והשלימו לסכום השנתי הנחוץ להם.  
א. כתוב ביטוי אלגברי לסכום שנתרם.  
ב. אם ידוע שהסכום שהיה בקופה הוא מחצית ממה שנדרש  
כתוב תבנית פסוק המקשרת בין a, b.

16. פקיד קנה למשרד 7 עטים שחורים במחיר a ש' כ"א ו- 3 עטים אדומים במחיר b ש' כ"א. כמה שילם הפקיד בממוצע לעט?

17. נורית קנתה a ק"ג בשר בקר במחיר m ש' לק"ג ו- b ק"ג בשר כבש במחיר n ש' לק"ג. כמה שילמה נורית בממוצע לק"ג בשר?

18. יצואן שלח k חבילות לחו"ל. קבוצה אחת של a חבילות שקלו p ק"ג כ"א, והחבילות האחרות שקלו t ק"ג כ"א.  
א. מה היה משקל קבוצת החבילות השניה?  
ב. מה היה המשקל הממוצע לחבילות במשלוח?

19. יבואן קנה שני סוגי קפה: a ק"ג מסוג אחד במחיר k ש' לק"ג, ו-b ק"ג מסוג שני במחיר m ש' לק"ג. המשלוח עלה לו p ש'. כמה עלה ליבואן ק"ג קפה בממוצע?
20. מפעל לבשר טוחן בשר משני סוגים: a ק"ג בשר במחיר f ש' לק"ג, ו-b ק"ג במחיר k ש' לק"ג. המפעל מכר חבילות של 1 ק"ג בשר טחון (מעורב) במחיר s ש' לק"ג.  
 א. כמה עלתה למפעל חבילה אחת של בשר טחון?  
 ב. כמה הרוויח המפעל לחבילה (קבע מהו התנאי לגבי הערך של s כדי שלמפעל יהיה רווח)?
21. שכיר השתכר במשך מחצית השנה הראשונה לעבודתו a ש' לחודש. במשך השנה וחצי הבאה גדלה משכורת החודשית ב-b ש' ובשנה השלישית ב-b ש' נוספים. מה הייתה משכורתו החודשית הממוצעת בשלוש שנים אלו.
22. א. עבור סריגת סוודר לגבר או לאישה נחוצים a ג' צמר, עבור סוודר לילד b ג'. בית חרושת ייצר k סוודרים לגברים, m - לנשים ו-n לילדים. מה היה המשקל של סוודר בממוצע?  
 ב. בית החרושת מפעיל משאית שתכולתה s ק"ג, להפצת הסוודרים לחנויות. מה צריך לקיים s, כדי שאפשר יהיה לשלוח את כל הסוודרים שיוצרו (בסעיף א').
23. תכולת משאית a טון. במפעל לרהיטים העמיסו על המשאית 2 מזנונים שמשקל כל אחד k ק"ג ו-3 מיטות, שמשקל כ"א m ק"ג. מה צריכים לקיים a, m, k כדי שהעמסת המשאית תהיה תקינה?.
24. בתנאי הבעיה הקודמה רוצים להכניס למשאית עוד 6 כסאות שמשקל כ"א t ק"ג. מה צריך לקיים t כדי שניתן יהיה להעמיס את הכיסאות על המשאית?
25. סוחר מחר a מ' בד משי ברווח של k ש' למטר וכן b מ' בד צמר בהפסד של 1 ש' למטר. מה הקשר שצריכים לקיים a, b, k כדי שהסוחר ירוויח בסיכום העסקאות הנ"ל?
26. גילו של מיכאל - a שנים. גיל אביו b שנים. בעוד c שנים יהיה גיל האב פי שניים מגיל בנו.  
 א. כתוב ביטויים: לגיל האב ולגיל הבן כעבור c שנים.  
 ב. כתוב תבנית פסוק, המקשרת בין a, b, c.
27. הגילים של שתי אחיות הם: m ו-n שנים בהתאמה. גיל אימם - k. לפני שנה היה גיל האם שווה לסכום גילי הבנות.  
 כתוב נוסחה, המקשרת בין m, n, k.

28. גילה של אפרת - k שנים, וגיל אמה - t. כשהייתה אפרת בת 5 נולדו 2 אחיה התאומים. בעוד שנה יהיה גיל האם פי 2 מסכום גיל ילדיה. כתוב נוסחה המקשרת בין k, t.

29. אורך הצלע של ריבוע a מטרים. א. מהו היקף הריבוע ביחידות של מ' ושל ס"מ? ב. מהו שטח הריבוע ביחידות של מ"ר ושל דצימ"ר?

30. אורך מלבן m ס"מ רוחבו n מ"מ. בטא את היקפו ואת שטחו באמצעות n, m.

31. בריבוע שצלעו a ס"מ האריכו שתי צלעות נגדיות שלו ב- m ס"מ כל אחת ואת שתי הצלעות הנגדיות האחרות הקטינו ב- k ס"מ כל אחת. התקבל מלבן ששטחו שווה לשטח הריבוע הנתון. בטא את הקשר בין a, m, k.

32. התייחס לנתוני הבעיה הקודמת וכתוב ביטוי לשינוי שחל בהיקף המלבן ביחס להיקף הריבוע. מהו התנאי לכך שהיקף המלבן גדול מהיקף הריבוע.

33. בגן ציבורי שתלו פרחים במסגרות ריבועיות:

6 ריבועים שאורך הצלע שלהם a מ' עם פרחים לבנים, ו- 5 ריבועים שאורך הצלע שלהם b מ' עם פרחים אדומים. השטח הכולל של פרחים אדומים גדול ב- 1.5 מ"ר משטח הפרחים הלבנים. כתוב תבנית פסוק המקשרת בין a ו- b.

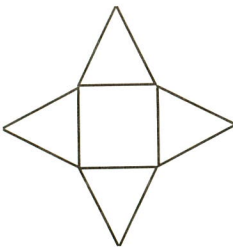
34. רוחבו של מלבן הוא k ס"מ. אורכו גדול מרוחבו ב- 30%. מהו היקף המלבן?

35. אורך השוק של משולש שוו"ש k ס"מ. הבסיס קטן ב- 20% מהשוק. מהו היקף המשולש?

36. אורך שולחן באולם תצוגה b מ' והרוחב קטן מהאורך ב- 60%. חברה חיברה 5 שולחנות להצגת מוצריה. מהו שטח התצוגה שהתקבל?

37. צלע אחת של ריבוע שגודלה a הוגדלה ב- 10% ואילו השניה הוקטנה ב- 10%. בטא את שטח המלבן שנוצר באמצעות a.

38. בכיכר עשו ריצוף בשני צבעים: אפור ששימש כרקע וחום בצורה הבאה: עיגול מרכזי בעל רדיוס השווה ל- R ומסביבו 8 עיגולים שרדיוס כל אחד מהם קטן ב- 25% מרדיוס העיגול המרכזי. כתוב ביטוי לשטח המרוצף בצבע חום.



39. הגובה במשולש שוו"ש גדול ב- 15%

מבסיסו של המשולש, שאורכו k.

- א. בטא את שטח המשולש באמצעות k.  
 ב. מה יהיה שטחה של צורה הנדסית, המורכבת מארבעה משולשים שוו"ש כאלה, כולל החלק הכלוא ביניהם.

40. עמית משתכר a ש' לחודש. אחיו המבוגר, גיל משתכר ב- 20% יותר. שני האחים הילוו ביחד סכום, השווה לשתי משכורות שלהם, לאחותם רינת לצורך רכישת מכונית. מהו הסכום שקיבלה רינת מאחיה?
41. שני חברים עבדו בקטיף תפוזים. יוני קטף a תפוזים ליום, ומאיר קטף ב- 10% יותר ליום. כמה תפוזים הם קטפו ביחד, במשך 5 ימים?
42. משכורתו של עובד מתחיל הייתה a ש' לחודש. כעבור 8 חודשים העלו את משכורתו ב- 10%. מה הייתה הכנסתו של העובד במשך השנה הראשונה לעבודתו?
43. יכולו של שדה היה בשנה הראשונה k טון לדונם. בשנה השניה קטן היבול ב- 5% לדונם. מה היה היבול הכולל במשך שנתיים אם שטח השדה 20 דונם.
44. לתפירת חליפה נחוצים a מטר בד, כאשר מתוך זה b מ' לחולצה וב- 5% פחות לחצאית. כתוב קשר בין a ו- b.
45. לנגר נחוצים a מ"ק עץ לייצור פינת אוכל (שולחן + 6 כסאות). השולחן צורך ב- 45% יותר עץ מאשר כסא.  
 א. סמן את הכמות העץ הנחוצה לכסא ב- x ומצא קשר בין x ו- a.  
 ב. בטא באמצעות a את כמות העץ הנחוצה לכסא.
46. אדם רץ במשך שעתיים במהירות של m קמ"ש ואחר כך המשיך עוד שעה וחצי במהירות k קמ"ש. מהו המרחק הכולל שעבר הרץ?
47. מכונית עברה דרך של k ק"מ במהירות a קמ"ש וקטע נוסף של b ק"מ במהירות הדגולה ב- 5 קמ"ש מהקודמת. כמה זמן ארכה הדרך?
48. תלמיד רכב על אופניו מביתו לביה"ס במהירות של a מטרים לדקה במשך k דקות. בדרכו חזרה הוא הגביר את מהירותו ב- b מטרים לדקה. כמה זמן ארכה הדרך חזרה לביתו?
49. בתחרות רכיבה על אופניים עשה ערן את הקטע הראשון במהירות של a קמ"ש במשך 1.5 שעות ואת הקטע השני במהירות של b קמ"ש במשך 2.5 שעות. מה הייתה מהירותו הממוצעת?
50. שחיין עבר 400 מ' בסגנון חזה במהירות של a מטר לדקה ו- 600 מטר בסגנון חתירה במהירות של b מטר לדקה. המתחרה שלו עבר את כל המרחק במהירות של c מ/ד. כתוב קשר בין a, b, ו- c המעיד על כך שהמתחרה השני זכה בתחרות.

51. גובהה של מערת נטיפים a מ'. נטיף גדל "במהירות" של m מ"מ לשנה ואילו זקיף הנמצא בדיוק מתחתיו - n מ"מ לשנה. הנטיף והזקיף התחברו כעבור t שנים. כתוב קשר בין a, m, n ו-t.
52. אדם נוסע לעבודתו - במרחק a ק"מ מביתו במהירות ממוצעת של b קמ"ש. יום אחד יצא באחור של שעה ולכן הגביר את מהירותו ב- 10 קמ"ש והגיע לעבודה במועד הרגיל. כתוב קשר בין a ו-b.
53. שני רצים התאמנו לאורך מסלול ריצה של a מ'. הם התחילו בקצות המסלול ורצו זה לקראת זה, האחד במהירות של m מ/שני והשני במהירות של k מ/שני. הם עברו זה על פני זה כעבור 8 שניות. כתוב נוסחה המקשרת בין a, m, k.
54. משאית מובילה מוצרים למרכז סיטונאי הנמצא במרחק של a ק"מ.  $\frac{3}{4}$  מהדרך עברה במהירות ממוצעת של m קמ"ש. בהמשך הדרך הכביש היה עמוס ולכן ירדה מהירותה הממוצעת ב- 20 קמ"ש. בטא את משך זמן נסיעת המשאית באמצעות a ו-m.
55. התייחס לנתונים שבבעיה הקודמת, ונוסף לזה ידוע שהמשאית אחרה בשעה ביחס לזמן שהייתה אמורה להגיע לסיטונאי אילולא העומס בחלק השני של הדרך. רשום קשר בין a ו-m.
56. רצף בלתי מנוסה מרצף a מ"ר. לשעה, רצף מומחה מרצף b מ"ר לשעה. שני הרצפים עבדו ביחד באולם ששטחו m מ"ר. בכמה זמן סיימו לרצף את כל האולם?
57. צבעי אחד יכול לסיים צביעת בנין שלם ב-a ימים. צבעי אחר יכול לצבוע את הבניין הני"ל ב-b ימים. שני הצבעים החליטו לצבוע את הבניין ביחד.  
 א. איזה חלק של הבניין יצבעו במשך יום אחד?  
 ב. איזה חלק של הבניין יצבעו במשך k ימים?  
 ג. אם צביעת הבניין תסתיים ב-k ימים, כתוב נוסחה המקשרת בין a, b ו-k.
58. בעזרת מחרשה רגילה אפשר לחרוש שדה ב-m שעות ואילו בעזרת מחרשה חדישה אפשר לחרוש אותו שדה בשעה אחת פחות. חקלאי הפעיל מחרשה רגילה, אך אחרי שחרש מחצית מהשדה היא התקלקלה ולכן קנה מחרשה חדישה להשלים העבודה. חריש נמשך בסיכום b שעות.  
 א. כמה זמן פעלה המחרשה הרגילה עד שהתקלקלה?  
 ב. כמה זמן פעלה המחרשה החדשה?  
 ג. כתוב נוסחה המקושרת בין m ו-b.

59. מכונת אספלט מסוגלת לסיים כביש מסוים ב-  $a$  שעות. מכונת אספלט יותר משוכללת מסוגלת לסיים אותו כביש בשעתיים פחות. שתי מכונות החלו לעבוד באותו זמן על אותו הכביש, כל אחת מקצה אחר והתקדמו זו לקראת זו. כעבור  $b$  שעות נפגשו המכונות עם סיום העבודה. כתוב קשר בין  $a$  ו-  $b$ .
60. בתמיסת כהל יש  $a$  ליטר מים ו-  $b$  ליטר כהל.  
כתוב ביטוי אלגברי שיבטא  
א. את כמות תמיסת הכהל  
ב. איזה חלק מהתמיסה מהווה הכהל  
ג. את ריכוז התמיסה באחוזים.
61. בתמיסת מלח  $m$  ליטר מלח ו-  $k$  ליטר מים. מוסיפים לתמיסה 10 ליטר מים.  
א. מהו ריכוז המלח בתמיסה לפני הוספת מים?  
ב. מהו ריכוז המלח בתמיסה אחרי הוספת מים?
62. במיכל נמצאים  $a$  ליטרים תמיסת כהל בריכוז 20%.  
א. מהי כמות הכהל הטהור בתערובת?  
ב. לתערובת הני"ל מוסיפים  $b$  ליטר כהל טהור. מהו ריכוז הכהל בתערובת החדשה.
63. לתערובת של  $a$  ליטר מי מלח בעלת ריכוז 30% מוסיפים  $b$  ליטר תערובת מי מלח בריכוז 40%.  
א. בטא את הכמות המלח הטהור בכל תערובת באמצעות  $a$  ו-  $b$ .  
ב. אם ריכוז התערובת שהתקבלה 38%, כתוב ביטוי לכמות המלח בה.  
ג. כתוב נוסחה המקשרת בין  $a$  ו-  $b$ .
64. התייחס לנתונים בבעיה הקודמת והנח שלכל אחת מהתערובות של מי מלח הוסיפו 5 ליטר מים, והתקבלה תערובת בריכוז 32%.  
בטא את הקשר בין  $a$  ו-  $b$ .

### תשובות

1. א.  $a+5$  ב.  $a-4$  ג.  $10a$  ד.  $\frac{a}{8}$  ה.  $\frac{2}{3}a$  ו.  $\frac{a}{2}+1$  ז.  $11a+5$  ח.  $3-\frac{a}{8}$  ט.  $\frac{1}{2}a$
- י.  $1.1a$  יא.  $0.8a$  יב.  $3a$  2. א.  $100a$  ב.  $100m+n$  ג.  $1000+a$  ד.  $100a+2$
3. א.  $\frac{1}{100}a$  ב.  $b+\frac{1}{2}$  ג.  $a+\frac{1}{100}m$
4. א.  $100m$  ב.  $10a$  ג.  $100a+10b$  ד.  $100b+c$  ה.  $50+a$
5. א.  $10a$  ב.  $\frac{1}{10}b$  ג.  $10a+t+\frac{1}{10}(n-1)$  6. א.  $1000a$  ב.  $0.001b$  ג.  $50a+0.1b$
7.  $5a+bc$  8.  $ab+km+c$  9.  $a-(0.3b+0.2c)$  10.  $\frac{x-ab}{2}$  11.  $\frac{b-ax}{c}$  12.  $3(2a+b)-c$

- 13.**  $4\frac{2}{3}a + b + c$  **14.**  $32\frac{1}{2}m + 6k$  **15.**  $ma + 1\frac{1}{3}mb - c$  **ג.**  $c = \frac{am}{2} + \frac{2}{3}bm$
- 16.**  $\frac{7a+3b}{10}$  **17.**  $\frac{am+bn}{a+b}$  **18.**  $t(k-a)$  **ג.**  $\frac{ap+t(k-a)}{k}$  **19.**  $\frac{ak+mb+p}{a+b}$
- 20.**  $\frac{fa+kb}{a+b}$  **ג.**  $s > \frac{fa+kb}{a+b}$  ,  $s = \frac{fa+kb}{a+b}$  **א.** **21.**  $\frac{6a+7b}{6}$  **א.** **22.**  $\frac{ak+am+bn}{k+m+n}$
- 23.**  $1000a \geq 2k + 3m$  **24.**  $t \leq \frac{1000a-2k-3m}{6}$  **ב.**  $1000s \geq ak + am + bn$  (בגרמים)
- 25.**  $ak > b$  **א.**  $b+c, a+c$  **ג.**  $b+c=2(a+c)$  **26.**  $k=m+n-1$  **27.**  $t=6k-15$
- 29.**  $400a, 4a$  **ג.**  $100a^2, a^2$  **30.** היקף המלבן בס"מ:  $2m + \frac{1}{5}n$
- 31.**  $\frac{1}{10}mn$  שטח המלבן בסמ"ר:  $(a+m)(a-k) = a^2$
- 32.**  $2(a+m)+2(a-k)-4a, m > k$  **33.**  $5b^2 = 6a^2 + 1.5$  **34.**  $4.6k$  **35.**  $2.6k$  **36.**  $2b^2$
- 37.**  $0.99a^2$  **38.**  $5\frac{1}{2}\Pi R^2$  **א.** **39.**  $0.575k^2$  **ג.**  $3.3k^2$  **40.**  $4.4a$  **41.**  $10.5a$
- 42.**  $12.4a$  **43.**  $39k$  **44.**  $1.95b=a$  **א.** **45.**  $7.45x=a$  **ג.**  $\frac{a}{7.45}$  **46.**  $2m+1.5k$
- 47.**  $\frac{k}{a} + \frac{b}{a+5}$  **48.**  $\frac{ak}{a+b}$  (דקות) **49.**  $\frac{1.5a+2.5b}{4}$  **50.**  $\frac{400}{a} + \frac{600}{b} > \frac{1000}{c}$
- 51.**  $\frac{1}{1000}(m+n) \cdot t = a$  **52.**  $a = (b+10)(\frac{a}{b}-1)$  **53.**  $a=8m+8k$
- 54.**  $\frac{3a}{4m} + \frac{a}{4(m-20)} = \frac{a}{m} + 1$  **55.**  $\frac{m}{a+b}$  **56.**  $\frac{3a}{4m} + \frac{a}{4(m-20)}$  **א.**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- 57.**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  **ג.**  $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \cdot k$  **58.**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}$  **א.**  $\frac{m}{2}$  **ג.**  $\frac{m-1}{2} = b$
- 59.**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a-2} = \frac{1}{b}$  **א.**  $a+b$  **ג.**  $\frac{b}{a+b}$  **60.**  $\frac{100m}{m+k}$  % **א.** **61.**  $\frac{100b}{a+b}$  % **ג.**
- 62.**  $\frac{100m}{m+k+10}$  % **א.**  $0.2a$  **ג.**  $\frac{100(0.2a+b)}{a+b}$  % **63.**  $0.3a+0.4b$  **א.**
- 64.**  $0.3a+0.4b=0.38(a+b)$  **ג.**  $0.38(a+b)$  **א.**  $0.3a+0.4b=0.32(a+b+10)$

### חידה

חזית אמרה לאל"ת: תחשבי על מספר, הכפילי אותו ב-2, הוסיפי לו 6, חלקי את התוצאה ב-3, אח כ החסירי 2 ואת התוצאה הכפילי ב-3. מה קיבלת? 8 עונה אל"ת. החרת 4 אחרת חזית במהירות. נכון, אמרה אל"ת. איך ידעת?

תשובה: תוצאת הפעולות הללו על המספר היא מספר כפול מזה שנבחר. אם בחרנו a, נקבל:  $(\frac{2a+6}{3} - 2) \cdot 3 = 2a$

# פרק יב': פונקציות וגרפים

## 1. פונקציות

הטבע נמצא במצב תמידי של שינויים, כאשר גורמים שונים משפיעים זה על זה, ושינוי בגורם אחד עשוי לגרום שינוי בגורם אחר. למשל: עם שינוי הגובה על פני הים, משתנה לחץ האוויר, עם שינוי צלע הריבוע, משתנה שטחו או היקפו, וכו'. כל גורם שניתן למדוד אנו מכנים **גודל**. הגדלים יכולים להיות משני סוגים: קבועים ומשתנים.

**גודל קבוע** הוא גודל שיש לו תמיד אותו ערך, כמו מספר ימי השבוע, מספר שעות ביום, מספר המעלות של זווית ישרה, סכום הזוויות במשולש, וכו'.

**גודל משתנה** הוא גודל שיכול לקבל ערכים שונים, וכאן שוב שני סוגים:

**משתנה חופשי**, בלתי תלוי, שיכול לקבל ערכים כלשהם, כרצוננו, רדיוס של מעגל, צלע של ריבוע, זמן תנועה של גוף נע, וכו'.

**משתנה תלוי** - פונקציה, משתנה שערכיותלויים בערכי המשתנה החופשי, שבו הוא תלוי. שטח המעגל תלוי באורך הרדיוס שלו, שטח הריבוע או היקפו תלויים בגודל צלע הריבוע - פונקציה שתלויה במשתנה אחד. הדרך שגוף עובר תלויה גם במהירותו וגם בזמן תנועתו, שטח מלבן תלוי גם באורכו וגם ברוחבו - פונקציה שתלויה בשני משתנים חופשיים.

במתמטיקה נוהגים לסמן את המשתנה החופשי - המכונה גם **הארגומנט** או **הפסוק** באות  $x$  ואת הפונקציה המכונה גם **הפוסק** - באות  $y$ , ורושמים:  
 $y = F(x)$  (שפרשו  $y$  הוא פונקציה של  $x$ ).

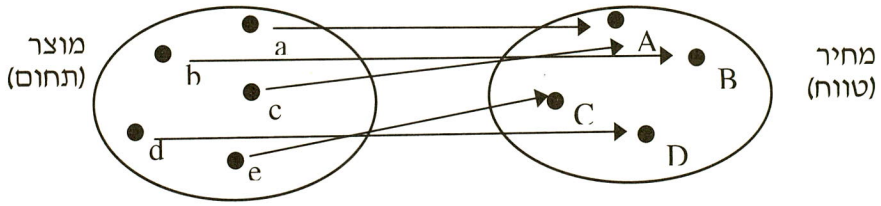
בהגדרת פונקציה יש להקפיד על שני כללים:

1. **להגדיר את כלל ההתאמה (הקשר) בין המשתנים**. זה מאפשר למצוא ערך של  $y$  המתאים לערך מסוים של  $x$ .
2. **לציין את תחום ההגדרה של  $x$**  - זוהי קבוצת כל הערכים, שהמשתנה יכול לקבל.

ברב הבעיות, נתון הקשר בין המשתנים בצורה אלגברית. קבוצת הערכים ש- $x$  יכול לקבל, מהווה **תחום קיום** הפונקציה, או **תחום ההגדרה** שלה. קבוצת הערכים ש- $y$  יכול לקבל - בהצבת הערך של  $x$  במשוואת הפונקציה מהווה **טווח** הפונקציה.

## דוגמאות של פונקציות

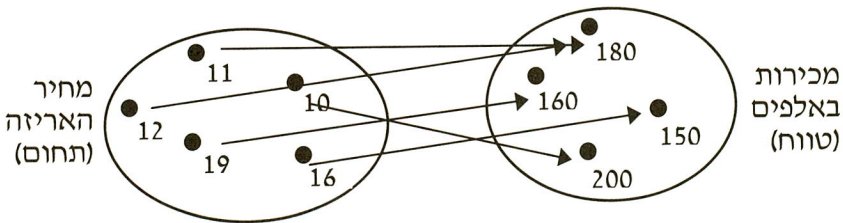
א. פונקציה המתאימה לכל מוצר בכל-בו את המחיר שלו.



המוצר הוא המשתנה הבלתי תלוי, המחיר הוא הפונקציה. יתכנו שני מוצרים עם אותו מחיר, אבל לא יתכן מוצר אחד (באותה חנות) עם שני מחירים.

אפשר גם לרשום טבלה עם שתי שורות, שבאחת מהן רושמים את המספר הסידורי של המוצר ובשניה את המחיר שלו.

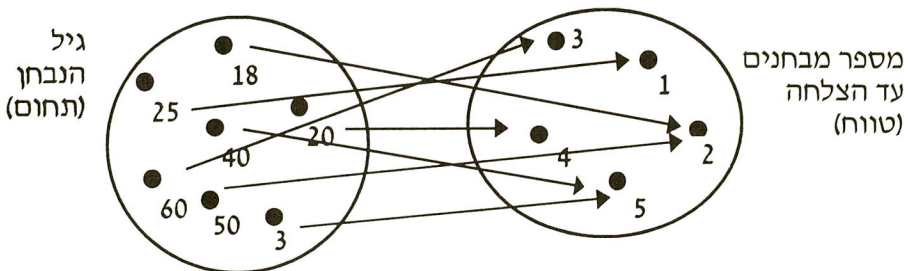
ב. פונקציה המתאימה למחיר של סוג חדש של אבקת כביסה את כמות המכירות שלה:



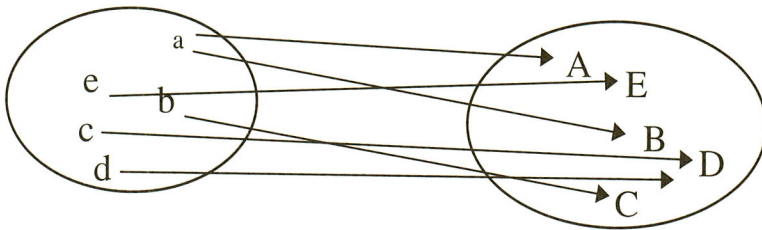
נרשום את זה גם בטבלה:

19	16	12	11	10	מחיר אריזה בש'
160	150	180	180	200	מכירות באלפים

ג. פונקציה המתאימה לגילו של הניגש למבחן נהיגה, את מספר הפעמים הממוצע, שהוא נבחן עד קבלת הרשיון:



ד. ההתאמה הבאה אינה פונקציה, כי לא מתקיים התנאי שצריך להיות ערך יחיד של הפונקציה לכל ערך של המשתנה: למשתנה  $a$  למשל מתאים גם  $A$  וגם  $B$ .



הדרך הפשוטה ביותר להגדרת פונקציה היא הדרך האלגברית, בעזרת נוסחה. במסגרת זו נעסוק בפונקציות בצורה אלגברית. כאמור, אפשר לרשום פונקציה בצורה:  $y=f(x)$  או  $y=F(x)$ .

$f(x)$  או  $F(x)$  מסמן את כל הפעולות, שצריך לבצע ב- $x$ , כדי לקבל את הערך המתאים של  $y$ .

למשל, הפונקציה:  $y=2x+3$  או  $f(x)=2x+3$  אומרת: כפול את הערך של  $x$  ב-2, והוסף לתוצאה 3, ואז תקבל את הערך המתאים של  $y$ . למשל:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \quad f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7, \quad f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

### תחום ההגדרה של הפונקציה.

**תחום הגדרה או תחום הקיום** של הפונקציה הוא תחום ההצבה של תבנית המספר. זכור, תחום ההצבה של תבנית מספר זו קבוצת כל הערכים, שהצבתם במקום האותיות שבתבנית, מאפשרת את ביצוע הפעולות הרשומות בה. נזכיר מספר דוגמאות:

א. בפונקציה  $f(a)=3a+5$  כל ערך מספרי שמציבים במקום  $a$  מאפשר את חישוב ערך התבנית, ולכן תחום הקיום של הפונקציה הוא "כל ערך של  $a$ ".

ב. בפונקציה  $f(m)=\frac{1}{m}$ , אפשר להציב במקום  $m$  כל מספר פרט ל-0, כי  $\frac{1}{0}$  לא מוגדר, לכן תחום ההגדרה של פונקציה זו הוא  $m \neq 0$ .

ג. בפונקציה  $f(m)=\sqrt{m}$  אפשר להציב רק ערכים לא שליליים, כי שורש ריבועי ממספר שלילי לא מוגדר בתחום המספרים הממשיים. לכן, יהיה תחום הקיום  $m \geq 0$ .

ד. בפונקציה  $f(k)=\sqrt{k-1}$  תחום הקיום הוא  $k \geq 1$ , כי  $k-1 \geq 0$ , ואילו בפונקציה  $f(k)=\sqrt{5-k}$  תחום הקיום הוא  $k \leq 5$ , כי  $5-k \geq 0$ .

ה. בפונקציה  $f(k,m,n)=\frac{m+n}{\sqrt{5-k}}$  תחום הקיום הוא  $k < 5$ , כי הערך  $k=5$

מאפס את המכנה. ההגבלה כאן כפולה - גם של פעולת חילוק וגם של הוצאת שורש.

1. בפונקציה  $f(k) = \frac{\sqrt{5-k}}{k-1}$  יש לבדוק את התחום הקיום גם לגבי המונה  $k \leq 5$  וגם לגבי המכנה  $k \neq 1$ . בסיכום, תחום הקיום הוא "כל ערך של  $k$  שקטן מ-5 או שווה לו, אך שונה מ-1" או  $\{k \neq 1, k \leq 5\}$ .

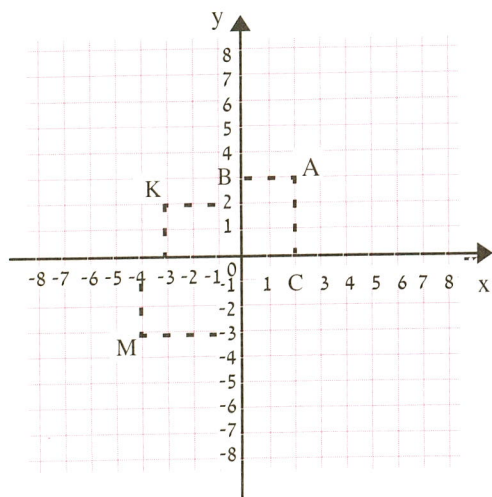
## 2. גרפים

### 2.1 מערכת הצירים

בפרק הראשון הגדרנו את המושג ציר המספרים, וראינו את ההתאמה:

**מספר  $\Leftrightarrow$  נקודה**

כאשר הנקודה היתה על ציר המספרים. נתייחס עתה לנקודות הנמצאות במקום כלשהו במישור. את הנקודות הללו, לא ניתן לציין בעזרת מספר אחד, ולכן גם לא מספיק ציר מספרים אחד. קיימות דרכים רבות להציג נקודה בעזרת מספרים. במסגרת זו נעזר **במערכת צירים קרטזית ישרת זווית**. מערכת זו מורכבת משני צירי מספרים מאונכים זה לזה, הנחתכים בנקודת האפס של שניהם - בראשית הצירים, כאשר כיוון גדילת המספרים על הציר המאוזן (יסומן ציר ה- $x$ ) ימינה, ועל הציר המאונך (ציר ה- $y$ ) כלפי מעלה.



במערכת צירים זו, מוגדרת כל נקודה ע"י רוחקיה משני הצירים. שני האנכים לצירים יוצרים יחד עם הצירים מלבן בו הצלעות הנגדיות שוות. למשל, רוחק הנקודה  $A$  מציר ה- $y$  ( $AB$ ) שווה לקטע  $OC$  שעל ציר ה- $x$ , ואילו הרוחק שלה מציר ה- $x$  ( $AC$ ), שווה ל- $OB$  שעל ציר ה- $y$ . לפיכך: רוחק של נקודה מציר ה- $y$  נמדד על ציר ה- $x$  (ה- $x$  של הנקודה), ורוחקה מציר ה- $x$  נמדד על ציר ה- $y$  (ה- $y$  של הנקודה). נהוג לציין נקודה באמצעות שני מספרים, שהראשון מהם (השמאלי), הוא שעור ה- $x$  של הנקודה והשני שעור ה- $y$  שלה.

למשל, לגבי הנקודה  $A$ , נציין:  $A(2,3)$ . המספרים 2 ו-3 הם השעורים (או הקואורדינטות) של הנקודה. בצורה כללית ההתאמה היא:

**של מספרים נקודה  $\Leftrightarrow$  זוג מסודר**

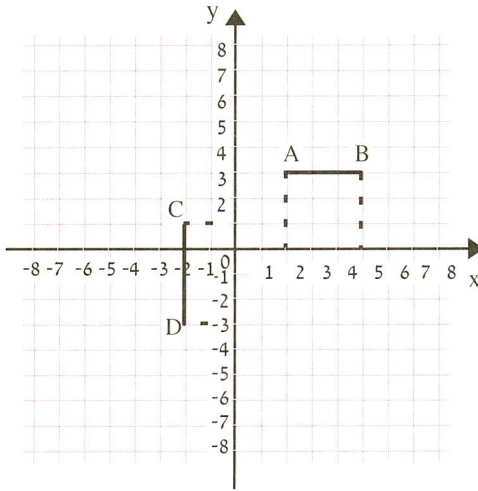
כאשר המושג "מסודר" אומר: השעור הראשון הוא ערך ה- $x$  והשני ערך ה- $y$ . דוגמאות נוספות:  $M(-4,-3)$ ,  $K(-3,2)$ .

הצירים מחלקים את המישור לארבעה רבעים שנכנה אותם **רביעים** :

- רביע I** - שבו שעורי ה- $x$  וה- $y$  שניהם חיוביים ( $y > 0, x > 0$ )
- רביע II** - שבו שעור ה- $x$  שלילי וה- $y$  חיובי ( $y > 0, x < 0$ )
- רביע III** - שבו שעורי ה- $x$  וה- $y$  שניהם שליליים ( $y < 0, x < 0$ )
- רביע IV** - שבו שעור ה- $x$  חיובי ושעור ה- $y$  שלילי ( $y < 0, x > 0$ )

נחזור למושג פונקציה. ראינו, שלכל ערך של  $x$  (שבתחום ההגדרה) מתאים ערך יחיד של  $y$ . זאת אומרת, שיש זוגות של ערכים ל- $x, y$ , שהצבתם בתוך נוסחת הפונקציה מאמתת את השוויון.

כל זוג כזה של מספרים, ניתן להציג כשעורי נקודה במערכת צירים. אם נקודה נמצאת על אחד מהצירים, ברור שרוחקה מציר זה הוא -0. למשל, שעורי הנקודה C, המונחת על ציר ה- $x$  הם:  $(2, 0)$  ושעורי הנקודה B, המונחת על ציר ה- $y$ :  $(0, 3)$ . הנקודה O היא **ראשית הצירים** ושעוריה:  $(0, 0)$ .



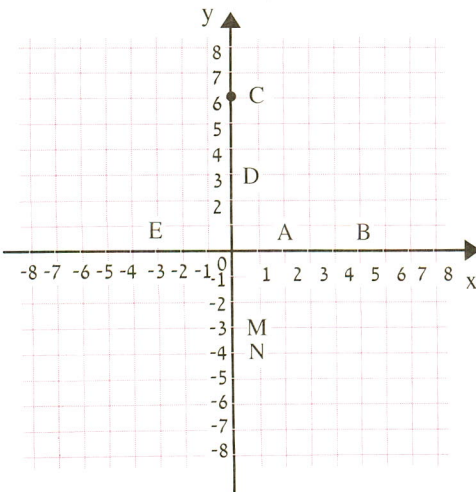
נקודות המונחות על ישר מקביל לאחד מהצירים, נמצאות במרחקים שווים מציר זה. הדבר מתבטא

בשעוריהן. למשל, הנקודות  $A(2, 3)$  ו- $B(5, 3)$  נמצאות על ישר מקביל לציר ה- $x$  ברוחק 3 יחידות ממנו,

$$y_A = y_B$$

והנקודות  $C(-1, 1)$  ו- $D(-1, -3)$  מונחות על ישר מקביל לציר

ה- $y$  ברוחק יחידה אחת ממנו (בצד השלילי):  $x_C = x_D$



**אורך קטע המונח על אחד מהצירים מתקבל ע"י ערך מוחלט של הפרש שעורי קצות הקטע.**

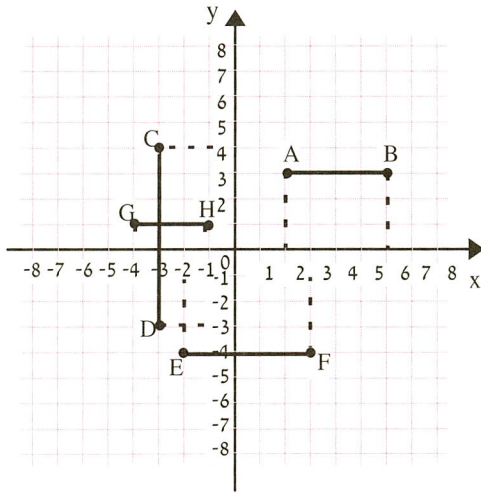
באופן מעשי, נוח להחסיר מערך שמתקדם יותר בכיוון הגדילה את קודמו (ואז אין צורך בערך מוחלט).

למשל, את אורך הקטע AB אפשר לחשב ע"י ההפרש:  $5 - 2 = 3$  (מתקדמת יותר מ-A בכיוון הגדילה, ולכן ערך ה- $x$  שלה גדול מערך ה- $x$  של A).

באותו אופן:

$$AE = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5, \quad CD = 6 - 3 = 3$$

$$MN = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1, \quad CM = 6 - (-3) = 6 + 3 = 9$$



**אורך קטע המונח על ישר מקביל לאחד מהצירים נמדד על הקטע השווה לו על הציר המקביל לו.**

באופן מעשי, אורך הקטע שווה להפרש שעורי קצות הקטע על הציר המקביל.

למשל, AB מקביל לציר ה-x.

שעורי קצותיו על ציר זה: 6 ל-B (המתקדם יותר בכיוון הגדילה),

ו-2 ל-A. האורך:  $AB=6-2=4$

ובאותו אופן:  $CD=4-(-3)=4+3=7$

$EF=3-(-2)=3+2=5$

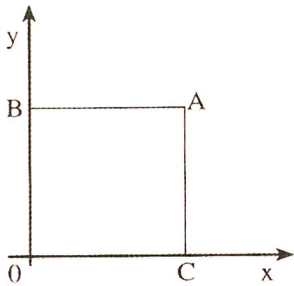
$GH=-1-(-4)=-1+4=3$

## 2.2 מצולעים במערכת הצירים

כאשר מחברים מספר נקודות במערכת הצירים, יכולים להיווצר קווים שבורים או מצולעים. אפשר לזהות מצולעים מיוחדים ע"פ קודקדיהם.



**דוגמאות**

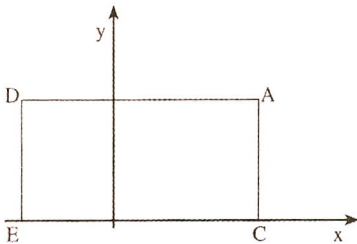


**א.** נתייחס לנקודות:  $C(3,0)$ ,  $B(0,3)$ ,  $A(3,3)$ . נקודות אלה יוצרות יחד עם ראשית הצירים, מרובע ABOC, שהוא ריבוע כי:

$AB \parallel x$ , וכי ל-A ול-B יש אותו שעור y.

ומאותה סיבה:  $AC \parallel y$ ,  $x_C = x_B = 3$ ,

שטח ריבוע זה: 9 יחידות שטח.



**ב.** נתון:  $E(-2,0)$ ,  $D(-2,3)$ ,  $C(3,0)$ ,  $A(3,3)$ .

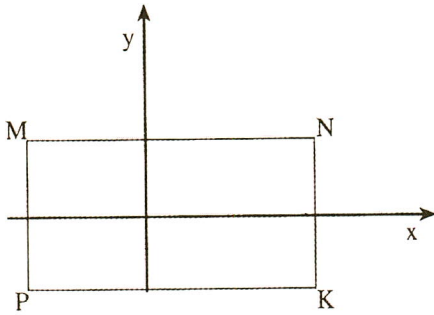
המרובע ADEC הוא מלבן. נמק.

נחשב את שטחו (ביחידות שטח):

$AC=3$ ,  $EC=3-(-2)=3+2=5$

$S = AC \cdot EC = 3 \cdot 5 = 15$

ג. נתון:  $K(4,-2)$ ,  $P(-3,-2)$ ,  $N(4,1)$ ,  $M(-3,1)$



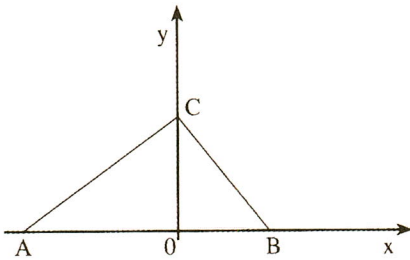
המרובע MNKP הוא מלבן, כי:  
 MN ו-PK מקבילים לציר ה-x (מדוע?)  
 ולכן הם מקבילים זה לזה. כמו כן,  
 MP ו-NK מקבילים לציר ה-y ולכן  
 מקבילים זה לזה. צירי השעורים  
 מאונכים זה לזה, ולכן גם הצלעות  
 המתאימות במרובע מאונכות זו לזו.  
 נחשב את שטחו:

$$MN = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

$$MP = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$$

$$S = MN \cdot MP = 7 \cdot 3 = 21$$

ד. נתון:  $A(-4,0)$ ,  $C(0,3)$ ,  $B(1,0)$



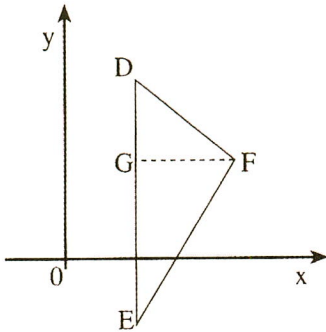
בסיס המשולש ABC הוא AB ואורכו:

$$AB = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

הגובה לצלע AB היא CO (כי הצירים  
 מאונכים זה לזה). אורכו:  $CO = 3$   
 ושטח המשולש:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7.5$$

ה. נתון  $F(4,2)$ ,  $E(2,-3)$ ,  $D(2,4)$



הצלע DE של המשולש DEF מקבילה  
 לציר ה-y (נמק!).

לכן, אורכה:  $DE = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$

הגובה FG מקביל לציר ה-x.

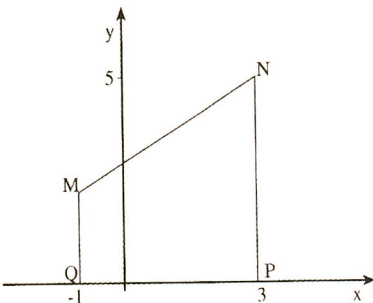
$$x_G = x_D = x_E = 2$$

$$FG = x_F - x_G = 4 - 2 = 2$$

ושטח המשולש:

$$S = \frac{1}{2} DE \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = 7$$

ו. נתון:  $Q(-1,0)$ ,  $P(3,0)$ ,  $N(3,5)$ ,  $M(-1,2)$



המרובע MNPQ הוא טרפז ישר זווית, כי

לפי שיעור הנקודות:  $MQ \parallel NP$

וכולם מאונכים לציר ה-x.

בסיסי טרפז זה MQ ו-NP, הגובה - QP.

נחשב את אורכיהם ואת שטח הטרפז.

$$MQ = 2, NP = 5, QP = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$$

$$S = \frac{1}{2} QP(MQ + NP) = \frac{1}{2} \cdot 4(2 + 5) = 14$$

## 2.3 תאור גרפי של פונקציה

כאמור, לכל זוג ערכים  $(x, y)$  של פונקציה, אפשר להתאים נקודה במערכת הצירים. אפשר לקבל אינסוף נקודות שיוצרות קו (ישר או עקום). קו זה נקרא **התאור הגרפי של הפונקציה** או בקיצור **גרף הפונקציה**.

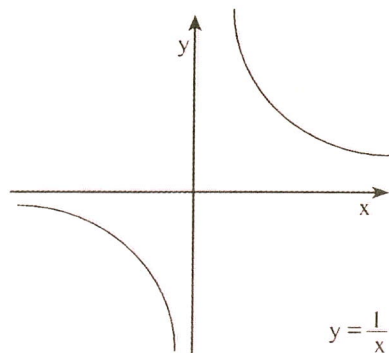
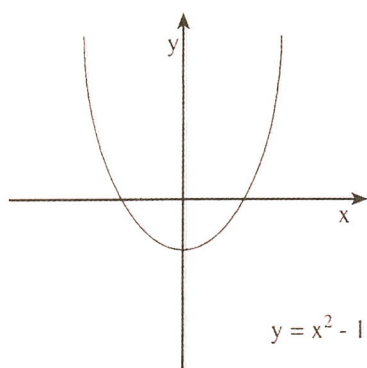
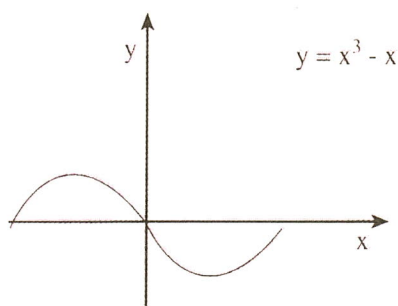
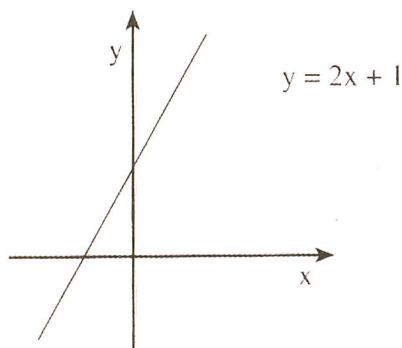
בשרטוט גרף של פונקציה, אנו נעזרים בטבלת ערכים, כאשר בשורה אחת שלה - ערכי  $x$  (מתחום ההגדרה), ובשורה השניה - ערכי  $y$  מתאימים.

**מקובל:**

- לרשום ערכי  $x$  מסודרים (בד"כ בסדר עולה, משמאל לימין)
- לחשב ולרשום את ערכי  $y$  המתאימים
- לסמן את הנקודות במערכת הצירים
- לחבר אותן לפי הסדר.

הקו המתקבל הוא תאור גרפי של הפונקציה. ברור שמה שאנו מקבלים, הוא תאור מקורב ולא שלם של הפונקציה, בהתאם למספר הנקודות שרשמנו ומידת הדיוק ששרטטנו.

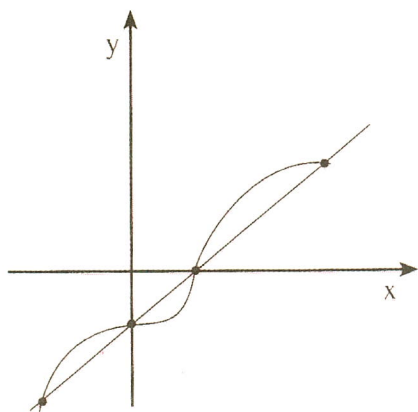
לפנינו מספר דוגמאות של פונקציות והגרפים שלהן:



## דוגמה א'

נתונה הפונקציה:  $y=x-2$ . תחום ההגדרה שלה - כל ערך ממשי.  
נרכיב את טבלת הערכים (אפשר לבחור כל ערך שאנו רוצים):

x	-4	0	3	5
y	-6	-2	1	3

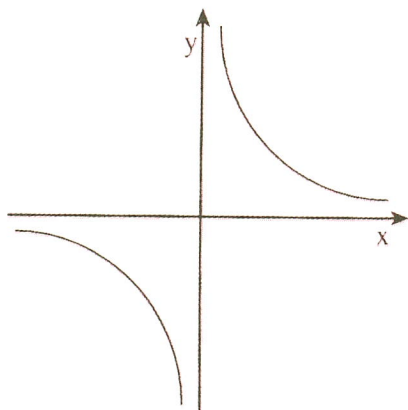


אחרי מיקום הנקודות במערכת הצירים, אנו יכולים לחבר ברצף - בקו ישר (הרצוף) או בקו עקום (המרוסק). אם נקח נקודות בצפיפות יותר גדולה, הן כולן תסתדרנה לאורך הקו הישר. בהמשך נראה, שהגרף של פונקציה זו, הוא אמנם קו ישר.

## דוגמה ב'

נתונה הפונקציה  $y = \frac{6}{x}$ . תחום ההגדרה שלה:  $x \neq 0$ .  
נרשום לוח ערכים (נהוג לקחת עבור  $x$  ערכים סימטריים ביחס ל-0):

x	-6	-3	-2	-1
y	-1	-2	-3	-6



x	0	1	2	3	6
y	-	6	3	2	1

גם לפונקציה זו נחזור בהמשך.

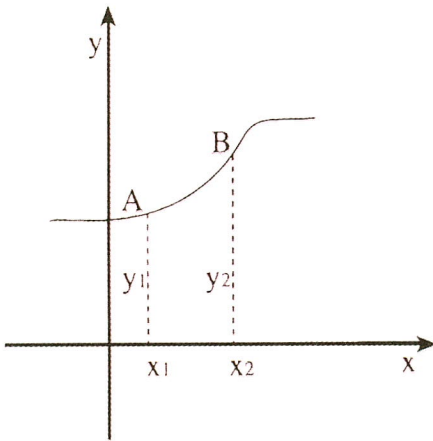
בין הנושאים שבהם אנו עוסקים במסגרת תיאור גרפי של פונקציה, אלה נקודות החיתוך שלה עם הצירים, והתחומים בהם היא עולה או יורדת.

## 2.4 נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים

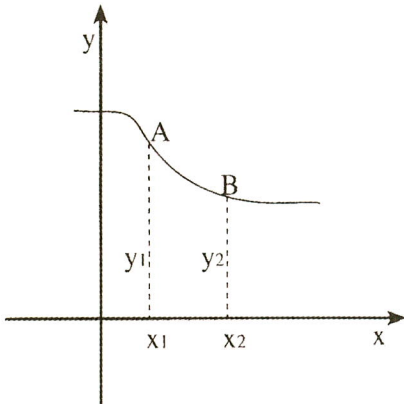
כאמור, לנקודה הנמצאת על ציר ה- $x$  (ה- $y$ ), שעור ה- $y$  (ה- $x$ ) שלה הוא - 0. ולהיפך, אם שעור ה- $y$  (ה- $x$ ) שלה הוא - 0, אז היא נמצאת על ציר ה- $x$  (ה- $y$ ). לכן, אם רוצים לחשב את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ , מציבים בנוסחה שלה:  $x=0$  (בתנאי שזה בתחום ההגדרה שלה), ומחשבים את ערך ה- $y$ .

לפי הגדרת הפונקציה, ברור שיש רק ערך אחד ל- $y$  (נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- $y$ ). לעומת זאת, יכולות להיות מספר נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ , וזאת בהתאם למעלת הפונקציה.

## 3. עליה וירידה של פונקציה.



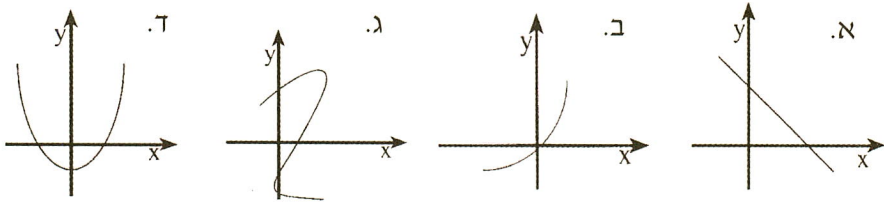
כאמור, פונקציה נקראת עולה בתחום מסוים, אם גידול בערך המשתנה החופשי המ'ל, גורר גידול בערך הפונקציה. כלומר אם בפונקציה  $y=f(x)$  מתקיים:  
 $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$  או  $f(x_2) > f(x_1)$   
 אז הפונקציה עולה בתחום זה.



פונקציה נקראת יורדת בתחום מסויים, אם גידול בערך המשתנה החופשי המ'ל, גורר הקטנה בערך הפונקציה. כלומר:  
 $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$  או  $f(x_2) < f(x_1)$

באופן ציורי אפשר לקבוע תחום, שבו הפונקציה עולה או יורדת ע"י כך שנבדוק לעצמנו, שאנו הולכים על מסלול המתואר ע"י הפונקציה משמאל לימין (כיוון הגידול של  $x$ ). בשרטוט הראשון, כדי להגיע מ- $A$  ל- $B$ , צריכים "לעלות" ואמנם הפונקציה עולה. בשרטוט השני, כדי להגיע מ- $A$  ל- $B$ , צריך לרדת, ואמנם זו פונקציה יורדת.

נעזר בדברים שלמדנו בסעיפים אלה, כדי "לקרוא שרטוטים". לפנינו 4 שרטוטים:



איזו טענה מתאימה לכל שרטוט:

1. הפונקציה עולה בכל התחום.
2. הפונקציה יורדת בחלק מהתחום, ובחלק הבא היא עולה.
3. השרטוט אינו מתאר פונקציה.
4. הפונקציה יורדת בכל התחום.

ההתאמות הן:

- 1 ל- ב', כי השרטוט מראה פונקציה שעולה בכל התחום.
- 2 ל- ד', כי אמנם הפונקציה יורדת תחילה (משמאל לימין) ואח"כ עולה.
- טענה 3 מתאימה לשרטוט ג', כי הקו שבשרטוט זה חותך את ציר ה- y בשלוש נקודות (יותר מאחת) וזו לא פונקציה.
- טענה 4 מתאימה לשרטוט א' - פונקציה יורדת.

## 4. פונקציה ממעלה ראשונה - פונקציה קווית

### 4.1 צורות הפונקציה

כאמור, מעלה של פונקציה נקבעת ע"י מעלת הביטוי האלגברי המתאר אותה. אם ביטוי זה הוא ממעלה ראשונה, אז הפונקציה היא ממעלה ראשונה.

כל פונקציה יכולה להופיע באחת משתי הצורות:

1. הצורה המפורשת (y מבודד)
2. הצורה הסתומה (y לא מבודד)

במקרה של פונקציה ממעלה ראשונה, הצורה המפורשת היא  $y=mx+n$  והצורה הסתומה -  $Ax+By+C=0$ .  
נתייחס לצורה הראשונה. האותיות m ו-n הן פרמטרים. כאשר אומרים "נתונה פונקציה", פירושו שהפרמטרים m ו-n ידועים (הם מספרים).  
למשל בפונקציה:  $y=2x+5$ ,  $m=2$ ,  $n=5$

ובפונקציה:  $y=4-3x$ ,  $m=-3$ ,  $n=4$

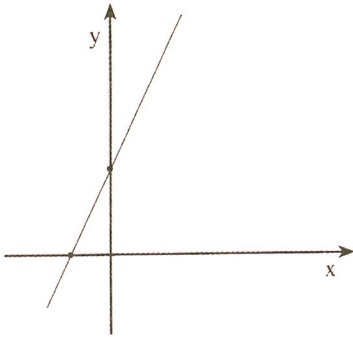
ובפונקציה:  $x+y=7$ ,  $m=-1$ ,  $n=7$ , כי יש להביאה תחילה לצורה המפורשת:  $y=-x+7$ .

**התאור הגרפי של פונקציה ממעלה ראשונה הוא קו ישר**, ולכן היא נקראת גם פונקציה קווית או **לינארית** (מהמילה הלטינית - linia).

## 4.2 שרטוט גרף הפונקציה

לשרטוט גרף של פונקציה קווית **מספיק** לקחת בטבלת הערכים שני ערכים (שכן דרך שתי נקודות עובר קו ישר אחד). **נוח** לקחת את הערכים של נקודות החיתוך עם הצירים, ו**נדאי** לקחת נקודה שלישית לביקורת.

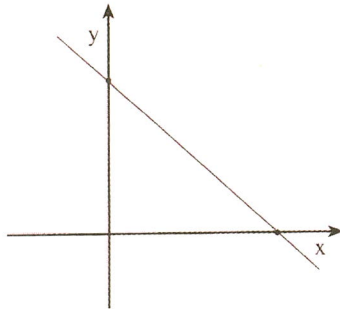
### דוגמאות



א. נשרטט את גרף הפונקציה  $y=2x+2$   
נרכיב את טבלת הערכים:

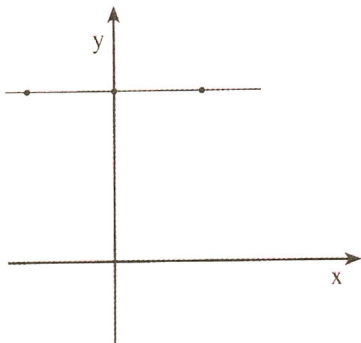
x	-1	0	1
y	0	2	4

נסמן את הנקודות במערכת הצירים  
נניח סרגל על הנקודות ונשרטט את הישר, מעבר לנקודות.



ב. נשרטט את גרף הפונקציה  $x+y=5$   
פונקציה זו מופיעה בצורה שתומה.  
אין הכרח להעבירה לצורה המפורשת.  
נרכיב את טבלת הערכים:

x	-1	0	5
y	6	5	0



ג. שרטט ישר שמתאים לטבלת הערכים הבא.  
מהי משוואת הישר?

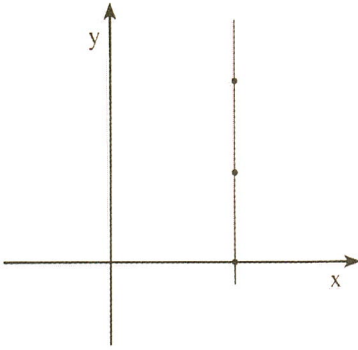
x	-3	0	2
y	4	4	4

לכל הנקודות אותו ערך של  $y$ ,  
כלומר ערכי  $x$  שונים לא ישפיעו על ערך ה- $y$ .  
זוהי משוואה:  $y=4$ , והיא מתארת ישר מקביל לציר ה- $x$ ,

כלומר ישר שערך ה-  $y$  קבוע.

בצורה כללית:

$y=k$  הוא ישר מקביל לציר ה-  $x$ , כאשר  $k>0$  הוא נמצא מעל ציר ה-  $x$ , וכאשר  $k<0$  הוא נמצא מתחת לציר ה-  $x$ .



ד. שרטט ישר המתאים ללוח הערכים הבא. מה משוואת הישר?

x	2	2	2
y	0	1	3

במקרה זה, ה-  $x$  קבוע ואינו מושפע משינוי ערכי  $y$ . זוהי המשוואה  $x=2$ , של ישר המקביל לציר ה-  $y$ .

בצורה כללית:

$x=k$  הוא ישר מקביל לציר ה-  $y$ , כאשר  $k>0$  הוא נמצא מימין לציר ה-  $y$ , וכאשר  $k<0$  הוא נמצא משמאל לציר ה-  $y$ .

גם לצירי השעורים משוואות מתאימות:

משוואת ציר ה-  $x$  היא  $y=0$  (תכונה משותפת לכל נקודות ישר זה)

משוואת ציר ה-  $y$  היא  $x=0$  (תכונה משותפת לכל נקודות ישר זה)

### 4.3 משמעות הפרמטרים של הפונקציה $y=mx+n$

#### הפרמטר $n$

ראינו שלישר המתאר פונקציה קווית יש שתי נקודות חיתוך עם צירים.

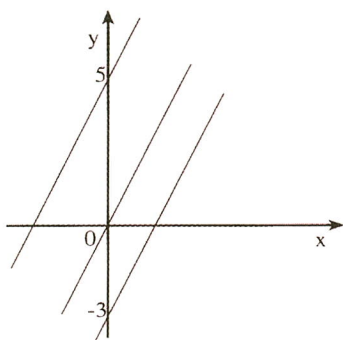
אחת עם ציר ה-  $x$ , ואחת עם ציר ה-  $y$ .

לנקודת החיתוך עם ציר ה-  $y$  חשיבות מיוחדת, כי ערך ה-  $y$  שלה מבטא את הפרמטר  $n$  בפונקציה בצורתה המפורשת:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = m \cdot 0 + n = n \Rightarrow (0, n)$$

#### מסקנה

הפרמטר  $n$  מבטא את שעור ה-  $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-  $y$ .



למשל, הפונקציה  $y=3x+5$ , חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0,5)$ . הפונקציה  $y=2x-3$ , חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0,-3)$ . הפונקציה  $y=2x$ , חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0,0)$  - הגרף עובר דרך ראשית הצירים

תמיד, כאשר  $n=0$ , הישר עובר דרך ראשית הצירים, כלומר שתי נקודות החיתוך עם הצירים מתלכדות. מתקבל:

**משוואת ישר העובר דרך ראשית הצירים היא  $y=mx$**

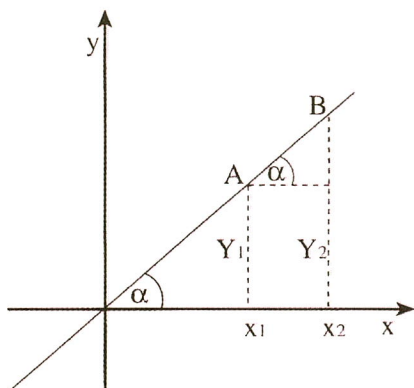
ישרים בעלי משוואה קבועה חותכים רק אחד מהצירים, שהרי הם מקבילים לציר השני.

### הפרמטר $m$

הפרמטר  $m$  נקרא **שיפוע הפונקציה**  $y=mx+n$ . אפשר

### טענה

**השיפוע  $m$  מלמד על הזווית  $\alpha$  שיוצר הישר עם הקרן החיובית של ציר ה- $x$ .**



כדי להבין את משמעות הטענה, נבטא את  $m$  באמצעות שעורי שתי נקודות שדרךן עובר הישר:  $B(x_2, y_2)$ ,  $A(x_1, y_1)$

בשרטוט לקחנו ישר, שעובר דרך ראשית הצירים, רק לצורך פשטות המראה, ואין הדבר משפיע על הפעולות האלגבריות שנעשה.

אם הנקודות נמצאות על הישר, שעוריהן מקיימים את משוואת הישר כלומר:  $y=mx+n$

$$y_1 = mx_1 + n, \quad y_2 = mx_2 + n$$

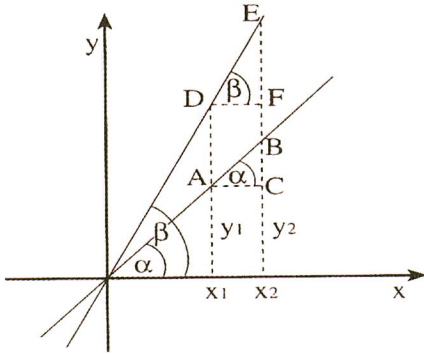
$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

נחסיר את השוויון הראשון מהשני ונקבל:  
או

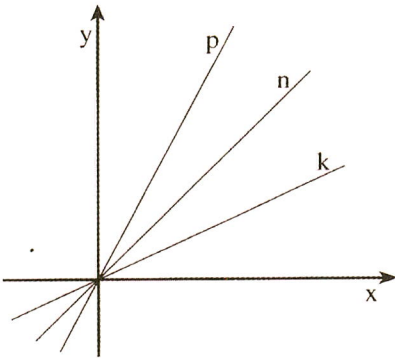
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

או



נשרטט קטע AC, המקביל לציר ה-x. הזוויות BAC ו- $\alpha$  שוות (מתאימות בין מקבילים), והמשולש המתקבל ABC הוא ישר זווית ב-C. במשולש זה:  
 $BC = y_2 - y_1$ ,  $AC = x_2 - x_1$   
כלומר,  $m$  מבטא את היחס בין הניצב שמו  $\alpha$  לבין הניצב שלידה.

אם לישר אחר יש שיפוע  $\beta$ , שגדול מ- $\alpha$ , גם הפרמטר  $m$  שלו יגדל, כי בנוסחה שקיבלנו, לאותו מכנה  
 $x_2 - x_1 = AC = DF$   
יש עתה מונה יותר גדול:  $EF > BC$ .



### דוגמה

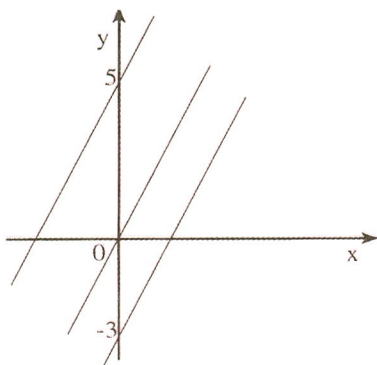
משוואת הישר k:  $y = \frac{1}{2}x$   
משוואת הישר n:  $y = x$   
משוואת הישר p:  $y = 3x$

השיפועים גדלים:  $3 > 1 > \frac{1}{2}$

→ וכך גם הזוויות שהם יוצרים עם x.

### מסקנה

שני ישרים בעלי אותו שיפוע  $m$  הם מקבילים.



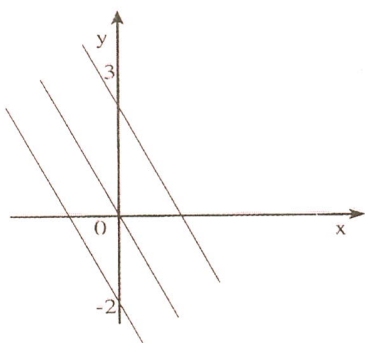
למשל, לישרים שבשרטוט:

$$y=2x, y=2x+5, y=2x-3$$

יש אותו שיפוע  $m=2$ , והם

יוצרים אותה זווית עם הקרן

החיובית של ציר ה- $x$ .



לישרים:  $y=-x, y=-x-2, y=-x+3$

אותו שיפוע  $m=-1$ , והם

יוצרים אותה זווית (הפעם קהה)

עם הקרן החיובית של ציר ה- $x$ .

#### 4.4 עליה וירידה של פונקציה קווית

כיצד אפשר לדעת, אם הישר יוצר זווית חדה או קהה עם הקרן החיובית של ציר

ה- $x$ , כלומר באיזה מקרה הפונקציה עולה ובאיזה - היא יורדת?

נראה זאת בטענה הבאה.

#### טענה

**אם היא פונקציה עולה, הפרמטר  $m$  חיובי (ולהפך),  
ואם היא פונקציה יורדת,  $m$  שלילי (ולהפך).**

הסבר:

זכור, פונקציה עולה, אם גידול ב- $x$  גורם לגידול ב- $y$ . כלומר, אם  $x_2 > x_1$  אז

$$y_2 > y_1 \quad \text{בצורה אחרת, אם } x_2 - x_1 > 0 \text{ אז } y_2 - y_1 > 0.$$

בנוסחה של  $m$ :  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  יהיו גם המונה וגם המכנה חיוביים ולכן המנה

חיובית, כלומר  $m$  חיובי.

כאשר הפונקציה יורדת, גידול ב- $x$  ( $x_2 > x_1$ ) גורר הקטנה ב- $y$  ( $y_2 < y_1$ )

כלומר המכנה נשאר חיובי, אך המונה שלילי. לכן  $m$  שלילי.

1. הפונקציה  $y=3x+5$  עולה, כי  $m=3>0$ .
2. הפונקציה  $y=-4x+1$  יורדת, כי  $m=-4<0$ .
3. את הפונקציה  $3x+y=2$  צריך להעביר תחילה לצורה המפורשת:  $y=-3x+2$ , ואז  $m=-3<0$  לכן היא פונקציה יורדת.

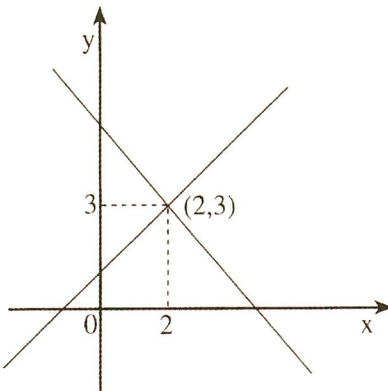
 הערות

בפונקציה  $y=mx$ , כאשר  $m=1$  מתקבלת המשוואה  $y=x$  (חוצה הזווית של הרביע הראשון והשלישי). כאשר  $m=-1$  מתקבלת המשוואה  $y=-x$  (חוצה הזווית של הרביע השני והרביעי).

## 5. פתרון מערכת משוואות בשני נעלמים בדרך גרפית

נתייחס למערכת משוואות ממעלה ראשונה:

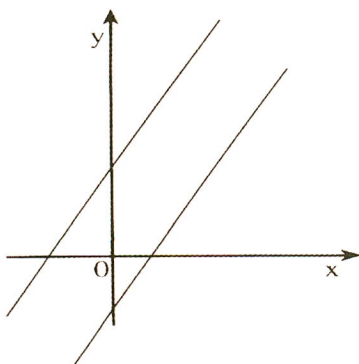
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y + x = 5 \end{cases}$$



כזכור, פתרון מערכת משוואות בדרך אלגברית היה זוג מספרים, שמאמת את שני השוויונים.

נתייחס לכל אחת מהמשוואות הנ"ל כפונקציה של ישר, ולכל זוג ערכים שמתאים לה, כנקודה על הישר.

**פתרון המערכת הוא הנקודה שנמצאת על שני הישרים - נקודת החיתוך שלהם (2,3).**



**אם למערכת המשוואות אין פתרון, זה יתבטא בצורה גרפית בשני ישרים מקבילים. למשל, הישרים שבמערכת:**

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

הם מקבילים כי  $a=2$  בשניהם. ולמערכת זו אמנם אין פתרון, כי חיסור המשוואות נותן סתירה:  $0=4$ . גם הטענה ההפוכה נכונה:

**אם שני הישרים מקבילים, למערכת המשוואות - הפונקציות שלהם - אין פתרון.**

כאשר הפונקציה נתונה בצורה סתומה  $Ax+By+C=0$ , שיפוע הפונקציה

$$m = -\frac{A}{B}$$

נבטא בצורה כללית את הקשר בין הפתרון הגרפי והאלגברי שלמערכת משוואות. נתונה מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים:

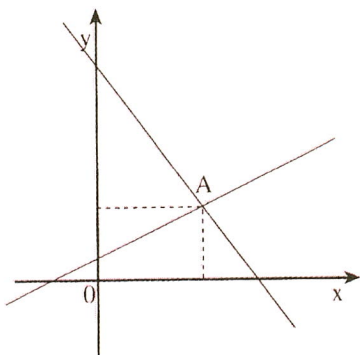
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \text{למערכת פתרון יחיד - הישרים נחתכים}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \text{אין פתרון - הישרים מקבילים}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \text{אינסוף פתרונות - הישרים מתלכדים}$$

### דוגמאות



א. למערכת המשוואות

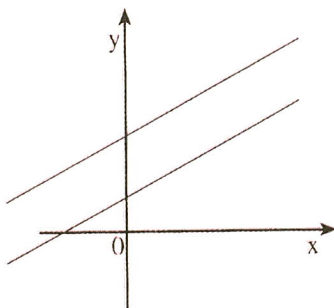
$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

פתרון יחיד, כי המקדמים

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3} \text{ : מקיימים}$$

והתאור הגרפי שלהם הוא שני

ישרים, שנחתכים בנקודה A (4,3)



ב. למערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 4x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

אין פתרון, כי המקדמים

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{2} \text{ : מקיימים}$$

והתאור הגרפי שלהם הוא שני

ישרים, מקבילים.

ג. למערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

אינסוף פתרונות, כי המקדמים מקיימים:  $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , והתאור הגרפי שלהם הוא שני ישרים מתלכדים.

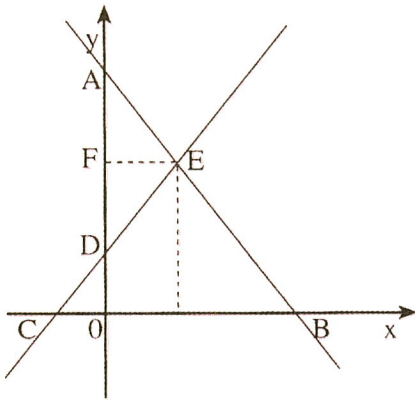
הבעיה הבאה, מדגימה שימוש בדברים שלמדנו עד כה.

### דוגמה

לפניך שרטוט של שתי פונקציות:

1.  $y = 2x + 1$

2.  $y = -x + 7$



א. איזה ישר בשרטוט הוא גרף של הפונקציה (1)?

ב. מצא את שעורי הנקודות A, B, C, D, E.

ג. מצא את אורכי הקטעים AD, BC.

ד. חשב את שטח המשולש ADE ואת שטח המרובע ODEB.

א. הישר CE הוא גרף של (1), כי הוא פונקציה עולה (יוצר זווית חדה עם הקרן החיובית של ציר ה-x) והפרמטר m בפונקציה (1) הוא חיובי. באותו אופן AB הוא גרף של (2) - פונקציה יורדת.

ב. הנקודות A, D הן נקודות החיתוך עם ציר ה-y, כלומר זהו ערך הפרמטר b בכל פונקציה: D(0,1) כי n=1; ו-A(0,7) כי n=7; ו-B ו-C הן נקודות החיתוך עם ציר ה-x, כלומר y=0. מהמשוואה (1) מתקבל: C(-0.5,0) וממשוואה (2): B(7,0).

E זו נקודת החיתוך של הישרים. שעוריה: (2,5) אישור לכך מתקבל מפתרון המערכת בדרך אלגברית:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = -x + 7 \Rightarrow x = 2, y = 5 \Rightarrow E(2,5)$$

$$BC = 7 - (-0.5) = 7 + 0.5 = 7.5$$

$$AD = 7 - 1 = 6$$

ג.

ד. בסיס המשולש ADE הוא הקטע AD. הגובה לקטע זה הוא  $EF = x_E = 2$ .

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{1}{2} 7 \cdot 7 = 24.5 \quad \text{לכן שטחו:}$$

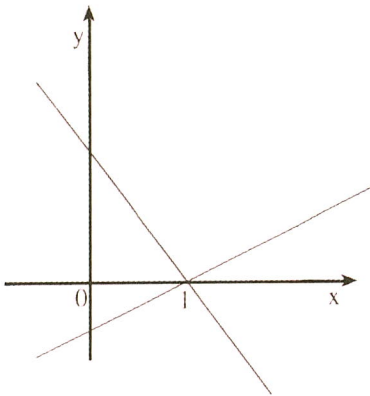
$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot EF = \frac{1}{2} 6 \cdot 2 = 6$$

$$S = 24.5 - 6 = 18.5 \quad \text{ואז שטח המרובע:}$$

## 6. פתרון אי-שוויון ממעלה ראשונה

### 6.1 פונקציה חיובית, פונקציה שלילית.

נקודת החיתוך של ישר עם ציר ה- $x$  מפרידה את הישר לשני חלקים, שבאחד מהם הפונקציה שלו שלילית ובאחר - חיובית.



למשל, גרף הפונקציה  $y = x - 1$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .

הערך  $x = 1$  מפריד בין שני תחומים:

$$y > 0 \text{ כאשר } x > 1$$

$$y < 0 \text{ כאשר } x < 1$$

ואילו בגרף הפונקציה  $y = 1 - x$  קורה מצב הפוך:

$$y > 0 \text{ כאשר } x < 1$$

$$y < 0 \text{ כאשר } x > 1$$

דבר זה מתואם עם העליה / ירידה של פונקציה, כי כאשר ישר חותך את ציר

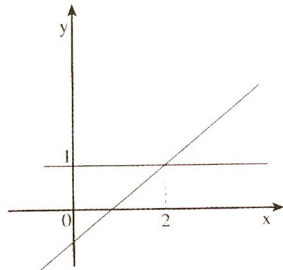
ה- $x$ , הוא עובר ממצב של "מתחת לציר

ה- $x$ " למצב של "מעל לציר ה- $x$ ", ואילו

כאשר הפונקציה יורדת, קורה מצב הפוך:

הפונקציה יורדת מעל ציר ה- $x$  לתחתיו.

### 6.2 פונקציה שערכיה גדולים או קטנים מערך קבוע



נתייחס שוב לגרף הפונקציה  $y = x - 1$

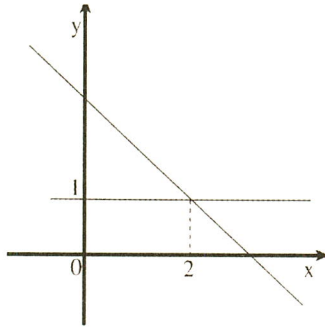
ולישר  $y = 1$ . נקודת החיתוך שלהם

הראשון, כך שבמקום לדון

בציר ה- $x$ , דנים בישר מקביל לו.

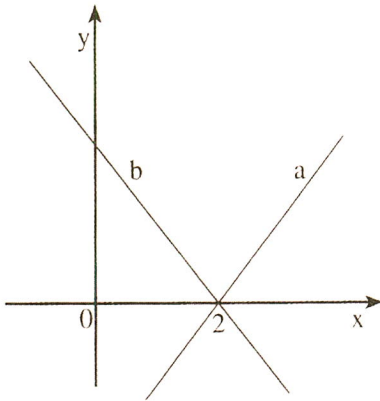
השיקול דומה:  $y > 1$  כאשר  $x > 2$

$y < 1$  כאשר  $x < 2$



ואילו במקרה של הישר  $y=3-x$ :  
 $y > 1$  כאשר  $x < 2$   
 $y < 1$  כאשר  $x > 2$

### 6.3 אי-שוויון בין פונקציות של שני ישרים כלשהם.



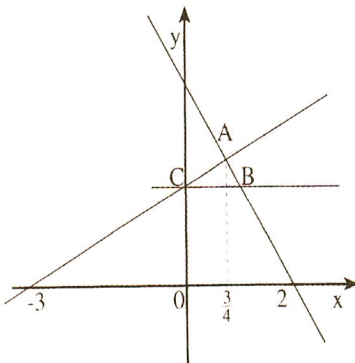
נתייחס לפונקציות:  $a: Y=x-2$ ,  $b: y=2-x$ .  
 הגרפים שלהן נחתכים בנקודה  $(2, 0)$ .  
 מקריאת הגרף רואים, שהערך  $x=2$   
 מפריד בין שני תחומים.  
 בתחום אשר מימין ל-2, הפונקציה  $Y$   
 נמצאת מעל לפונקציה  $y$ , כלומר שעורי  
 ה- $y$  שלה גדולים יותר, ואילו משמאל  
 ל-2, המצב הפוך. בסיכום:  
 $Y > y$  כאשר  $x > 2$   
 $Y < y$  כאשר  $x < 2$



דוגמה

נתונים הגרפים של הפונקציות:  $Y=x+3$ ,  $y=6-3x$ . נבדוק את שלושת המקרים, שראינו קודם.

1.  $Y=0$  כאשר  $x=-3$ , לכן:  $Y > 0$  כאשר  $x > -3$ ,  $Y < 0$  כאשר  $x < -3$ .  
 כמו כן,  $y=0$  כאשר  $x=2$ , ולכן:  $y > 0$  כאשר  $x < 2$ ,  $y < 0$  כאשר  $x > 2$ .



2. הישר  $BC: y=3$  מקביל לציר ה- $x$   
 חותך את הישר  $Y$  בנקודה  $(0, 3)$ .  
 לכן,  $Y > 3$  כאשר  $x > 0$ ,  $Y < 3$  כאשר  $x < 0$ .  
 הישר  $BC$  חותך את הישר  $y$  בנקודה  $x=1$ .  
 לכן,  $y > 3$  כאשר  $x < 1$ ,  $y < 3$  כאשר  $x > 1$ .
3. הישרים  $Y$  ו- $y$  נחתכים בנקודה שבה  $x = \frac{3}{4}$ .  
 לכן,  $Y > y$  כאשר  $x > \frac{3}{4}$ ,  $Y < y$  כאשר  $x < \frac{3}{4}$

## 7. צורות נוספות לפונקצית הישר

לעיתים לא ידועה לנו משוואת הישר. כלומר, לא ידועים הפרמטרים  $a$  ו- $b$ . לעומת זאת ידועות נקודות, שדרך עובר הישר.

למשל, הישר  $AB$  עובר דרך הנקודות  $A(1,3)$ ,  $B(2,1)$ .

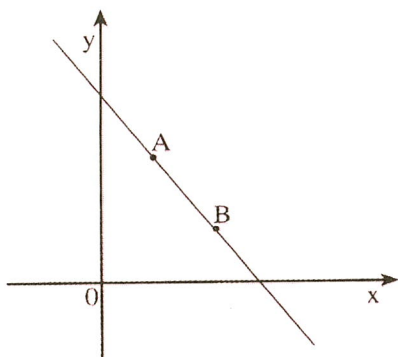
נמצא את המשוואה שלו, כלומר את  $a$  ו- $b$ .  
שעורי הנקודות הנייל צריכים לקיים

$$y = mx + n$$

כלומר:

$$\begin{cases} 3 = 1 \cdot m + n \\ 1 = 2m + n \end{cases} \Rightarrow m = -2, n = 5$$

ומשוואת הישר:  $y = -2x + 5$ .



נראה את הדברים הללו בצורה כללית בשני מקרים:

- כאשר ידוע רק הפרמטר  $a$  וידועה נקודה אחת שעל הישר
- כאשר לא ידועים שני הפרמטרים, וידועות שתי נקודות על הישר.

### 7.1 משוואת ישר העובר דרך נקודה נתונה $(x_1, y_1)$ ושיפועו $m$ :

הנקודה צריכה לקיים את משוואת

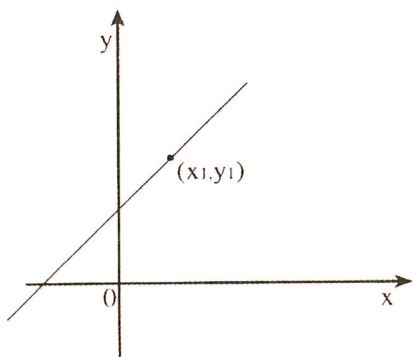
הישר  $y = mx + n$ , כלומר:  $y_1 = mx_1 + n$ .

נחסיר מהשוויון הראשון את השני,

$$\text{ונקבל: } y - y_1 = mx - mx_1$$

או:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



**דוגמה**

נמצא משוואת ישר העובר דרך הנקודה  $(3,1)$  ומקביל לישר שהפונקציה שלו היא

$$y = 2x - 3$$

הנקודה הנתונה, משמעותה:  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 1$

הישרים מקבילים, ולכן השיפועים שווים, כלומר:  $m = 2$

לכן משוואת הישר המבוקשת:  $y - 1 = 2(x - 3)$  או  $y = 2x - 5$

## 7.2 משוואת ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות

נניח שהנקודות שדרכן עובר הישר הן:  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$

אם הישר עובר דרך  $(x_1, y_1)$ , הרי שלפי מה שקבלנו קודם, הנקודה  $(x_2, y_2)$

מונחת על ישר זה. לכן:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m(x - x_1)}{m(x_2 - x_1)}$$

נחלק את השוויון הראשון בשני:

ואחרי צמצום ב-  $m$  נקבל:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ובצורה נוספת

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

כאשר השבר  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  מבטא את שיפוע הישר

נחזור לדוגמה שראינו בתחילת סעיף זה ונעזר הפעם בנוסחה שקיבלנו. מומלץ לרשום:  $(x_1, y_1) = A(1,3)$ ,  $(x_2, y_2) = B(2,1)$  כדי לא לבלבל בין שעורי שתי הנקודות.

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{2-1} \Rightarrow \frac{y-3}{-2} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 5$$

**חידה**

יוסי צופע את ביתו המכיל 8 חדרים בקצה של 4 חדרים ליוט. בנו  
מלכאק את הקירות בקצה של 2 חדרים ליוט. יוסי הספיק לצבוע 2  
חדרים לפני שבנו חזר מהטיול השנתי. תוק כמה ימים יהיה הבית  
צבוע?

תשובה: 3 ימים.

## 8. נושאים בגאומטריה אנליטית

### 8.1 ישרים מאונכים

נתונים שני ישרים, ששיפועיהם:  $m_1, m_2$ .  
נוכיח, שאם הישרים מאונכים, מתקיים הקשר:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

נתייחס תחילה לשני ישרים מאונכים  $AO, BO$ , שעוברים דרך הראשית. המשוואות שלהם:

$$AO: y = m_1 x, \quad BO: y = m_2 x$$

נסמן שתי נקודות על הישרים  $A$  ו- $B$

בעלות אותו  $x$ , נניח  $OC = x_A = x_B = k$ .

$k$  הוא בעצם אורך הקטע  $OC$ . לכן:

$$AC = y_A = m_1 k, \quad BC = -y_B = -m_2 k$$

לפי משפט בהנדסה:

"במשולש ישר זווית, הגובה ליתר הוא ממוצע הנדסי של הטלי הניצבים על היתר".

$$\text{מתקבל: } OC^2 = AC \cdot BC \quad \text{או}$$

$$k^2 = m_1 k \cdot (-m_2 k) \Rightarrow k^2 = -m_1 m_2 k^2$$

ואחרי צמצום ב-  $k^2$  מקבלים:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \text{או} \quad m_1 m_2 = -1$$

אם במקום ישרים אלה נקח ישרים מקבילים להם, אך אינם עוברים דרך הראשית, השיפועים של ישרים מקבילים שווים, ולכן התנאי הנ"ל ישמר.

### דוגמה

מצא משוואת ישר, העובר דרך הנקודה  $(3,4)$  ומאונך לישר שהמשוואה שלו היא  $2y+x=6$

המשוואה של הישר הנתון בצורה מפורשת היא:  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . ושיפועו:

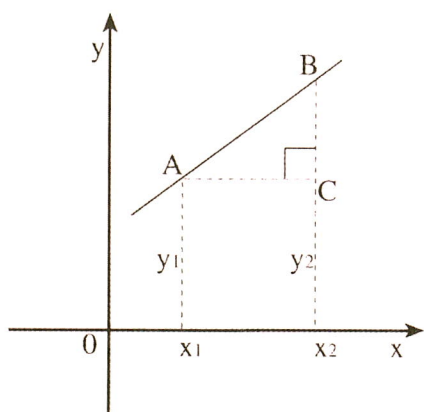
$$m = -\frac{1}{2}$$

השיפוע של הישר המאונך לו:  $-1 : (-\frac{1}{2}) = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ולפי הנוסחה:}$$

$$y - 4 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 2 \quad \text{מקבלים:}$$

## 8.2 רוחק בין שתי נקודות



נתונות שתי נקודות :

$B(x_2, y_2)$  ,  $A(x_1, y_1)$

נראה, שהרוחק ביניהן -  $d$   
נתון בנוסחה :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

נשרטט קטע AC שמקביל לציר ה- $x$ .  
לכן המשולש ABC ישר-זווית.  
היתר שלו  $AB=d$

הניצבים :  $AC = x_2 - x_1$

$$BC = y_2 - y_1$$

לפי משפט פיתגורס :  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

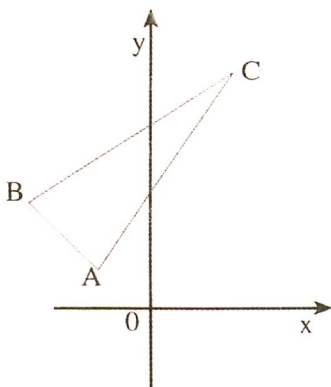
כלומר :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ואחרי הוצאת שורש :



נתון משולש ABC ששעורי קודקודיו הם :  $A(-1,1)$  ,  $B(-2,2)$  ,  $C(2,5)$   
נראה שמשולש זה הוא שווה שוקיים על ידי חישוב אורכי הצלעות :



$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} =$$

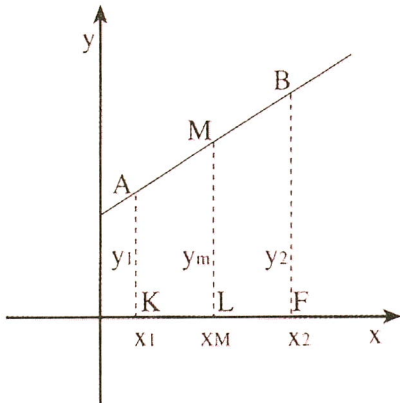
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-5)^2} =$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

לכן  $AC=BC$

### 8.3 שיעורי אמצע קטע



נתון קטע ששיעורי קצותיו הם :

$$B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$$

נראה ששיעורי אמצע הקטע M הם :

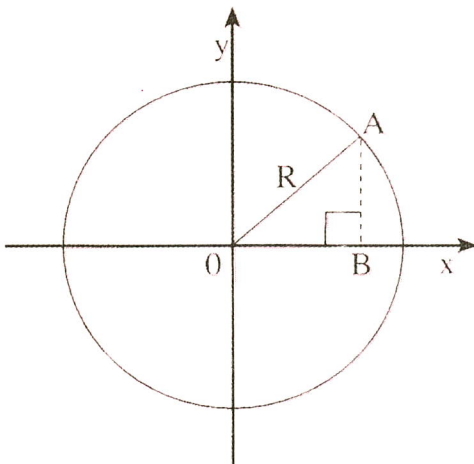
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

האנכים AK, BF, ו-ML לציר ה-x מקבילים, לכן: טרפז ABFK מאמצע השוק AB, ומקביל לבסיסים. לכן:

- 1)  $KL = LF \Rightarrow x_M - x_1 = x_2 - x_M \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2x_M = x_1 + x_2 \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$
- 2)  $ML = \frac{AK + BF}{2} \Rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

נוסחת הרוחק בין שתי נקודות מוצאת שימוש במציאת משוואת מעגל.

### 8.4 מעגל שמרכזו בראשית הצירים, והרדיוס שלו - R (המעגל הקנוני)



מהנדסת המישור יודעים, שרוחקן של כל נקודות המעגל ממרכזו שווה לרדיוס המעגל - R.

נקח את נקודה A(x,y) על המעגל.

$$x_A = OB, y_A = AB$$

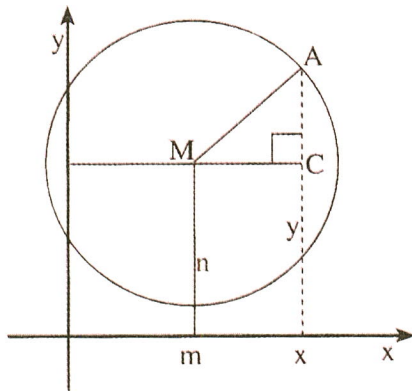
לפי משפט פיתגורס:

$$AO^2 = OB^2 + AB^2$$

ומכאן מתקבלת משוואת המעגל:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

## 8.5 מעגל שמרכזו בנקודה כלשהי $(m,n)$ והרדיוס שלו $R$



מרכז המעגל  $M(m,n)$ . נקח נקודה  $A(x,y)$   
ונעזר בנוסחת רווח בין שתי נקודות:

$$AM^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2$$

זוהי משוואת המעגל, שמרכזו בנקודה  $(m,n)$  והרדיוס  $R$ .

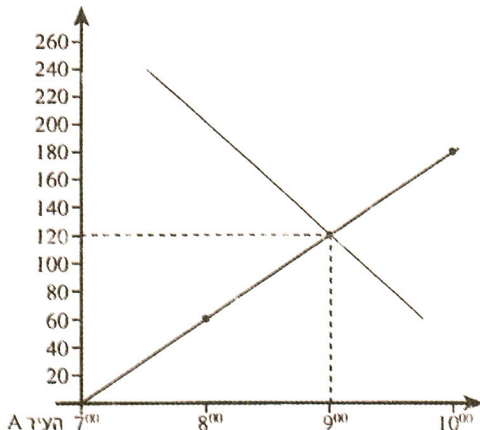
## 9. פתרון בעיות בדרך גרפית

אחד השימושים המעשיים של הפונקציה הוא בפתרון בעיות. במקרה זה, המשתנים  $x$  ו- $y$  מקבלים משמעות, כמו: דרך  $y$  כפונקציה של הזמן  $x$ , אורך של קפיץ כפונקציה של משקולת התלויה בקצהו, טמפרטורה כפונקציה של השעה ביממה, כו'. יעילות הפתרון הגרפי בולטת, כאשר הפונקציה היא ממעלה ראשונה. נציג את דרך הטיפול בבעיה כזו באמצעות הנתונים הבאים:

### דוגמה א'

אוטובוס יוצא בשעה 7:00 מנקודה A לכיוון נקודה B, המרוחקת 240 ק"מ מ-A, במהירות 60 קמ"ש. בשעה 7:30 יוצאת מכונית מ-B לכיוון A במהירות 80 קמ"ש.

מהנתונים עולה כי, נקודת ההתחלה של האוטובוס (240 ק"מ, 7:00) משמשת נקודה ראשונה במערכת צירים. נקודה נוספת היא (160 ק"מ, 8:30). משרטטים ישר.



### הגרף כתמונה של הבעיה.

במקרה של בעיה מעשית, משתמשים לרוב ברביע הראשון. אפשר לסמן על כל אחד מהצירים יחידות לפי קנה מידה אחר. ראשית הצירים אינה חייבת להיות  $(0,0)$  אלא מציגה את "ראשית ההתרחשות של הבעיה". במקרה זה, ציר הזמן מתחיל משעה 7:00 וציר הדרך מתחיל מהעיר A, והוא עולה לכיוון העיר B. כלומר, ציר זה מתאר את המרחק מעיר A.

המהירויות שלהם קבועות ולכן לשרטוט הישרים (הגרפים) שלהם נעזרים בשתי נקודות. למשל לגבי האוטובוס (0 ק"מ, 7:00), (70 ק"מ, 8:00) ומשרטטים את הישר.

השני מתחיל ב-B. נקודת המפגש בין שני הקווים מעידה על שעת הפגישה שלהם (9:00) ועל מרחק נקודת המפגש מהעיר A - 120 ק"מ.

### הפונקציות המעורבות בבעיה

האוטובוס התחיל לנוע בשעה 7:00 ולכן זמן הנסיעה שלו הוא הזמן שחלף מאז השעה 7:00 - x. נקודת ההתחלה שלו זו העיר A, ולכן הדרך שהוא עושה בזמן x מתארת את המרחק מהעיר A.

תבנית הפסוק המתארת את המרחק של האוטובוס מהעיר A כפונקציה של הזמן שחלף משעה 7:00 תהיה:  $y=60x$ .

לגבי המכונית, שיצאה חצי שעה יותר מאוחר, יהיה זמן הנסיעה שלה  $x-0.5$  (כאשר x זה הזמן שעבר מהשעה 7:00). המרחק ההתחלתי שלה מ-A הוא 240 ק"מ. לכן, מרחקה מ-B אחרי x שעות הוא  $80(x-0.5)$ . לפיכך, מרחקה מ-A, מבוטא באמצעות הפונקציה:  $y=240-80(x-0.5)$ .

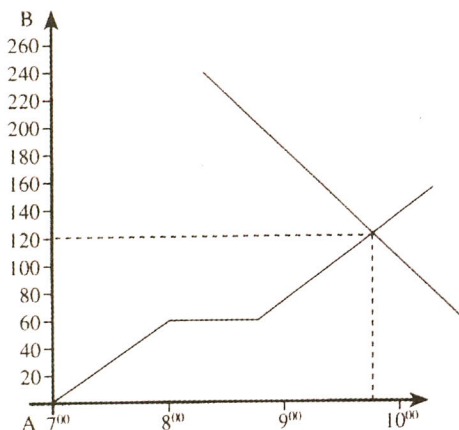
אילו פתרנו את הבעיה בדרך אלגברית, היינו מקבלים משוואה:

$$60x+80(x-0.5)=240$$

ברור שפתרון משוואה זו, זהה לפתרון שהתקבל בדרך גרפית. הפתרון  $x=2$  אומר: חלפו שעתיים מאז השעה 7:00, כלומר השעה 9:00, והמרחק מ-A:  $60 \cdot 2 = 120$ .



נניח שהאוטובוס שיצא מעיר A (בבעיה הקודמת) נוסע במשך שעה ואח"כ עוצר ל-45 דקות. הוא ממשיך בנסיעה באותה מהירות שלפני שעצר - 60 קמ"ש.



המכונית יוצאת מ-B בשעה 8:30 לכיוון A. נשרטט את הגרף המתאר את מרחקי שני כלי הרכב מ-A כפונקציה של הזמן שחלף משעה 7:00. האוטובוס מתחיל בשעה 7:00 ב-A. בשעה 8:00 כאשר הוא נמצא במרחק 60 ק"מ. מ-A, הוא עוצר למשך 45 דקות. חלק זה מתבטא בגרף בקטע מקביל לציר ה-x דרך  $y=60$ . בשעה 8:45 הוא ממשיך באותה מהירות. המכונית מתחילה בנקודה (8:30, 0) וכיון נקודת המפגש שלהם לפני הגרף: (9:45, 120).



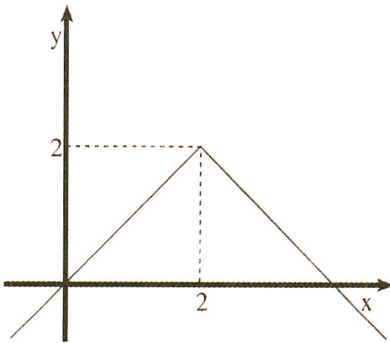
### הערה

מהדוגמאות הנ"ל אנו למדים "לקרוא" גרף של בעיה. למשל, הגרף של דוגמה א', ללא המידע הנתון בבעיה, מלמדנו על מהירותו של היוצא מ-A. ע"י בחינת שתי נקודות על הגרף, שהפרש ה-x שלהן הוא שעה אחת. אם הפרש ה-y המתאימים הוא 60 ק"מ, זה אומר שהמהירות היא 60 קמ"ש, וכו'.

## 10. פונקציות בעלות תחום מפוצל

### 10.1 אופן הגדרת הפונקציה בתחומים שונים של המשתנה.

#### דוגמה א'



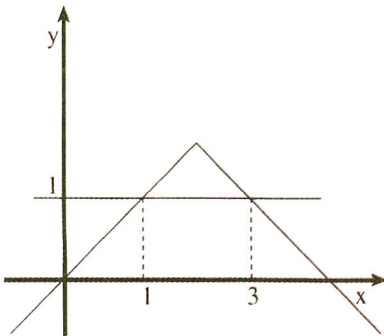
למשל הפונקציה  $F(x)$  שווה לתבנית המספר  $x$  כאשר  $x \leq 2$  ושווה לתבנית המספר  $4-x$  כאשר  $x \geq 2$ .

רושמים זאת כך:

$$F(x) = \begin{cases} x & x \leq 2 \\ 4-x & x \geq 2 \end{cases}$$

בנקודה שבה  $x=2$  מוגדרים שני חלקי הפונקציה, כלומר זו נקודה משותפת.

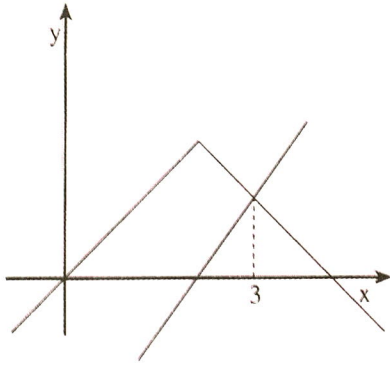
בהתאם להגדרה השונה בתחומים השונים יש לפונקציה אופי שונה: למשל, עולה כאשר  $x \leq 2$  ויורדת כאשר  $x \geq 2$ . כמו כן, למרות ששני החלקים ממעלה ראשונה, יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x:  $(0,0)$  בתחום הראשון, ו- $(4,0)$  בתחום השני.



באותו אופן, כדי למצוא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה הנ"ל עם הישר  $y=1$ , יש לפתור את המשוואה  $F(x)=y$ . למעשה, יש להשוות ל-1 כל אחד מהחלקים של הפונקציה.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (1,1)$$

$$\begin{cases} y = 4-x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (3,1)$$



כדי למצוא נקודות חיתוך של הפונקציה  
הנייל עם הישר  $y=2x-5$ , נפתור שוב  
שתי מערכות:

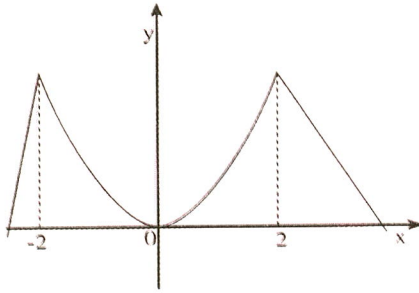
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow (5,5)$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow (3,1)$$

למעשה יש כאן פתרון יחיד  $(3,1)$ ,  
כי בנקודה  $(5,5)$  החלק הראשון  
של הפונקציה אינו מוגדר.

### דוגמה ב'

הפונקציה  $F(x)$  מוגדרת בצורה הבאה:



$$F(x) = \begin{cases} 2x + 8 & x \leq -2 \\ x^2 & -2 \leq x \leq 2 \\ 6 - x & x \geq 2 \end{cases}$$

מצא, לאלו ערכי  $x$ :

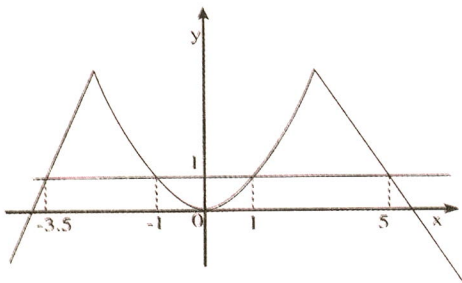
1.  $F(x)=1$

2.  $F(x)=-1$

3.  $F(x) = \frac{1}{5}(x+4)$

4\* לאלו ערכים הפונקציה עולה ולאלו ערכים היא יורדת?

פתרון:



1. פותרים שלוש מערכות שמהן

מתקבלות המשוואות:

$$2x + 8 = 1 \Rightarrow x = -3.5$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$6 - x = 1 \Rightarrow x = 5$$

הפתרון:

$(-3.5, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(5, 1)$

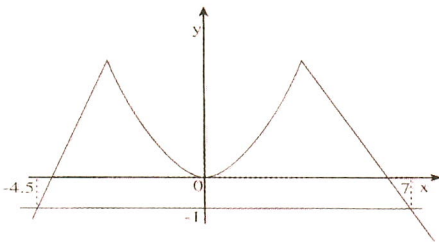
2. שוב פותרים שלוש מערכות, שמהן מתקבלות המשוואות:

$$2x + 8 = -1 \Rightarrow x = -4.5$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \phi$$

$$6 - x = -1 \Rightarrow x = 7$$

והפתרון:  $(-4.5, -1)$ ,  $(7, -1)$

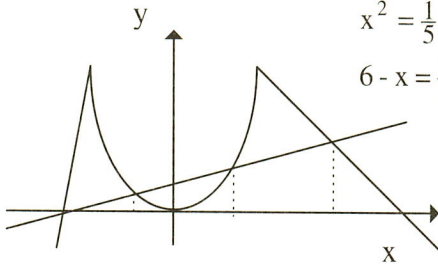


3. נפתור שוב שלוש מערכות:

$$2x + 8 = \frac{1}{5}(x + 4) \Rightarrow (-4, 0)$$

$$x^2 = \frac{1}{5}(x + 4) \Rightarrow (-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}), (1, 1)$$

$$6 - x = \frac{1}{5}(x + 4) \Rightarrow (4\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3})$$

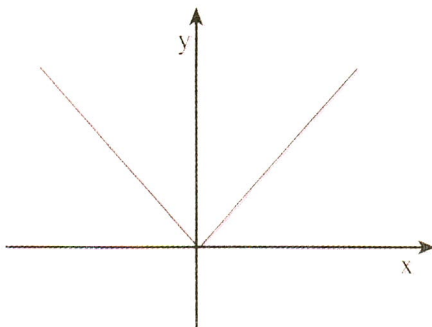


4. הפונקציה עולה לכל  $x < -2$  או  $0 < x < 2$   
 הפונקציה יורדת לכל  $-2 < x < 0$  או  $x > 2$ .

## 10.2 פונקציה עם ערך מוחלט

### דוגמה א'

נתונה הפונקציה  $F(x) = |x|$ . שרטט את הפונקציה וחשב את ערכי ה- $x$  המקיימים:



1.  $F(x) = 1$

2.  $F(x) < 1$

3.  $F(x) = 0.5x + 1$

4.  $|x| - 0.5x = 1$

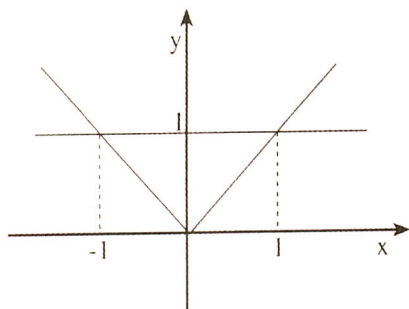
5.  $F(x) < 0.5x + 1$

ניתן לשרטט פונקציה זו ע"י טבלת ערכים רגילה, כשמקפידים על חישוב הערך המוחלט.

אפשר לעשות זאת גם בעזרת כתיבת הפונקציה מפורט:

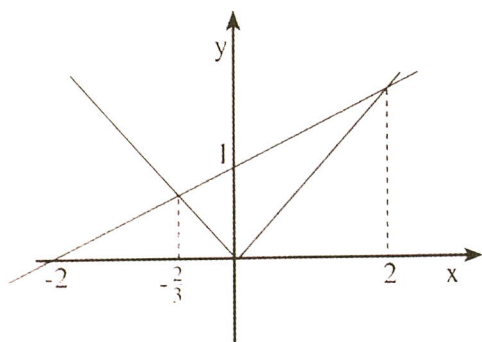
$$F(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

ובהתאם לזה גם השרטוט. כלומר, טבלת ערכים לשרטוט קו ישר, בתחום, שבו  $x > 0$ , וטבלת ערכים שניה בתחום שבו  $x < 0$ .



1. יש לפתור מערכת של שתי משוואות עם  $x=1$ , שפתרונה  $(1,1)$ ; ומערכת של שתי משוואות עם  $-x=1$ , שפתרונה  $(-1,1)$ .

2. קריאת גרף הפונקציה מלמדת, ש-  $F(x) < 1$  בתחום:  $-1 < x < 1$



3. יש לפתור מערכת של שתי משוואות עם  $x=0.5x+1$ , שפתרונה  $(2,2)$  ומערכת של שתי משוואות עם  $-x=0.5x+1$ , שפתרונה  $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

4. למעשה, המשוואה  $|x| - 0.5x = 1$  שקולה למשוואה  $|x| = 0.5x + 1$ , ולכן יש לה אותם פתרונות.

**בעקרון, כאשר יש לפתור משוואה, שמעורב בה ערך מוחלט, כדאי לבדוד את הערך המוחלט באגף אחד, ואת יתר האברים באגף השני. שרטוט הפונקציות המתקבלות נוח יותר ומאפשר התרה יעילה יותר.**

5. קריאת גרף הפונקציה מלמד, כי  $F(x) < 0.5x+1$  בתחום  $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$



**הערה**

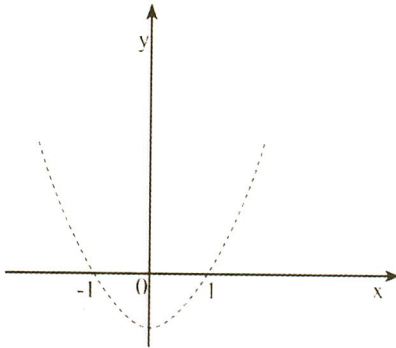
קטע הפונקציה  $F(x) = |x|$  המתייחס ל-  $x$  שלילי, הוא תמונת ראוי (סימטרי ביחס לציר ה-  $x$ ) של  $F(x) = x$

נשרטט את גרף הפונקציה

$$y = x^2 - 1$$

בעזרת לוח ערכים (הפרבולה - בסעיף 11).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	3	0	-1	0	3	8



ונקבל בעזרתו את גרף

$$F(x) = |x^2 - 1|$$

חלק הפרבולה הנמצא בתחום  $-1 < x < 1$  הוא שלילי.

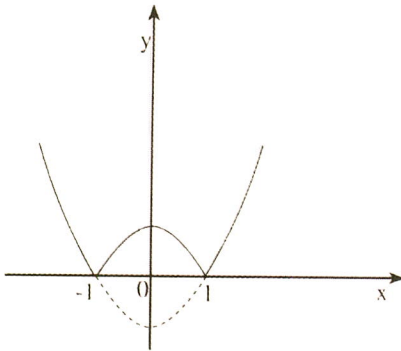
כאשר הוא מופיע בתוך ערך מוחלט, הוא הופך להיות חיובי.

מתקבלת תמונת ראי של חלק זה.

לכן, התאור הגרפי של

$$F(x) = |x^2 - 1|$$

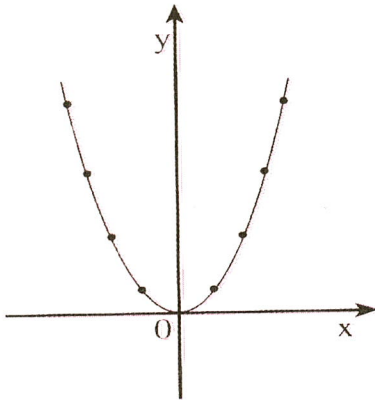
יראה כך.



## 11. הפרבולה - פונקציה ממעלה שניה

א. נתייחס לפונקציה ממעלה שניה:  $y = x^2$ . נרשום טבלת ערכים לפונקציה זו ונסמן את הנקודות במערכת צירים.

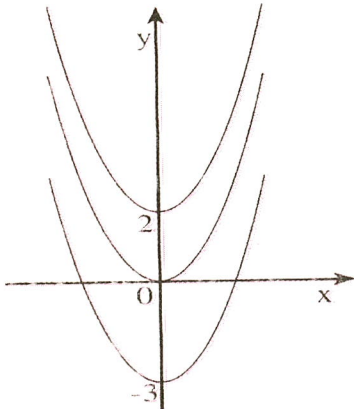
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16



כתוצאה מזה שמופיעה חזקה 2, מתקבל שלכל שני ערכים נגדיים של  $x$  יש אותו ערך של  $y$ . מבחינה גרפית זה מתבטא בנקודות סימטריות ביחס לציר ה- $y$ . ציר ה- $y$  הוא ציר הסימטריה של פרבולה זו.

הביטוי  $x^2$  הוא חיובי לכל ערך של  $x$  (פרט ל-0) ולכן הערך הנמוך ביותר, שיכול  $y$  לקבל הוא 0.

כלומר נקודה זו הנקראת קודקוד הפרבולה, היא הנקודה "הנמוכה" ביותר שלה, ונקראת נקודת המינימום. הפרבולה הזו נקראת פרבולה ישרה.



ב. אם נזיז פרבולה זו שתי יחידות כלפי מעלה "יעלו" כל שעורי ה- $y$  בשתי יחידות,

והמשוואה שלה תהיה  $y = x^2 + 2$ .

היות שהערך המינימלי של  $x^2$  הוא 0,

הרי הערך המינימלי של  $x^2 + 2$

הוא  $0+2=2$ . לכן קודקודה - (0,2).

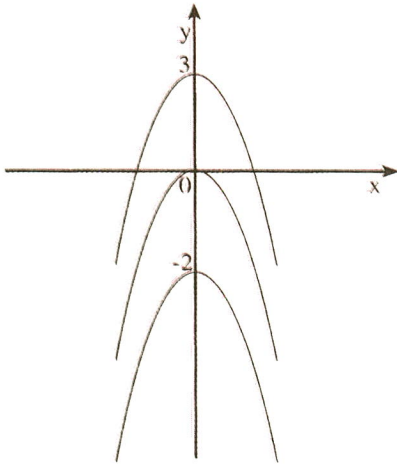
באותו אופן, אם נזיז את

הפרבולה  $y = x^2$  כלפי מטה

ב-3 יחידות, תהיה הפונקציה שלה:

$y = x^2 - 3$  וקודקודה - (0,-3).

ציר הסימטריה נשאר ציר ה- $y$ .



ג. מצב דומה לזה קורה לגבי הפרבולה

$y = -x^2$ , ששרטוטה הוא היפוך כלפי

מטה של הפרבולה הקודמת - **פרבולה הפוכה** והיא סימטרית לה ביחס לציר

ה- $x$ .

בפרבולה זו, הקודקוד הוא הנקודה

הגבוהה ביותר - **נקודת המקסימום**.

ציר ה- $y$  משמש גם לה ציר סימטריה, וגם במקרה זה העתקת הפרבולה כלפי

מעלה או מטה, משנה את שעור ה- $y$  של הקודקד, ומשאיר אותו ציר סימטריה.

קודקד הפרבולה  $y = -x^2$  הוא  $(0, 0)$

קודקד הפרבולה  $y = -x^2 + 3$  הוא  $(0, 3)$

קודקד הפרבולה  $y = -x^2 - 2$  הוא  $(0, -2)$

ד. אם המקדם של  $x^2$  שונה מ- $(-1)$  או מ- $1$ , משתנה רוחב הפרבולה. ככל

שהמקדם גדול יותר (בערכו המוחלט), תהיה הפרבולה צרה יותר. בשרטוט:

הפרבולות

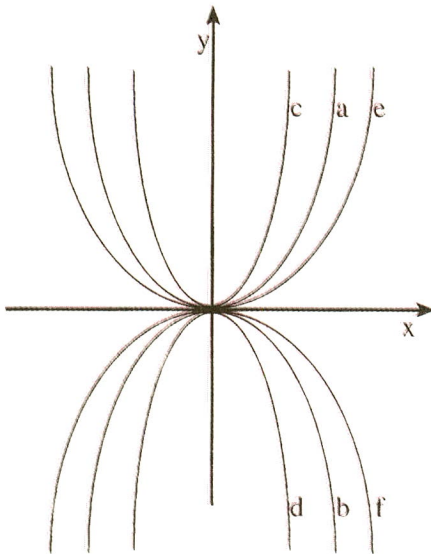
a:  $y = x^2$ , b:  $y = -x^2$

הפרבולות

c:  $y = 2x^2$ , d:  $y = -2x^2$

הפרבולות

e:  $y = 0.5x^2$ , f:  $y = -0.5x^2$



ציר הסימטריה של כולן הוא ציר ה- $y$ . הצורה הכללית של פרבולה כזאת:

$y = ax^2$

**כאשר  $a > 0$ , מתקבלות הפרבולות**

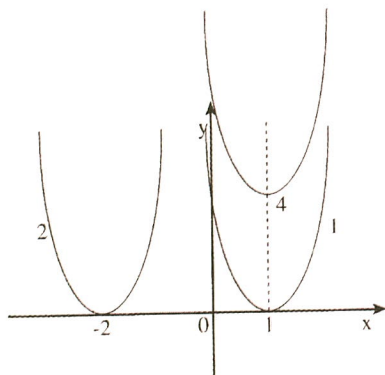
**הישרות** (הפתוחות כלפי מעלה).

**כאשר  $a < 0$ , מתקבלות הפרבולות**

**ההפוכות** (הפתוחות כלפי מטה).

ה. הפרבולה  $y = (x - 1)^2$  (1) המתקבלת בעזרת טבלת ערכים מתאימה, היא בעלת אותה צורה כמו  $y = x^2$ , אלא שציר הסימטריה שלה הוא הישר  $x=1$ , וקודקה  $(1,0)$ :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16



ואילו לפרבולה  $y = (x + 2)^2$  (2) ציר סימטריה  $x=-2$ , וקודקה  $(-2,0)$ .

אם נזיז את הפרבולה  $y = (x - 1)^2$  כלפי מעלה ב-4 יחידות, תהיה המשוואה שלה  $y = (x - 1)^2 + 4$ . ואם נוסף לזה נשנה את רוחב הפרבולה, יוכפלו הסוגריים בהתאם.

מצב זה דומה בפרבולה ההפוכה.

בסיכום, אם מזיזים את הפרבולה, כך שקודקה

יהיה במקום  $(x_m, y_m)$ , המשוואה שלה תהיה:  $y = a(x - x_m)^2 + y_m$ .

ואולם, הצורה שבה מופיעה משוואת הפרבולה היא לרוב:  $y = ax^2 + bx + c$ . אפשר להעביר צורה זו (בדרך דומה לזו שבה קיבלנו את נוסחת שורשי המשוואה

הריבועית - פרק ח') לצורה:  $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ .

לפי זה, יהיו שעורי הקודקד:

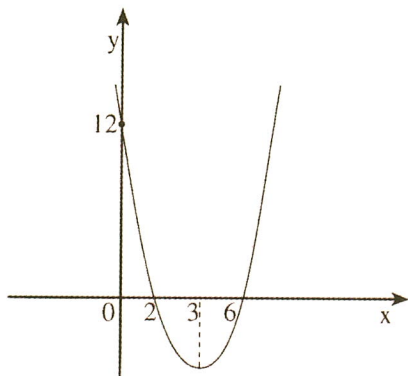
$$\left( x_m = -\frac{b}{2a}, y_m = \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

הקודקד מבטא נקודת מינימום כאשר  $a > 0$ , ונקודת מקסימום - כאשר  $a < 0$

(השווה עם הפונקציות  $y = x^2 - 1$  ו-  $y = -x^2$  בתחילת סעיף זה).

### צעדים מעשיים לשרטוט הפרבולה.

- א. קביעת סוג הקודקד (מינימום או מקסימום) לפי הסימן של  $a$ .
- ב. חישוב שעורי הקודקד  $x_m$  לפי הנוסחה, ו-  $y_m$  מחושב או לפי הנוסחה או ע"י הצבת  $x_m$  בתוך משוואת הפרבולה.
- ג. הרכבת טבלת ערכים ובה 6 ערכים נוספים של  $x$  (בסדר עולה), 3 מכל צד של  $x_m$ .
- ד. סימון הנקודות במערכת צירים וחיבורן תוך שמירה על צורה של פרבולה. יש להיזהר לא לחבר את הנקודות בקווים ישרים.



### דוגמה א'

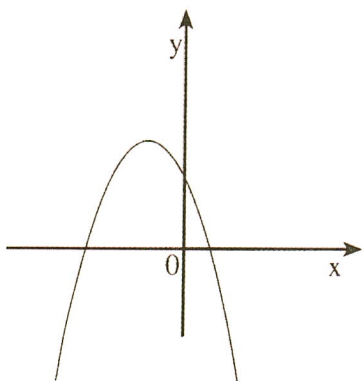
$$y = x^2 - 8x + 12$$

א. הפרבולה ישרה, כלומר יש לה נקודת מינימום, כי  $a=1 > 0$ .

ב.  $x_m = \frac{8}{2} = 4$  ,  $y_m = \frac{4 \cdot 12 - 8^2}{4} = -4$

ג.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	0	-3	-4	-3	12	5



### דוגמה ב'

$$y = -x^2 - x + 12$$

א. הפרבולה הפוכה, כלומר יש לה נקודת מקסימום, כי  $a=-1 > 0$ .

ב.  $x_m = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$  ,  $y_m = \frac{-4 \cdot 12 - 1^2}{-4} = 12 \frac{1}{4}$

ג.

x	-3	-2	-1	-0.5	0	1	2
y	6	10	12	12.25	12	10	6

## 12. פרבולה וישר - פתרון אי שוויונים

בסעיף זה נראה קשרים גרפיים ואלגבריים בין פרבולה וקו ישר בשלושה מקרים:

- \* הפרבולה והצירים x ו-y.
- \* הפרבולה וישר מקביל לציר ה-x.
- \* הפרבולה וישר כלשהו.

### 12.1 הפרבולה והצירים

לפרבולה נקודת חיתוך אחת אם ציר ה-y, ושעוריה (0,c).

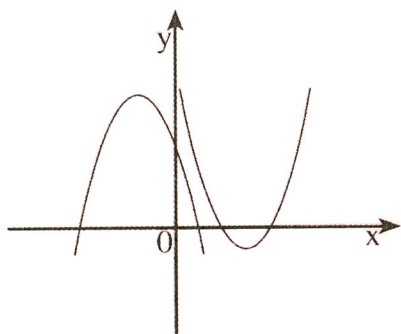
היא מתקבלת מפתרון המערכת:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$$

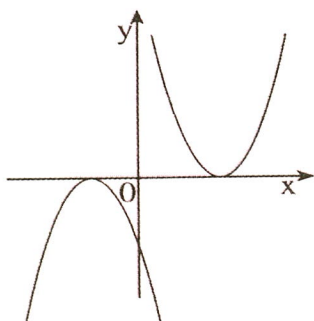
נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  מתקבלות מפתרון המערכת:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

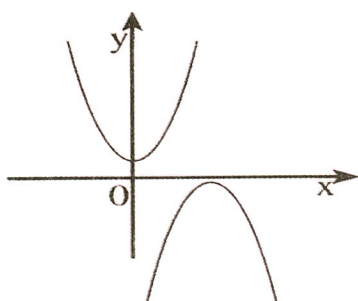
זה מוביל לפתרון המשוואה הריבועית:  $ax^2 + bx + c = 0$ .  
 ראינו שמספר הפתרונות של משוואה זו תלוי בגודל של  $\Delta$ .  
 נבדוק את 3 האפשרויות מהיבט הגרפי:



**א.  $\Delta > 0$**   
 למשוואה הריבועית שני שורשים ממשיים, שונים, ולכן לפרבולה יש **שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$**



**ב.  $\Delta = 0$**   
 למשוואה הריבועית שני שורשים שווים. במקרה זה **הפרבולה משיקה לציר ה- $x$** .



**ג.  $\Delta < 0$**   
 למשוואה הריבועית אין שורשים ממשיים - לפרבולה ולציר ה- $x$  אין נקודות משותפות. אנו אומרים **שהפרבולה "מרחפת" מעל או מתחת לציר ה- $x$** .

מן המיון הנ"ל אנו למדים לקרוא גרף של פרבולה: אם הפרבולה במצב שבשרטוט הראשון, נוכל לומר, שלמשוואה הריבועית  $ax^2 + bx + c = 0$  יש שני פתרונות ממשיים. אם היא כמו בשרטוט השני, נאמר שלמשוואה שני שורשים שווים, ואם היא כמו בשרטוט השלישי, נאמר - אין למשוואה שורשים ממשיים.

לקריאת גרף בעזרת המיון הני"ל, חשיבות רבה בפתרון של אי-שוויון ממעלה שניה. נראה זאת בשלושת המקרים הבאים:

א. כאשר הפרבולה חותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות, הרי ציר ה- $x$  מחלק את הפרבולה לשני חלקים: החלק המעוגל המכיל את הקודקד - שנקרא לו **"כיפת הפרבולה"**. זה החלק שבין נקודות החיתוך. והחלק השני, נקרא **"ענפים"**,

והם נמצאים מחוץ לנקודות החיתוך - משני הצדדים.

במקרה של הפרבולה הישרה, הכיפה

נמצאת מתחת לציר ה- $x$ , כלומר

בתחום השלילי של ציר ה- $y$ , והענפים

נמצאים בתחום החיובי של ציר ה- $y$ .

נניח שהפרבולה הישרה חותכת את

ציר ה- $x$  ב- $m, n$  וההפוכה ב- $k, t$ .

רושמים זאת כך:

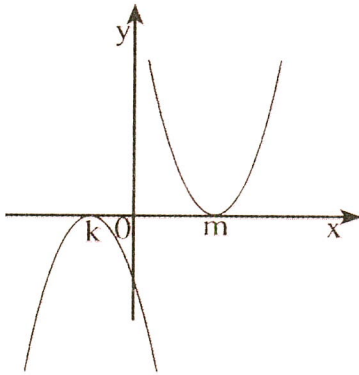
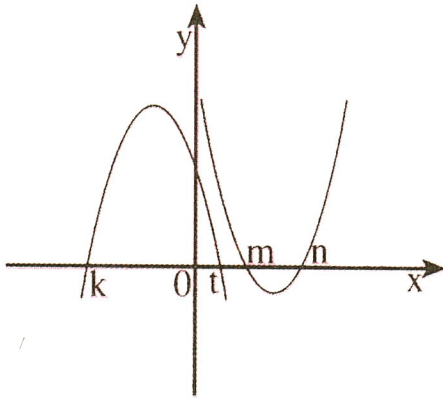
$y < 0$  כאשר  $m < x < n$

$y > 0$  כאשר  $x < m$  או  $x > n$

ובפרבולה הפוכה:

$y > 0$  כאשר  $k < x < t$

$y < 0$  כאשר  $x < k$  או  $x > t$



ב. כאשר הפרבולה משיקה לציר ה- $x$ ,

כל נקודותיה פרט לנקודת ההשקה

(שבה  $y=0$ ) נמצאות באותו חלק של

המישור:

\* חיובי, אם היא ישרה:

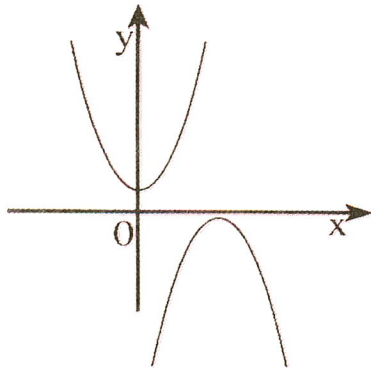
$y > 0$  כאשר  $x \neq m$

( $m$  נקודת ההשקה)

\* שלילי, אם היא הפוכה:

$y < 0$  כאשר  $x \neq k$

( $k$  נקודת ההשקה)



ג. כאשר הפרבולה מרחפת,

היא נמצאת כולה:

\* בחלק החיובי של  $y$ , אם

היא ישרה -

$y > 0$  לכל ערך של  $x$

\* בחלק השלילי של  $y$ , אם

היא הפוכה -

$y < 0$  לכל ערך של  $x$

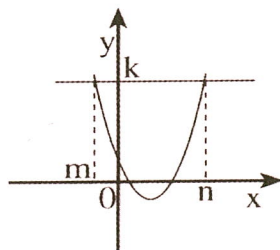
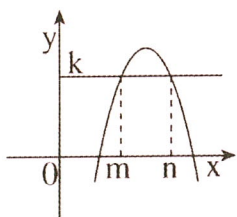
## 12.2 חיתוך פרבולה עם ישר מקביל לציר ה- $x$

נתון ישר  $y=k$  ופרבולה  $y = ax^2 + bx + c$ . יש למצוא נקודות חיתוך שלה, כלומר לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = k \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = k$$

מיון מספר פתרונות המשוואה המתקבלת:  $ax^2 + bx + c - k = 0$  דומה לזה שבסעיף הקודם. בעזרת פתרון המערכת הנייל (נניח הפתרונות  $(m, n)$ ) נוכל לפתור גם אי-שוויונים, כמו:

- א.** בפרבולה הישרה  $y < k$  כאשר  $m < x < n$  כאשר  $y > k$  כאשר  $x < m$  או  $x > n$ , כאשר  $y < k$  כאשר  $m < x < n$ , כאשר  $x < m$  או  $x > n$ .



- ב.** בשרטוט זה הפרבולה, משיקה לישר  $y=k$ , כלומר למערכת:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = k \end{cases}$$

יש פתרון אחד (שניים שווים), נניח  $m$ , ולכן:

בפרבולה 1 כאשר  $x=m$   $y=k$

כאשר  $x \neq m$   $y > k$

אין ערך של  $x$  שעבורו  $y < k$

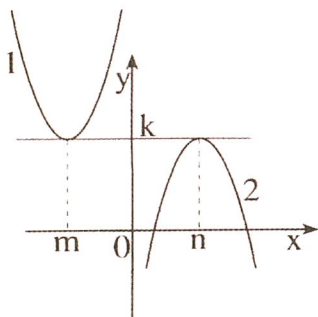
התשובה -  $x = \emptyset$

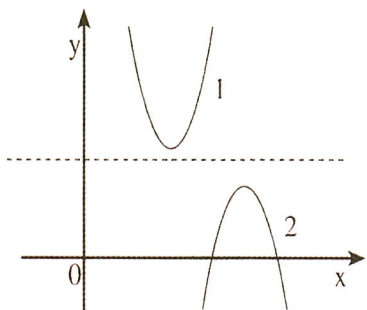
בפרבולה 2 כאשר  $x=n$   $y=k$

כאשר  $x \neq n$   $y < k$

אין ערך של  $x$  שעבורו  $y > k$

התשובה -  $x = \emptyset$





ג. בשרטוטים אלה הפרבולה "מרחפת" ביחס לישר  $y=k$ . למערכת המשוואות אין פתרון כלל.

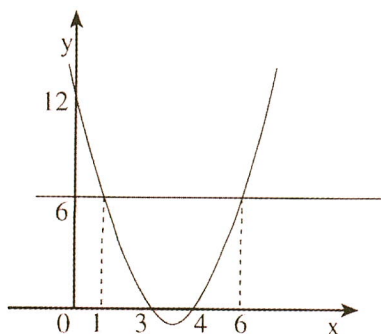
- בפרבולה 1  $y > k$  לכל ערך של  $x$ .  
 אין ערך של  $x$  שעבורו  $y < k$ .  
 התשובה -  $x = \emptyset$ .
- בפרבולה 2  $y < k$  לכל ערך של  $x$ .  
 אין ערך של  $x$  שעבורו  $y > k$ .  
 התשובה -  $x = \emptyset$ .

## דוגמה א'

נתון גרף הפונקציה  $y = x^2 - 7x + 12$  וישר  $y = 6$ .

מצא:

- א. לאילו ערכי  $x$ , הפונקציה חיובית ולאילו שלילית.  
 ב. לאילו ערכי  $x$  קטנים ערכי הפונקציה הריבועית מ-6, ולאילו ערכי  $x$ , גדולים מ-6.



א. נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $x$ :

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4$$

לכן,  $y < 0$  כאשר  $3 < x < 4$ ,

$y > 0$  כאשר  $x < 3$  או  $x > 4$

ב. נקודות החיתוך של הפרבולה והישר  $y = 6$ :

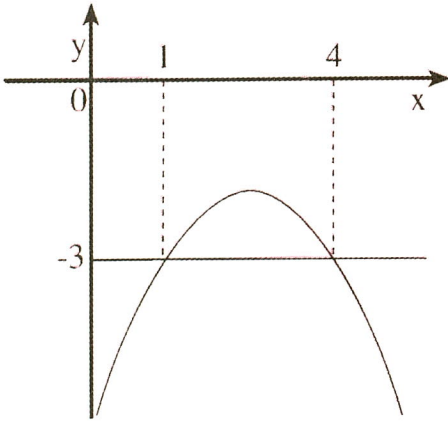
$$x^2 - 7x + 12 = 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 6$$

לכן,  $y < 6$  כאשר  $1 < x < 6$ ,

$y > 6$  כאשר  $x < 1$  או  $x > 6$

## דוגמה ב'



נתון גרף הפרבולה  $y = -x^2 + 5x - 7$   
וישר  $y = -3$ . מצא:

- לאילו ערכי  $x$  הפונקציה הריבועית חיובית?
- לאילו ערכי  $x$  יהיו ערכי הפרבולה קטנים מ-  $(-3)$ ?

א. למשוואה  $-x^2 + 5x - 7 = 0$   
אין פתרון ממשי. ואמנם הפרבולה אינה חותכת את ציר ה- $x$ .  
היות שהפרבולה הפוכה,  $y < 0$  לכל ערך של  $x$ .  
לכן, התחום שבו  $y > 0$  הוא:  $x = \phi$ .

ב. פתרון המערכת:

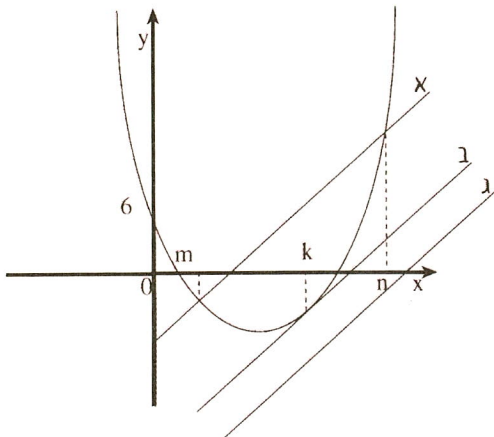
$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 7 \\ y = -3 \end{cases}$$

הוא:  $x = 1$  או  $x = 4$ . לכן, כאשר  $x > 4$  או  $x < 1$ .

## 12.3 פרבולה וישר כלשהו (שאינו מקביל לאף ציר)

נתונה פרבולה  $Y = ax^2 + bx + c$  וישר  $y = mx + n$  שאינו מקביל לאף אחד מהצירים. כדי למצוא נקודת משותפות לפרבולה ולישר, יש לפתור את המערכת:

$$\begin{cases} Y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$



קיימות 3 אפשרויות:

- \* **שני פתרונות ממשיים**, וזה מתאר את הישר במצב א'.
  - \* **פתרון אחד** - מצב ב', שבו הישר משיק לפרבולה.
  - \* **אין פתרון** - מצב ג'.
- גם כאן נוכל לפתור אי-שוויונים תוך כדי קריאת הגרף:  
אם במצב א', נקודות החיתוך הן בעלות ערכי  $x$ :  $m$  ו- $n$ , נוכל לומר, שבין נקודות אלה, ערכי הפונקציה הקווית גדולים מערכי הפונקציה הריבועית.  
מחוץ לתחום זה, ההפך:  $y > Y$

כאשר  $m < x < n$  או  $x < m$  או  $x > n$ , וכאשר  $y < Y$

במצב ב', אם הישר משיק לפרבולה, בנקודה שבה  $x=k$ , הרי  $y < Y$  כאשר  $x \neq k$ .

ובמצב ג',  $y < Y$  לכל  $x$ . הדברים אמורים לגבי פרבולה שיש לה נקודת מינימום. במקרה של פרבולה שיש לה נקודת מקסימום, החישוב בהתאם.

## דוגמה

נתונות הפונקציות:  $Y = -x^2 + 7x + 8$ ,  $y = x + 1$

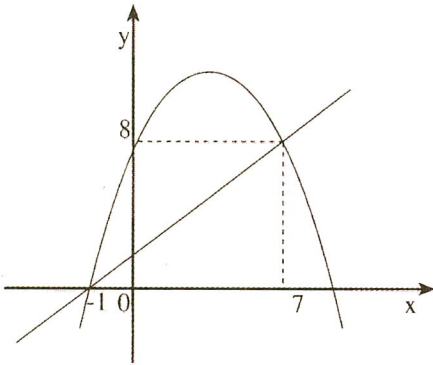
מצא באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה הריבועית גדולים מערכי הפונקציה ובאיזה תחום המצב הפוך. ראשית יש לפתור את המערכת:

$$\begin{cases} Y = -x^2 + 7x + 8 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow (-1, 0), (7, 8)$$

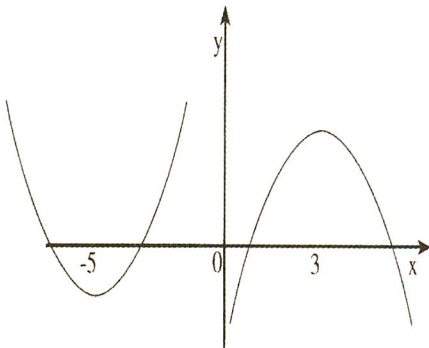
מקריאת הגרף מתקבל:

$Y > y$  כאשר  $-1 < x < 7$

$Y < y$  כאשר  $x < -1$  או  $x > 7$



## 13. עליה וירידה של פרבולה



להבדיל מהפונקציה הקווית, שעולה בכל התחום, או יורדת בכל התחום, הפונקציה הריבועית משנה כיוון - מעליה לירידה או מירידה לעילה.

**הנקודה המפרידה בין שני התחומים הללו, היא קודקד הפרבולה.**

בפרבולה הישרה שבשרטוט, שיעור ה-  $x$  של הקודקד הוא  $(-5)$ .

לכן, אפשר לכתוב שהפונקציה

יורדת (או  $y \downarrow$ ) כאשר  $-\infty < x < -5$

או בקיצור  $x < -5$ ; והיא עולה (או  $y \uparrow$ ) כאשר  $-5 < x < \infty$ , או בקיצור  $x > -5$ .

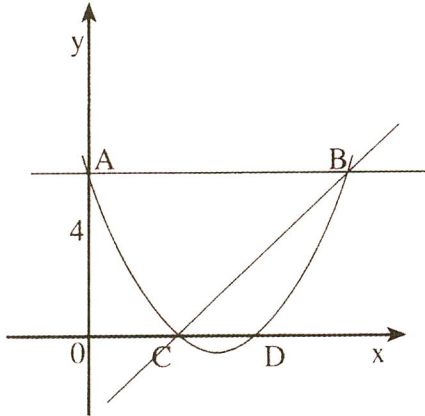
בפרבולה ההפוכה, שיעור ה-  $x$  של הקודקד הוא  $3$ . לכן, אפשר לכתוב:

$y \uparrow$  כאשר  $x < 3$ ,  $y \downarrow$  כאשר  $x > 3$ .



**הימנע מהטעות של התייחסות לשעור ה- $y$  של הקודקד בעת קביעת תחומי עליה וירידה של הפונקציה.**

נראה דוגמה המסכמת את הנושאים שלמדנו בנושא הפרבולה.



נתונה הפונקציה:  $Y = x^2 - 5x + 4$  וישר AB מקביל לציר ה- $x$  דרך נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $y$ . נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $x$ .

- מצא באיזה תחום הפונקציה עולה ובאיזה תחום היא יורדת.
- מצא באיזה תחום הפונקציה חיובית ובאיזה תחום היא שלילית.
- מצא באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה קטנים מ-4.
- מצא את משוואת הישר BC.
- מצא את שטח המשולש CBD.
- האם יכול ערך הפונקציה להיות (-2.5)?

**הסבר:**

$a=1 > 0$  לכן הפרבולה ישרה.

א.  $x_m = \frac{5}{2} = 2.5$ . לכן,  $Y \downarrow$  כאשר  $x < 2.5$ , ו-  $Y \uparrow$  כאשר  $x > 2.5$ .

ב. נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ :  $Y=0$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$$

לכן,  $Y < 0$  כאשר  $1 < x < 4$ , ו-  $Y > 0$  כאשר  $x < 1$  או  $x > 4$ .

ג. הישר  $y=4$  חותך את הפרבולה בשתי נקודות A ו-B (הנקודה A היא גם נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $y$ ).

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$$

לכן,  $Y < 4$  כאשר  $0 < x < 5$ , ו-  $Y > 4$  כאשר  $x < 0$  או  $x > 5$ .

ד. שעורי הנקודה B: (5, 4); שעורי הנקודה C: (1, 0) - מצאנו בסעיף א' לפי

$$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-1}{5-1} \Rightarrow y = x - 1$$

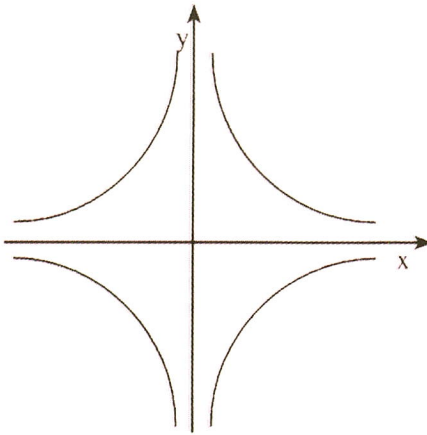
ה. את שטח המשולש CBD נמצא בעזרת הצלע CD והגובה לצלע זו, שהוא שיעור  
 ה-  $y$  של B - כלומר 4.

$$CD = 4 - 1 = 3 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

ו. ערך הפונקציה  $Y$  אינו יכול להיות (-2.5).  $y_m = -2.25$  (בדוק!) וזה הערך  
 הנמוך ביותר של הפונקציה.

## 14. ההיפרבולה

הפונקציה  $y = \frac{a}{x}$  אף היא פונקציה ריבועית, כי היא מכילה מכפלה של שני  
 משתנים:  $xy = a$ . זו היא צורה סמויה של מעלה שניה.



התאור הגרפי של פונקציה זו נקרא  
 היפרבולה.

גרף זה מורכב משני חלקים זהים  
 בצורתם.

אם  $a > 0$ , יופיעו שני החלקים ברביע  
 הראשון והשלישי.

אם  $a < 0$ , הם יופיעו בשני וברביעי.

תחום ההגדרה של שתי הפונקציות

הללו הוא  $x \neq 0$ , כי כאשר  $x = 0$ ,  
 השבר אינו מוגדר.

ואמנם, בכל אחת מהן יש אי-קיום

בנקודה  $x = 0$ . כלומר, הפונקציות אינן

חותכות את הצירים (גם  $y \neq 0$  כי המונר  
 איננו 0 ולכן השבר אינו מתאפס).

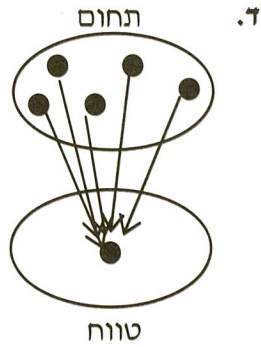
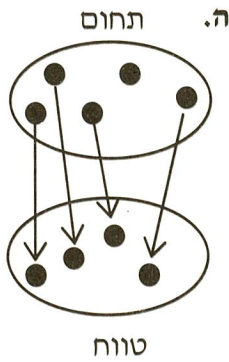
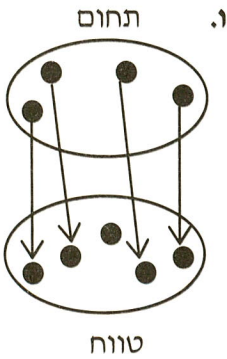
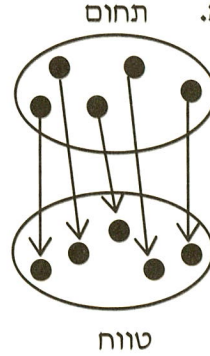
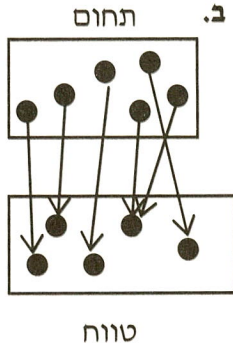
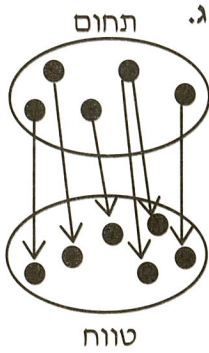
הפונקציה  $y = \frac{a}{x}$ , כאשר  $a > 0$  (הענפים השחורים), היא פונקציה יורדת לכל ערך של  
 $x$  בתחום "ללכת" עם המבט על מסלול הפונקציה משמאל לימין).

הפונקציה  $y = \frac{a}{x}$ , כאשר  $a < 0$  (הענפים הצבעוניים) היא פונקציה עולה לכל ערך של  
 $x$  בתחום.

# תרגילים

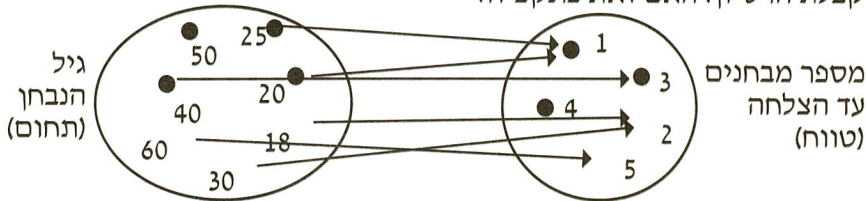
## סעיף 1

1. האם ההתאמות הבאות הן פונקציות?



תשובה: א', ב', ד', ו' הן פונקציות ; ג', ה' - אינן פונקציות

2. לפניך קשר בין גילו של הניגש למבחן נהיגה, למספר הפעמים שהוא נבחן עד קבלת הרשיון. האם זאת פונקציה?

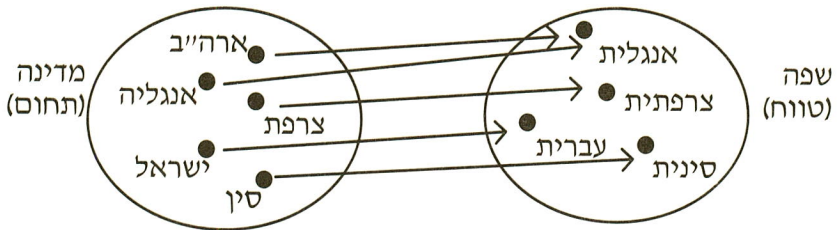


תשובה: כן

3. נבדק הקשר בין כמות המכירות של אבקת כביסה מסוימת למחיר השקית (מחיר השקית בהתאם למשקל שלה). האם זו פונקציה? איזה סוג?

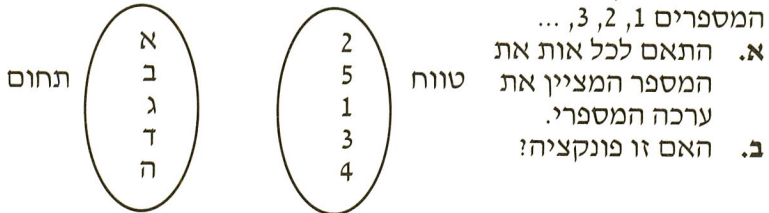
תשובה: זו פונקציה קבועה.

4. נסח כלל התאמה לשתי הקבוצות הנתונות. האם זה מבטא פונקציה?



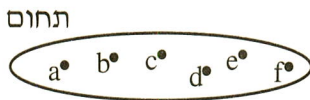
תשובה: א. התאמת השפה המדוברת לכל מדינה ב. כן

5. נתונות שתי קבוצות: אחת מכילה את האותיות א, ב, ג, ... והשניה את המספרים 1, 2, 3, ...



א. התאם לכל אות את המספר המציין את ערכה המספרי. האם זו פונקציה?

תשובה: א. א - 1, ב - 2, ..., ה - 5. ב. כן



6. נתונות שתי קבוצות של אותיות לועזיות קטנות וגדולות. התאם לכל אות קטנה את האות הגדולה המתאימה.



א. האם זו פונקציה?  
ב. האם תוכל להוסיף אותיות כדי שתקבל פונקציה?

תשובה: א. לא, ב. להוסיף C לטווח

7. חוזר לקבוצות שבשאלה הקודמת, הפעם התאם לכל אות גדולה (תחום) את האות הקטנה המתאימה (טווח).

א. האם זו פונקציה?

ב. מה צריך להוסיף כדי שההתאמה הני"ל תהיה פונקציה?

תשובה: א. לא, ב. להוסיף  $m$  לטווח החדש.

תחום



8. נתונות שתי קבוצות.

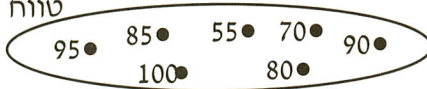
נסח התאמה כלשהי

לקבוצות, וסמן

חיצים, כך

שתהיה פונקציה.

טווח



תשובה: למשל תלמיד (תחום)  $\leftarrow$  ציון (טווח).

9. התיחס לטבלאות הבאות, וציין אילו מביניהן מגדירות פונקציות. נסה למצוא את כלל ההתאמה.

8	4	2	1	0	תחום	ב.	5	4	3	2	1	תחום	א.	15	12	9	6	3	טווח
8	4	2	1	0	טווח		3	0	-3	-5	-7	טווח							

$\pm 5$	$\pm 4$	$\pm 3$	$\pm 2$	$\pm 1$	תחום	ד.	3	0	-3	-5	-7	תחום	ג*.	3	0	3	5	7	טווח
25	16	9	4	1	טווח		3	0	3	5	7	טווח							

20	10	8	7	3	תחו	ו.	16	9	4	1	0	תחו	ה.	$\pm 4$	$\pm 3$	$\pm 2$	$\pm 1$	0	טווח
2	1	0.8	0.7	0.3	טווח		$\pm 4$	$\pm 3$	$\pm 2$	$\pm 1$	0	טווח							

תשובה: א. זו פונקציה, ההתאמה היא - מכפלת מספרי התחום ב-3. ב. פונקציה - המספרים אל עצמם ג. פונקציה - ערך מוחלט של המספרים בתחום ד. פונקציה - ריבוע המספרים שבתחום ה. לא פונקציה - כל שורש של המספרים שבתחום ו. פונקציה - חילוק המספרים ב-10.

10. בטבלה הבאה שתי קבוצות.

אפריל	אוגוסט	יולי	פברואר	דצמבר	מרץ	ינואר	נובמבר
11	12	1	3	7	6	8	2

א. סדר אותן, כך שלכל חודש בשנה (תחום) יתאים המספר הסידורי שלו.

האם התאמה זו היא פונקציה? השלם אבר, כדי להפוך אותה לפונקציה.

ב. סדר אותם כך שלכל מספר סידורי של חודש (תחום) יתאים כינוי לועזי

(טווח). האם זו פונקציה? השלם אבר, כדי להפוך את ההתאמה לפונקציה.

תשובה: א. לא פונקציה, חסר המספר 4. ב. לא פונקציה, חסר חודש יוני.

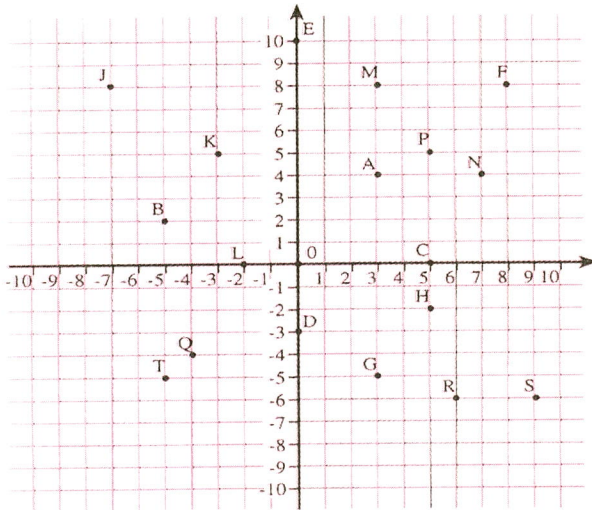


תשובות:

1. R, 2. R, 3. R, 4. R, 5.  $x \neq 0$ , 6.  $x \neq 3$ , 7.  $b \neq 1$ , 8.  $x \neq -4$ , 9.  $a \neq 3$ ,  
 10.  $x \neq y$ , 11.  $x \neq -y$ , 12.  $x \neq 1$ , 13.  $x \neq -6$ , 14.  $a \geq 1$ , 15.  $x \geq 4$ ,  
 16.  $x \leq 4$ , 17.  $x \geq 4$ , 18.  $x > 4$ , 19.  $x > 4$ , 20.  $x < 3$ , 21.  $x \neq 0, x \neq 3$ ,  
 22.  $x \neq -2, x \neq 3$ , 23.  $x \neq 0, y \neq 0$ , 24.  $x \neq 0, x \neq 1$ ,  
 25.  $y \neq 2, x \leq 5$ , 26.  $x \neq 0, y \neq 5$ , 27.  $x \geq 1, x \neq 3$ , 28.  $x \neq -2, x \neq 5$ ,  
 29.  $a \neq \pm 1$ , 30.  $x \neq \pm 2$ .

**סעיף 2**

14. כל אות בשרטוט מציינת נקודה. כתוב את שעוריהן.



תשובה:

- A(3,4); B(-5,2); C(5,0); D(0,-3); E(0,10); F(8,8); G(3,-5); H(5,-2); K(-3,5)  
 L(-2,0); M(3,8); N(7,4); P(5,5); Q(-4,-4); R(6,-6); S(9,-6); T(-5,-5)

15. התייחס לנקודות שבסעיף הקודם וקבע מה משותף לשעורי הנקודות המופיעות בכל סעיף.

- א. 1. B, T. 2. M, A, G. 3. P, C, H.  
 ב. 1. M, F, J. 2. K, P. 3. A, N. 4. L, C. 5. R, S. 6. T, G.

תשובה: א. לכל קבוצת נקודות שעור  $x$  משותף.  
 ב. לכל קבוצת נקודות שעור  $y$  משותף.

16. התייחס לנקודות שבבעיה 14 וקבע:

- א. מה משותף לשעורי הנקודות E, O, D.  
 ב. חשב את אורך הקטעים: EO, DO, EO.  
 ג. מה משותף לשעורי הנקודות L, O, C.  
 ד. חשב את אורך הקטעים LC, LO, CO.

- תשובה: א.** הנקודות נמצאות על ציר ה- $y$ . שעור ה- $x$  של כולן הוא 0.  
**ב.**  $ED=13$ ,  $DO=3$ ,  $EO=10$ .  
**ג.** הנקודות נמצאות על ציר ה- $x$ . שעור ה- $y$  של כולן הוא 0.  
**ד.**  $LC=7$ ,  $LO=2$ ,  $CO=5$ .

17. חזור לנקודות, המופיעות בשאלה 14, וקבע מה משותף לנקודות ששעוריהן מופיעים בכל סעיף.

**א.** M,A,P,F,N **ב.** J,B,K **ג.** H,G,R,S **ד.** T,Q

- תשובה: א.** הנקודות נמצאות ברביע הראשון  
**ב.** הנקודות נמצאות ברביע השני  
**ג.** הנקודות נמצאות ברביע הרביעי  
**ד.** הנקודות נמצאות ברביע השלישי.

18. שרטט מערכת צירים, וסמן בה את הנקודות הבאות (קח שתי משבצות כיחידה):

$A(0,5)$ ,  $B(3,3)$ ,  $C(-5,0)$ ,  $D(3,0)$ ,  $E(0,3)$ ,  $F(5,6)$ ,  $G(-5,-2)$ ,  $H(-5,6)$   
 $P(3\frac{1}{2},-8)$ ,  $Q(-4,-6\frac{1}{4})$ ,  $R(0,5\frac{1}{8})$ ,  $K(4,8)$ ,  $L(2,-3\frac{1}{2})$ ,  $M(-1\frac{1}{4},2)$ ,  $N(-4\frac{3}{4},5\frac{1}{2})$ ,  
**א.** ציין אלו מהנקודות נמצאות באותו רביע.  
**ב.** ציין אלו מהנקודות נמצאות על אותו ציר.

**תשובה: א.** ברביע הראשון: B, F, K, ברביע השני: M, N, H, ברביע השלישי: G, Q, ברביע הרביעי: L, P. **ב.** הנקודות A, E, R נמצאות על ציר ה- $y$ , הנקודות C, D נמצאות על ציר ה- $x$ .

19. התייחס לנקודות שבשאלה הקודמת. מצא את הרוחק בין כל זוג נקודות:  
A,E ; B,E ; H,G ; C,G ; C,D ; R,A ; B,D ; H,F

**תשובה:**  $BD=3$ ,  $HF=10$ ,  $HG=8$ ,  $CG=2$ ,  $CD=8$ ,  $AE=8$ ,  $BE=3$ ,  $RA = 10\frac{1}{8}$

20. שרטט מערכת צירים וסמן בה את הנקודות הבאות:  
 $A(-2,8)$ ,  $B(0,6)$ ,  $C(-6,4)$ ,  $D(-2,4)$ ,  $E(4,4)$ ,  $F(-8,0)$ ,  $G(8,3)$ ,  $H(2,0)$ ,  
 $K(8,0)$ ,  $L(-2,-2)$ ,  $M(0,-2)$ ,  $N(4,-3)$ ,  $P(-6,-5)$ ,  $Q(0,-5)$ ,  $R(9,-3)$ ,  $S(8,-6)$

- א.** מה משותף לכל קבוצת נקודות:  
**1.** C,D,E **2.** F,H,K **3.** L,M **4.** N,R **5.** P,Q  
**ב.** מה מאפיין את כל קבוצות הנקודות שבסעיף אי?  
**ג.** מה משותף לכל קבוצת נקודות:  
**1.** C,P **2.** A,D,L **3.** B,M,Q **4.** E,N **5.** G,K,S  
**ד.** מה מאפיין את כל קבוצות הנקודות שבסעיף ג'?

- תשובה: א.  $y=4$  .1  $y=0$  .2  $y=-2$  .3  $y=-3$  .4  $y=-5$  .5  
 ב. הישרים העוברים דרךן מקבילים לציר ה- $x$ .  
 ג.  $x=-6$  .1  $x=-2$  .2  $x=0$  .3  $x=4$  .4  $x=8$  .5  
 ד. הישרים העוברים דרךן מקבילים לציר ה- $y$ .

21. שרטט מערכת צירים, וסמן בה נקודה  $A(2,5)$ .  
 א. דרך נקודה זו העבר ישר המקביל לציר ה- $x$ , ומצא שלוש נקודות נוספות על ישר זה. מה משותף לנקודות אלו?  
 ב. דרך אותה נקודה  $A$ , העבר ישר המקביל לציר  $y$ , ומצא שלוש נקודות נוספות על ישר זה. מה משותף לנקודות אלו?

- תשובה: א. למשל:  $B(-4,5)$ ;  $C(0,5)$ ;  $D(6,5)$ . לכולן אותו שעור  $y$ .  
 ב. למשל:  $E(2,3)$ ;  $F(2,0)$ ;  $G(2,3)$ . לכולן אותו שעור  $x$ .

22. שרטט מערכת צירים, וסמן בה נקודה  $K(3,7)$ .  
 א. מצא נקודה הסימטרית לנקודה  $K$  לגבי ציר  $x$ .  
 ב. מצא נקודה הסימטרית לנקודה  $K$  לגבי ציר  $y$ .  
 ג. מצא נקודה הסימטרית לנקודה  $K$  לגבי ראשית הצירים.

תשובה: א.  $(3,-7)$  . ב.  $(-3,7)$  . ג.  $(-3,-7)$

23. סמן את הנקודות, ששעוריהן נתונים בטבלה, במערכת צירים, וחבר אותן ברצף.

$x$	0	1	2	3	4	6	8	9	12
$y$	2	5	8	11	2	8	2	5	2

- א. איזו צורה התקבלה?  
 ב. מה אורך הצלע המקבילה לציר ה- $x$ ?

תשובה: א. משולש . ב. 12

24. סמן את הנקודות, ששעוריהן נתונים בטבלה, במערכת צירים, וחבר אותן ברצף.

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y$	2	4	6	2	2	6	2	6	2	4	6

- א. איזו צורה התקבלה?  
 ב. מה אורך הצלעות המקבילות לציר ה- $x$ ?

תשובה: א. מקבילית . ב. 8

25. סמן את הנקודות, ששעוריהן נתונים בטבלה, במערכת צירים, וחבר אותן ברצף. איזו צורה מתקבלת?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

תשובה: צורה שנקודותיה סימטריות לציר ה- $y$ .

26. סמן את הנקודות, ששעוריהן נתונים בטבלה, במערכת צירים, וחבר אותן ברצף. איזו צורה מתקבלת?

x	-5	-4.5	-4	-3	-1.5	0	1.5	3	4	4.5	5
y	0	2.2	3	4	4.8	5	4.8	4	3	2.5	0

תשובה: צורה סימטרית ביחס לציר ה- $y$ , בקירוב - חצי מעגל.

27. סמן 4 נקודות במערכת צירים:  $A(-3,4)$ ;  $B(5,4)$ ;  $C(5,-2)$ ;  $D(-3,-2)$ .  
 חבר את הנקודות למרובע ABCD. וקבע איזה מרובע מתקבל. מצא את:  
 א. אורכי צלעות המרובע.  
 ב. אורכי האלכסונים (העזר במשפט פיתגורס).

תשובה: המרובע הוא מלבן. א.  $AD=BC=6$ ;  $AB=DC=8$ ; ב.  $AC=BD=10$ .

28. הנקודות  $A(1,7)$ ;  $B(-3,-2)$ ;  $C(5,-2)$  הן קודקדים של משולש שווה שוקיים. שרטט את המשולש במערכת צירים וקבע את:  
 א. אורך הבסיס ואת אורך הגובה לבסיס.  
 ב. שטח המשולש.

תשובה: א.  $BC=8$ ;  $AD=9$ , ב.  $S=36$ .

29. במערכת צירים נתונות 3 נקודות, המהוות קודקדים של ריבוע.  
 הנקודות הן:  $A(-3,1)$ ;  $B(5,1)$ ;  $C(5,9)$ . שרטט ומצא את:  
 א. שעורי הקודקד הרביעי D.  
 ב. אורך צלע הריבוע.

תשובה: א.  $D(-3,9)$ . ב.  $AB=BC=CD=AD=8$ .

30. שעורי שלושה קודקדים של טרפז שווה שוקיים ABCD הם:  
 $A(-3,0)$ ,  $B(0,6)$ ,  $C(5,6)$ . מצא את:  
 א. שעורי קודקד D.  
 ב. אורכי הבסיסים של הטרפז.  
 ג. גובה הטרפז ושטחו.

תשובה: א.  $D(8,0)$ . ב.  $DA=11$ ;  $BC=5$ ; ג.  $H=6$ ;  $S=48$ .

31. שרטט במערכת צירים משולש, שקודקדיו הם:  $A(-4,2)$ ;  $B(8,-3)$ ;  $C(8,2)$ .  
 א. איזה משולש התקבל?  
 ב. מצא את אורך הצלעות  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ .  
 ג\*. השלם את המשולש למלבן  $ACBD$ , ומצא את שעורי הקודקד  $D$ .

תשובה: א. המשולש הוא ישר זווית ב-  $C$ . ב.  $AB=13$ ;  $BC=5$ ;  $AC=12$   
 ג.  $D(-4,-3)$

32.  $AB$  ו-  $DC$  הן צלעות נגדיות במקבילית  $ABCD$  והן מקבילות לציר  $x$ .  
 נתון:  $A(-3,3)$ ;  $D(-5,-2)$ . שרטט את המקבילית ומצא את:  
 א. שעורי הקודקדים  $B$ ,  $C$ , אם נתון, כי  $AB=DC=10$ .  
 ב. העזר בשרטוט וקבע מהו גובה המקבילית.  
 ג. חשב את שטח המקבילית.

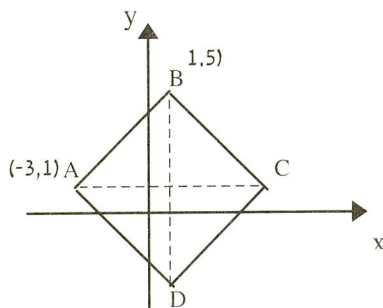
תשובה: א.  $C(5,-2)$ ,  $B(7,3)$ . ב. 5, ג. 50

33. שרטט במערכת צירים את המשולש שקודקדיו:  $A(0,5)$ ,  $B(5,7)$ ,  $C(5,1)$ .  
 א. מצא את אורך  $BC$ .  
 ב. מצא את אורך הגובה לצלע  $BC$ .  
 ג. חשב את שטח המשולש.

תשובה: א. 6, ב. 5, ג. 15

34. סמן את שעורי הקודקדים של מרובע  $ABCD$  במערכת צירים:  
 $A(4,6)$ ;  $B(7,1)$ ;  $C(4,-4)$ ;  $D(1,1)$   
 א. מה צורתו של המרובע?  
 ב. מה אורך אלכסונו?  
 ג. חשב את שטח המרובע.

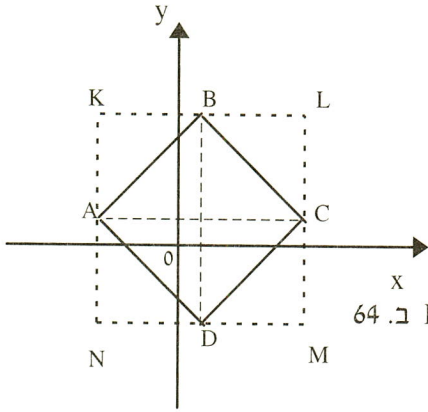
תשובה: א. המרובע הוא מעוין, ב. 8,6, ג. 24, ד.  $E(4,1)$



35.  $ABCD$  הוא ריבוע, שאלכסונו מקבילים לצירים.

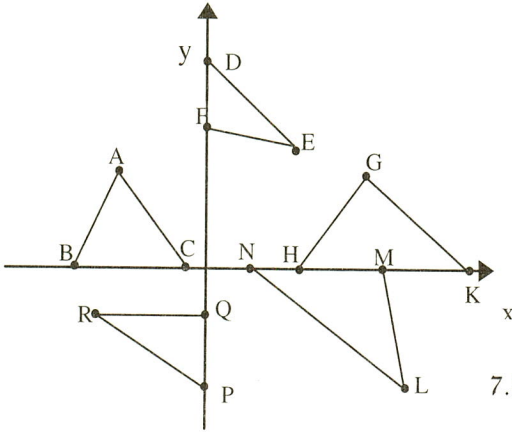
נתון:  $B(1,5)$ ,  $A(-3,1)$ .  
 א. מצא את שעורי הקודקדים  $D$ ,  $C$ .  
 ב. מצא את אורך האלכסון.  
 ג. חשב את שטח הריבוע.

תשובה: א.  $D(1,-3)$ ;  $C(5,1)$ , ב. 8, ג. 32



36. דרך קודקדי הריבוע ABCD  
 שבשאלה הקודמת מעבירים  
 ישרים מקבילים לצירים.  
 מתקבל ריבוע KLMN.  
 א. מצא את שיעורי  
 הקודקדים K, L, M, N.  
 ב. חשב את שטח המרובע.

תשובה: K(-3,5) ; L(5,5) ; M(5,-3) ; N(-3,-3) . ב. 64

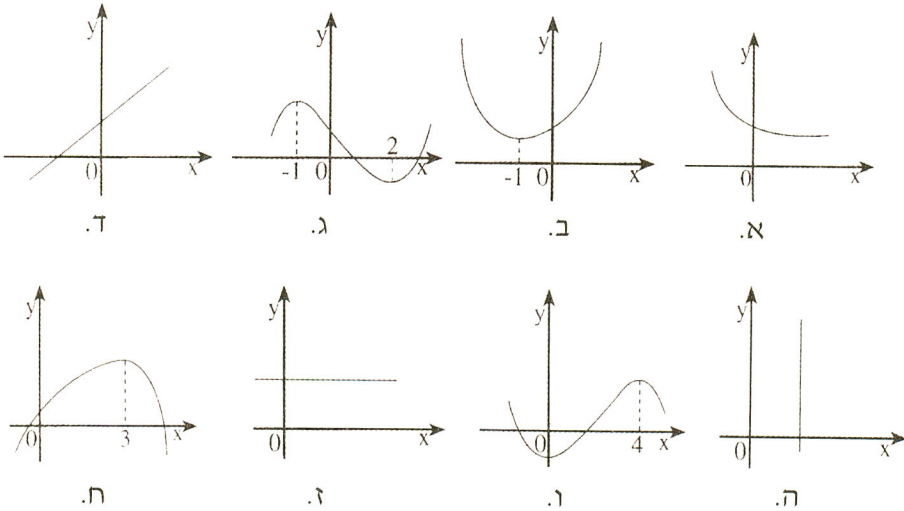


37. בשרטוט נתונים משולשים, ושעורי  
 הקודקדים שלהם.  
 מצא את שטחם.

- א.  $A(-4,4)$  ;  $B(-6,0)$  ;  $C(-1,0)$
- ב.  $D(0,9)$  ;  $E(4,5)$  ;  $F(0,6)$
- ג.  $G(7,4)$  ;  $H(4,0)$  ;  $K(12,0)$
- ד.  $L(9,-5)$  ;  $M(8,0)$  ;  $N(2,0)$
- ה.  $R(-5,-2)$  ;  $P(0,-2)$  ;  $Q(0,-5)$

תשובה: א. 10 , ב. 6 , ג. 16 , ד. 15 , ה. 7.5

38. נתונים שמונה שרטוטים של פונקציות :



קבע איזה תאור מתאים לכל פונקציה. הפונקציה:

1. עולה בכל התחום
2. קבועה
3. מתחילה בעליה ואח"כ יורדת
4. תחילה יורדת, אח"כ עולה ושוב יורדת
5. יורדת בכל בתחום
6. היא לא פונקציה כלל.
7. תחילה עולה אח"כ יורדת ואח"כ שוב עולה
8. תחילה יורדת ואח"כ עולה.

תשובה: 1 - ד, 2 - ז, 3 - ח, 4 - ו, 5 - א, 6 - ה, 7 - ג, 8 - ב

39. קבע לגבי כל פונקציה שבשאלה הקודמת באיזה תחום היא יורדת ובאיזה תחום היא עולה.

תשובה: א. יורדת לכל  $x$  ב. יורדת כאשר  $x < -1$ , עולה כאשר  $x > -1$  ג. עולה כאשר  $x < -1$  או  $x > 2$ , יורדת כאשר  $-1 < x < 2$  ד. עולה לכל  $x$  ו. יורדת כאשר  $x < 0$  או  $x > 4$ , עולה כאשר  $0 < x < 4$  ח. עולה כאשר  $x < 3$ , יורדת כאשר  $x > 3$ .

### סעיפים 3-7

40. נתונה הטבלה הבאה:

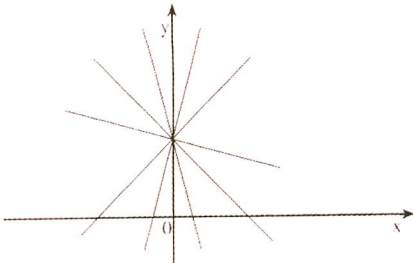
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

- א. סמן את הנקודות במערכת צירים וחבר אותן ברצף. איזו צורה התקבלה?
- ב. האם נחוצות כל הנקודות לשרטוט הגרף?

תשובה: א. קו ישר, ב. לא, שתיים מספיקות.

41. רשום טבלת ערכים לכל אחת מהפונקציות הבאות ותאר אותן בדרך גרפית.

- א.  $y = x - 5$  ב.  $y = 2x + 5$  ג.  $y = 3x + 2$   
 ד.  $3x + y = 0$  ה.  $y = -2x$  ו.  $2x - y + 5 = 0$



42. לפניך הגרפים של הפונקציות:

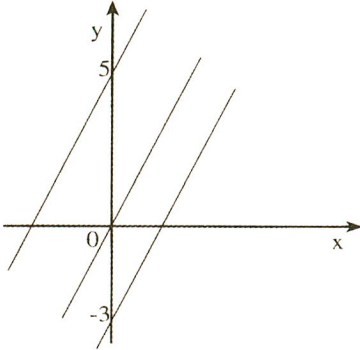
- $y = -2x + 4$ ,  $y - x = 4$ ,  $x + y - 4 = 0$   
 $y = 4 + 3x$ ,  $y = 0.5x + 4$   
 מה משותף לפונקציות הנ"ל, ומה משותף לגרפים שלהן?

תשובה: לכל הפונקציות:  $n = 4$  ולכן

כולן חותכות את ציר ה- $y$  באותה נקודה  $(0, 4)$

43. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות באותה מערכת צירים:  
 $x-2y=10$ ,  $y-3x+5=0$ ,  $y=x-5$ ,  $y=-x-5$ ,  $y=2x-5$   
 א. מה משותף לפונקציות הנ"ל, ומה משותף לגרפים שלהן?  
 ב. על איזה ישר נמצאת הנקודה  $(-1, -8)$ ?

תשובה: א. לכל הפונקציות אותו  $m$  ולכן כולן חותכות את ציר ה- $y$  באותה נקודה  
 ב. על הישר  $y-3x+5=0$   $(0, -5)$



44. נתונות הפונקציות הבאות:  
 $y=2x-3$ ,  $y=2x$ ,  $y=2x+2$   
 $2y-3-4x=0$ ,  $2x+6-y=0$   
 השלם בשרטוט את הגרפים החסרים.  
 א. מה משותף לכל פונקציות הנ"ל?  
 מה משותף לגרפים שלהם?  
 ב. על איזה גרף נמצאת הנקודה  $(0, 0)$ ?

תשובה: א. לכל הפונקציות אותו  $m$   
 ולכן הישרים (הגרפים) מקבילים.  
 ב. על הישר  $y=2x$

45. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות באותה מערכת צירים:  
 $4x+2y-5=0$ ,  $y=-2x+6$ ,  $y=-2x+3$ ,  $5-y=2x$ ,  $y=-2x-2$   
 א. האם אחד הישרים יעבור דרך ראשית הצירים?  
 ב. מה משותף לפונקציות הנ"ל, ומה משותף לגרפים שלהן?

תשובה: א. לא ב. לכל הפונקציות אותו  $m$  ולכן הישרים מקבילים.

46. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות באותה מערכת צירים:  
 $y=2x-5$ ,  $y=0.5x$ ,  $y=5x-1$ ,  $y=x+2$ ,  $y=3x-1$   
 א. מה משותף לפונקציות הנ"ל, ומה משותף לגרפים שלהן?  
 ב. כמה מבין הישרים חותכים את ציר ה- $y$  באותה נקודה? מה שעוריה?

תשובה: א. לכל הפונקציות  $m > 0$  ולכן הן פונקציות עולות. ב. שניים:  $(0, -1)$

47. א. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות באותה מערכת צירים:  
 $y=-3x$ ,  $y=-2x-5$ ,  $y=-0.5x$ ,  $y=-5x-1$ ,  $y=-x+2$   
 ב. מה משותף לפונקציות הנ"ל, ומה משותף לגרפים שלהן?

תשובה: ב. לכל הפונקציות  $m < 0$  ולכן הן פונקציות יורדות.

48. פתור בדרך גרפית את מערכות המשוואות הבאות, ובדוק את התוצאות על ידי פתרון אלגברי של המערכת:

(א) 
$$\begin{cases} x = 2 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

(ב) 
$$\begin{cases} y = 1 \\ 3y + x = 6 \end{cases}$$

(ג) 
$$\begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

(ד) 
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

(ה) 
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

(ו) 
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

(ז) 
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 6 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

(ח) 
$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

(ט) 
$$\begin{cases} 3y - 4x = 6 \\ 6y - 8x = -6 \end{cases}$$

(י) 
$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ y = 1.5x + 3 \end{cases}$$

(יא) 
$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

(יב) 
$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

(יג) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases}$$

(יד) 
$$\begin{cases} 5x + y = -9 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

(טו) 
$$\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 3x + 1.5y = 4 \end{cases}$$

תשובות: א. (2,3) ב. (3,1) ג. (4,4) ד. (-3,-1) ה. (-3,2) ו.  $\phi$  ז. (-3,5) ח. (2,3) ט.  $\phi$  י. אינסוף פתרונות יא.  $\phi$  יב.  $(\frac{1}{2}, 4)$  יג. (1,3) יד. (-2,1) טו.  $\phi$

49. בשרטוט נתונים גרפים של פונקציות:

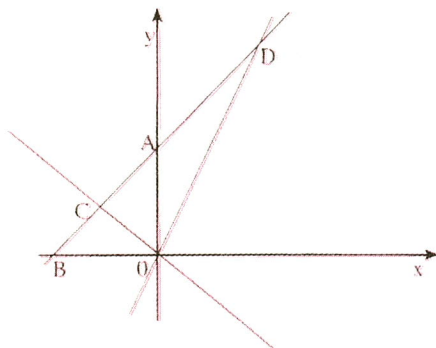
a:  $y=2x+2$ , b:  $y=-x+3$ , c:  $y=x$

א. קבע איזה ישר הוא תאור גרפי של כל פונקציה?

ב. מצא את שעורי הנקודות: A,B,C,D,E

תשובה: א. a-AB, b-DC, c-AO

ב. A(-2,-2), B(0,2), C(0,3), D(3,0), E(-1,0)



50. נתונים הגרפים של הפונקציות:

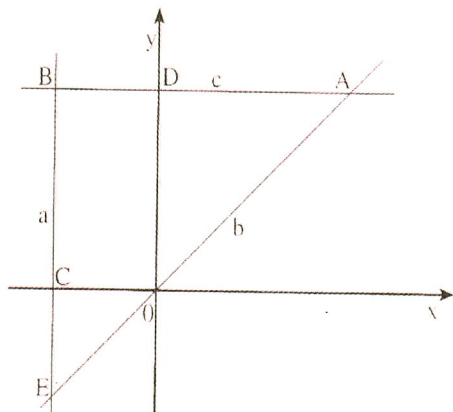
a:  $y=-x$ , b:  $y=x+1$ , c:  $y=2x$

א. קבע איזה ישר הוא תאור גרפי של כל פונקציה?

ב. מצא את שעורי הנקודות: A,B,C,D

ג. חשב את שטח המשולש BCO.

תשובה: א.  $a=CO$ ,  $b=AB$ ,  $c=OD$  ב.  $A(0,1)$ ,  $B(-1,0)$ ,  $C(-0,5,0,5)$ ,  $D(1,2)$  ג. 0.25



51. בשרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות:

$a: x=-1$ ,  $b: y=2x$ ,  $c: y=2$

א. התאם פונקציה לכל ישר.

ב. חשב את אורכי הקטעים

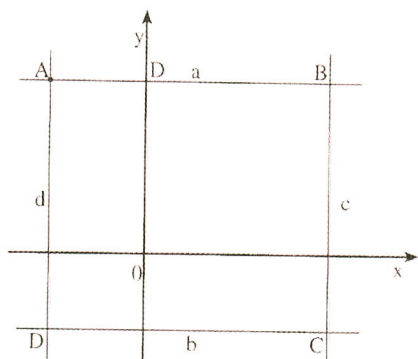
$BE$ ,  $AD$ ,  $EC$

ג. חשב את שטח המשולש  $ABE$ .

תשובה: א.  $AB=c$ ,  $AE=b$ ,  $BC=a$

ב.  $BE=4$ ,  $AD=1$ ,  $EC=2$

ג. 4



52. בשרטוט נתונים גרפים של פונקציות:

$a: y=4$ ;  $b: y=-2$ ;  $c: x=3$ ;  $d: x=-5$

א. קבע את הישר שהוא התאור

הגרפי של כל פונקציה.

ב. חשב את שטח המרובע  $ABCD$ .

תשובה: א.  $a=AB$ ,  $b=DC$ ,  $c=BC$ ,  $d=AD$

ב.  $A(-5,4)$ ,  $B(3,4)$ ,  $C(3,-2)$ ,  $D(-5,-2)$

ג. 48

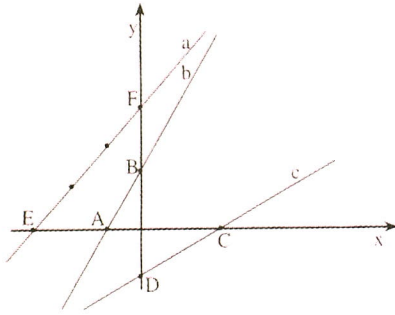
53. בשרטוט הבעיה הקודמת, חבר את הנקודות B ו-D.

א. מצא את משוואת הישר  $BD$ . האם ישר זה הוא פונקציה עולה או יורדת?

ב. קבע אם הפונקציה שהגרף שלה הוא הישר  $AC$  היא עולה או יורדת, בלי

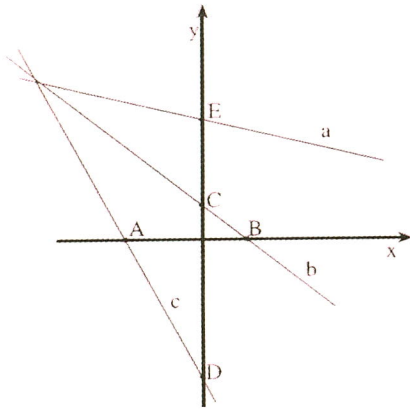
למצוא את המשוואה.

תשובה: א.  $4y-3x=7$ , עולה. ב. יורדת.



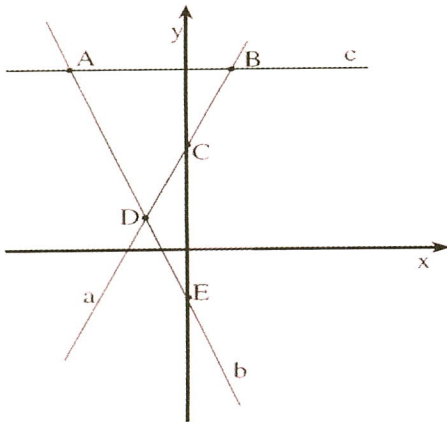
54. נתונים גרפים של פונקציות:  
 a:  $y=x+6$ , b:  $y=2x+3$ , c:  $y=0.5x-2$   
 א. קבע את הישר המתאר כל פונקציה.  
 ב. קבע איזו פונקציה עולה ואיזו פונקציה יורדת?  
 ג. מצא את שעורי הנקודות: A,B,C,D,E,F

- תשובה: א. a-EF, b-AB, c-DC  
 ב. כולן עולות  
 ג. A(-1.5,0), B(0,3), C(4,0), D(0,-2), E(-6,0), F(0,6)



55. בשרטוט נתונים גרפים של פונקציות:  
 a:  $y=-0.25x+4$ , b:  $y=-x+2$ , c:  $y=-3x-3$   
 א. קבע את הישר המתאר כל פונקציה.  
 ב. קבע איזו פונקציה עולה ואיזו פונקציה יורדת?  
 ג. מצא את שעורי הנקודות: A,B,C,D,E

- תשובה: א. a-EK, b-BC, c-AD  
 ב. כולן יורדות  
 ג. A(-1,0), B(2,0), C(0,2), D(0,-3), E(0,4)

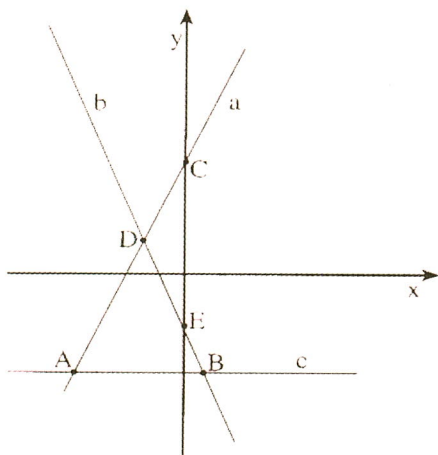


56. נתונים גרפים של פונקציות:  
 a:  $y=2x+3$ , b:  $y=-2x-1$ , c:  $y=7$   
 א. קבע את הישר המתאר כל פונקציה?  
 ב. מצא את שעורי הנקודות: A,B,C,D,E  
 ג. חשב את שטחי המשולשים ADB ו-EDC.

- תשובה: א. a-BC, b-AD, c-AB  
 ב. A(-4,7), B(2,7), C(0,3), D(-1,1), E(0,-1)  
 ג. 2, 18

57. הוסף לשרטוט של הבעיה הקודמת את הישרים AC ו-BE.  
 א. מצא את המשוואות שלהם.  
 ב. מצא עבור אלו ערכי x חיובית הפונקציה של הישר BE.  
 ג. מצא עבור אלו ערכי x, שלילית הפונקציה של הישר AC.

תשובה: א. BE:  $y=4x-1$ , AC:  $x+y=3$ . ב.  $x > \frac{1}{4}$ . ג.  $x > 3$

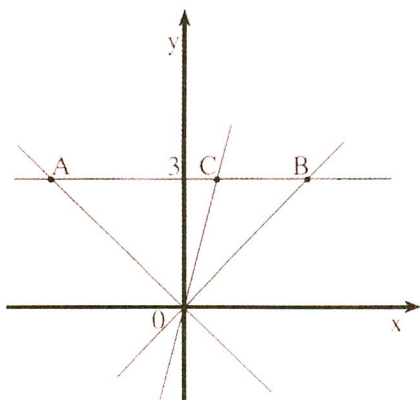


58. נתונים גרפים של פונקציות:  
 $a: y=2x+3$ ,  $b: y=-2x-1$ ,  $c: y=-3$   
 א. קבע את הישר המתאר גרפית כל פונקציה.  
 ב. מצא את שעורי הנקודות: A, B, C, D, E  
 ג. חשב את שטח המשולשים ABD ו-EDC.

תשובה: א. a-AC, b-ED, c-AB  
 ב.  $A(-3,3)$ ,  $B(1,-3)$ ,  $C(0,3)$ ,  $D(-1,1)$ ,  $E(0,-1)$   
 ג. 2, 8

59. הוסף לשרטוט של הבעיה הקודמת את הישר BC.  
 א. מצא את משוואת ישר זה.  
 ב. מצא באיזה תחום יהיו ערכי פונקציה זו שליליים?  
 ג. חשב את שטח המשולש ECB.

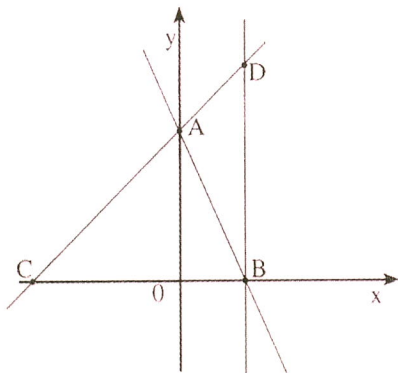
תשובה: א.  $y=-6x+3$ . ב.  $x > 0.5$ . ג. 2



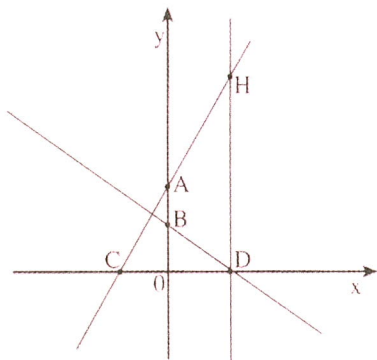
60. נתונות הפונקציות והגרפים שלהן:  
 $OB: y = \frac{2}{3}x$ ,  $OA: y = -\frac{1}{2}x$   
 $OC: y=3x$   
 א. מה משותף להן ומה משותף לגרפים שלהן?  
 ב. נתון גם ישר  $y=3$ . מצא את שעורי הנקודות A, B, C.  
 ג. חשב את שטח המשולש AOB.

תשובה

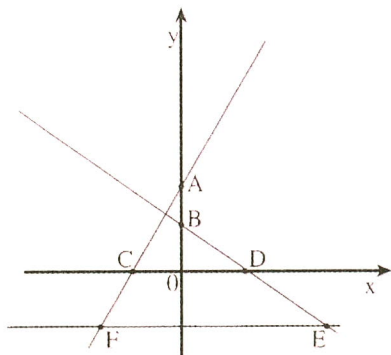
- א.  $n=0$ , הם עוברים דרך ראשית הצירים  
 ב.  $A(-6,3)$ ,  $B(4.5,3)$ ,  $C(1,3)$ . ג. 15.75



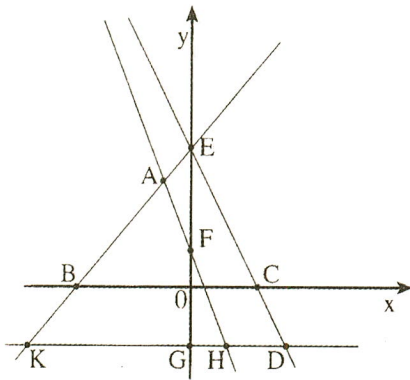
61. הישרים AB ו-AC הם גרפים של הפונקציות:  
 $y = -2.5x + 5$  ו-  $y = x + 5$  בהתאמה,  
 ונתון ישר BD:  $x = 2$ .
- א. מצא את שעורי הנקודות A, B, C, D.  
 ב. חשב את שטחי המשולשים CAB ו- DAB.  
 ג. חשב את שטח המרובע ADBO.
- תשובה: א.  $A(0,5), B(2,0), C(-5,0), D(2,7)$   
 ב. 17.5 ו- 7  
 ג. 12



62. נתונים הגרפים של הפונקציות:  
 $BD: y = -\frac{2}{3}x + 2$ ,  $AH: y = 2x + 3$   
 $DH: x = 3$ ,
- א. חשב את שעורי הנקודות A, B, C, D, H.  
 ב. חשב את אורך הקטעים CD, AB, DH.  
 ג. חשב את שטח הטרפז AODH.
- תשובה: א.  $A(0,3), B(0,2), C(-1.5,0), D(3,0), H(3,9)$   
 ב.  $DH=9, AB=1, CD=4.5$   
 ג. 18



63. נתונים הגרפים של הפונקציות:  
 $BD: 2x + 3y = 6$ ,  $EF: y = -2$  AC:  $y = 2x + 3$
- א. חשב את שעורי הנקודות C, D, E, F.  
 ב. חשב את אורך הקטעים CD ו- FE.  
 ג. חשב את שטח הטרפז CDEF.
- תשובה: א.  $C(-1.5,0), D(3,0), E(6,-2), F(-2.5,-2)$   
 ב. 4.5 ו- 8.5  
 ג. 13



64. נתונים הגרפים של הפונקציות :

AF:  $y = -3x + 1$ , EC:  $2x + y = 4$ ,

AB:  $x - y = -4$

א. חשב את שטח המשולש FEC.

ב\*. חשב את שטח המרובע AECF.

ג. עבור אלו ערכי  $x$  יהיו ערכי

הפונקציה AF גדולים מערכי

הפונקציה EC.

ד. עבור אלו ערכי  $x$  יהיו ערכי

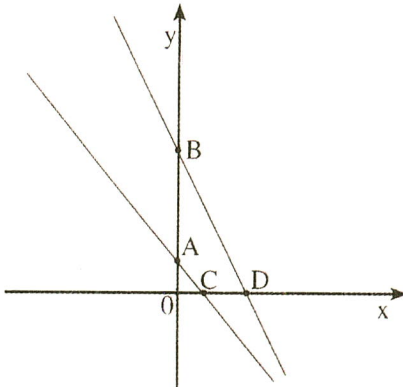
הפונקציה AB גדולים מערכי

הפונקציה EC.

תשובה: א. 3 ב.  $3\frac{1}{8}$  ג.  $x < -3$  ד.  $x < 0$

65. נוסף לשרטוט של השאלה הקודמת את הישר  $HD: y = -2$ , החותך את AB ב-K, את AF ב-H ואת EC ב-D. חשב את שטח הטרפז BCDK.

תשובה: 15



66. נתונים הגרפים של הפונקציות :

a:  $2x + y = 5$  ; b:  $3x + 2y = 3$

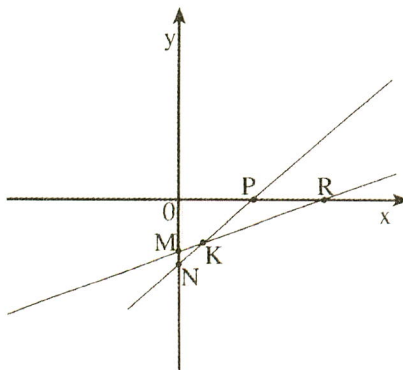
א. התאם ישר לכל פונקציה.

ב. חשב את שטח המרובע ABDC.

ג. מצא את משוואת הישר BC.

תשובה: א.  $a - BD$ ,  $b - AC$ , ב. 5.5,

ג.  $y = -5x + 5$



67. נתונות פונקציות ממעלה ראשונה :

a:  $y - 2x = -4$ , b:  $x - y = 3$

א. התאם ישר לכל פונקציה.

ב. חשב את שטח המשולשים

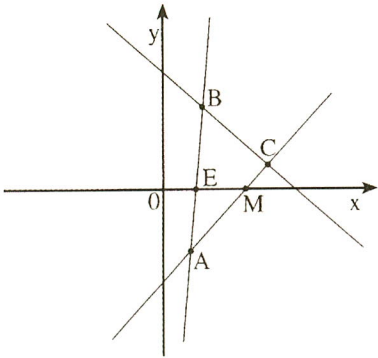
RPK ו-MKN

ג\*. חשב את שטח המרובע POMK

תשובה: א.  $a - NP$ ,  $b - MR$ ,

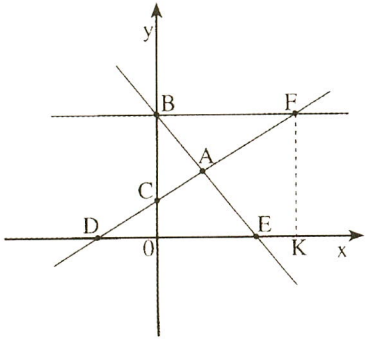
ב. 0.5 ו-1,

ג. 3.5



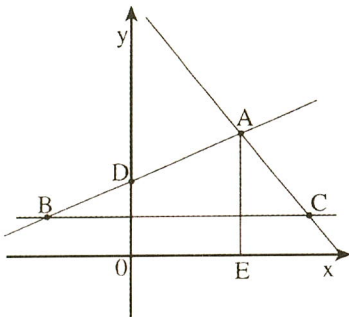
68. נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות:  
 $AB: y=4x-9$  ;  $BC: y=-x+11$  ;  $AC: y=x-7$   
 א. מצא את שעורי הנקודות A, B, C.  
 ב. חשב את שטח המרובע EBCM.  
 ג. לאילו ערכי x יהיו ערכי הפונקציה AB קטנים מערכי הפונקציה BC

תשובה: א.  $A(\frac{2}{3}, -6\frac{1}{3})$ ,  $B(4,7)$ ,  $C(9,2)$   
 ב.  $26\frac{5}{8}$   
 ג.  $x < 4$



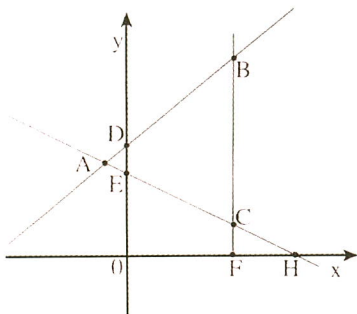
69. נתונים הגרפים של שתי פונקציות:  
 $BE: y=-3x+6$ ,  $AC: y=2x+1$   
 א. מצא את שעורי הנקודות A, B, C, D, E.  
 ב. דרך הנקודה B העבירו ישר מקביל לציר ה-x, החותך את AC ב-F.  
 ג. חשב את שטח המרובע AFKE.

תשובה: א.  $A(1,3)$ ,  $B(0,6)$ ,  $C(0,1)$ ,  $D(-0.5,0)$ ,  $E(2,0)$   
 ב. 3, ג. 5.25



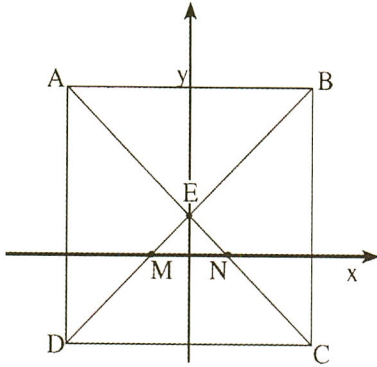
70. נתונים הגרפים של הפונקציות:  
 $AB: y = \frac{1}{3}x + 3$ ,  $AC: y = -x + 11$ ,  
 $BC: y = 2$   
 א. מצא את שעורי הנקודות A, B, C.  
 ב. חשב את שטח המשולש BAC.  
 ג. מנקודה A מורידים אנך לציר x החותך אותו בנקודה E. חשב את שטח הטרפז ODEA.

תשובה: א.  $A(6,5)$ ,  $B(-3,2)$ ,  $C(9,2)$  ג. 18 ג. 24



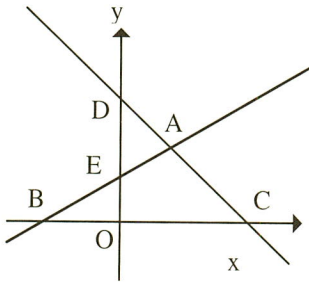
71. נתונים גרפים של הפונקציות הבאות:  
 $AB: y = x + 6$ ,  $AC: y = -\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$   
 $BC: x = 5$   
 א. מצא את שעורי נקודות A, B, C.  
 ב. חשב את שטח המשולש CFH.  
 ג. חשב את שטח הטרפז BCED

תשובה: א.  $A(-1,5)$ ,  $B(5,11)$ ,  $C(5,2)$  ג. 26.25



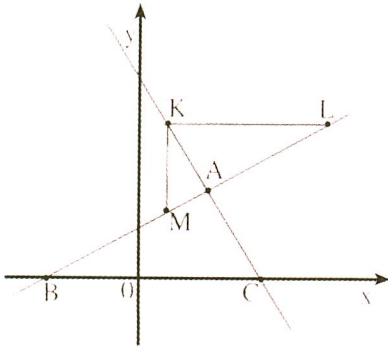
72. נתון ריבוע ABCD, שצלעותיו מקבילות לצירים. משוואות האלכסונים הן:  $BD: y=x+1$ ,  $AC: y=-x+1$ .  
 א. מה הם שעורי נקודת החיתוך של האלכסונים.  
 ב. אם שעור ה-  $x$  של קודקד A הוא 3-, חשב את שעור ה-  $y$  שלו, ומצא בעזרת סימטריה את שעורי הקודקדים A,B,C,D.

תשובה: א.  $E(0,1)$   
 ב.  $A(-3,4)$ ,  $B(3,4)$ ,  $C(3,-2)$ ,  $D(-3,-2)$ .



73. נתונים הגרפים של הפונקציות:  
 א.  $AB: Y = \frac{1}{2}x + 2$ ,  $AD: y = -3x + 9$ . מצא את שעורי הנקודה A ואת שטח המשולש ADE.  
 ב. באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה  $Y$  גדולים מערכי הפונקציה  $y$ .  
 ג\*. מצא את שטח המרובע OEAC.

תשובה: א.  $A(2,3)$ , ב.  $x > 2$ . ג. 6.5

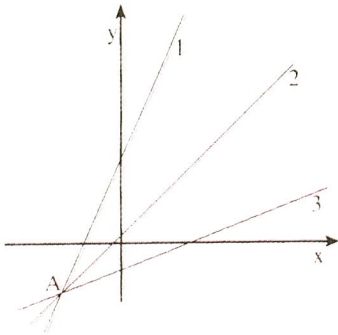


- 74\*. התייחס לשני הישרים שבשאלה הקודמת. דרך נקודה  $K(1,6)$  שעל הישר AD מעבירים מקביל לציר ה-  $x$ , החותך את הישר AB בנקודה L. חשב את שעורי הנקודה L ואת אורך הקטע KL. ב. דרך אותה נקודה K, הורידו אנך לציר ה-  $x$  החותך את הישר AB בנקודה M. מצא את אורך הקטע KM.

תשובה: א.  $L(8,6)$ , ב.  $KL=7$ ,  $KM=3.5$

75\*. נתונות שלוש פונקציות:

a:  $y = 4x + 10$ , b:  $y = \frac{1}{3}x - 1$ , c:  $y = x + 1$

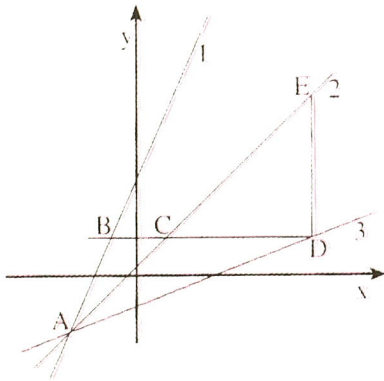


- א. קבע מהו הגרף של כל אחת מהפונקציות.
- ב. הראה כי כל שלושת הישרים נחתכים בנקודה אחת (A), ומצא את שעוריה.
- ג. באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה c גדולים מערכי הפונקציה b.
- ד. באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה a קטנים מערכי c?

תשובה: א.  $a-1, b-3, c-2$ . ב.  $A(-3, -2)$ . ג.  $x > -3$ . ד.  $x < -3$

76\*. נתייחס לנתוני השאלה הקודמת.

דרך נקודה  $B(-2, 2)$ , שעל הישר 1 העבירו ישר המקביל לציר x, והחותך את הישרים 2, ו-3 בנקודות C, D בהתאמה.



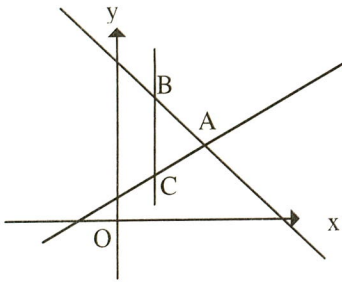
מנקודה D מעלים אנך לציר ה-x, החותך את הישר 2 בנקודה E. א. מצא את שעורי הנקודות C, D, E. ב. חשב את שטח המשולש ADE.

תשובה: א.  $C(1, 2), D(9, 2), E(9, 10)$ . ב. 48

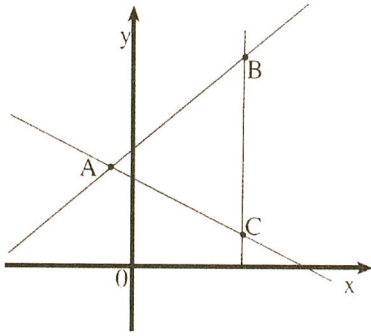
77. נתונים הגרפים של הפונקציות:

AC:  $y = \frac{1}{3}x + 4$ , AB:  $Y = -x + 12$

- א. חשב לאילו ערכי x יתקיים  $Y < y$ .
- ב. BC מקביל לציר ה-y,  $BC = 4$ , חשב את שעורי הנקודות C, B.



תשובה: א.  $x > 6$ . ב.  $C(3, 5), B(3, 9)$

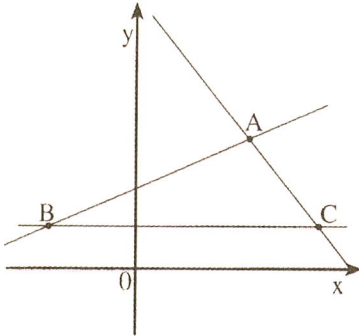


78. נתונים גרפים של הפונקציות הבאות:

$$a: Y = x + 6, \quad b: y = -\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$$

- א. מצא באיזה תחום מתקיים  $Y > y$ .  
 ב. BC מקביל לציר ה- $y$ ,  $BC=4.5$ .  
 חשב את שעורי הנקודות C, B.  
 ג. אם לא היה נתון שרטוט כמה פתרונות לבעיה מצא אותם.

תשובה: א.  $x > -1$ . ב.  $B(2,8), C(2,3.5)$ .  
 ג. היה פתרון נוסף  $(-4,2), (-4,6.5)$ .



79\*. נתונים הגרפים של הפונקציות:

$$AB: y = \frac{1}{3}x + 3, \quad AC: y = -x + 11$$

- א. BC מקביל לציר ה- $x$ ,  $BC=12$ .  
 חשב את שעורי הנקודות C, B.  
 ב. אם לא היה נתון שרטוט כמה פתרונות לבעיה? מצא אותם.

תשובה: א.  $B(-3,2), C(9,2)$ .  
 ב. היה פתרון נוסף  $(15,8), (3,8)$ .

### מקבילים

80. אלו מבין זוגות הישרים הבאים מקבילים?

- א.  $y=3+4x, y=4x-5$     ב.  $x+y=7, y=5-x$     ג.  $y=-0.75x+1, 3x+4y=0$   
 ד.  $y=-0.8x, 4x-5y=1$     ה.  $x=-1, x+9=0$     ו.  $y-5x=7, x+4=0$

תשובה: א, ב, ג, ה.

81. מצא משוואת ישר העובר דרך הנקודה הנתונה ושיפועו נתון:

- א.  $(1,4), 2$     ב.  $(-3,0), -5$     ג.  $(-2,1), 0.3$     ד.  $(0,-2), -0.5$

תשובה: א.  $y=2x+2$     ב.  $y=-5x-15$     ג.  $10y-3x-16=0$     ד.  $x+2y+4=0$

82. מצא משוואת ישר העובר דרך הנקודה A ומקביל לישר העובר דרך הנקודות B

ו- C:

- א.  $C(3,3); B(1,1); A(2,5)$     ב.  $C(4,7); B(2,3); A(-1,0)$   
 ג.  $C(1,4); B(4,1); A(-2,3)$     ד.  $C(-2,0); B(4,0); A(-5,2)$   
 ה.  $C(2,-1); B(2,3); A(1,-3)$     ו.  $C(1,6); B(3,2); A(0,0)$

תשובה: א.  $y=x+3$     ב.  $y=2x+2$     ג.  $x+y=1$     ד.  $y=2$     ה.  $x=1$     ו.  $y=-2x$

83. נתונים שלושה קודקדים של מקבילית ABCD : A(1,4) ; B(0,1) ; C(2,-1) .  
 א. מצא את משוואת הצלעות AD ו-CD .  
 ב. מצא את שעורי הקודקד D .

תשובה: א. AD:  $y=-x+5$  ; CD:  $y=3x-7$  . ב. D(3,2)

84. מצא משוואת ישר המקביל לישר הנתון, ועובר דרך הנקודה הרשומה:  
 א.  $y=3x-1$  , (1,5) . ב.  $2x+3y=5$  , (0,3) . ג.  $3x=4y$  , (3,0)  
 ד.  $x+3=0$  , (1,2) . ה.  $y=7$  , (5,-4) . ו.  $x=0$  , (-8,2) .

תשובה: א.  $y=3x+2$  . ב.  $2x+3y=9$  . ג.  $4y=3x-9$  . ד.  $x=1$  . ה.  $y+4=0$  . ו.  $x+8=0$

## סעיף 8

### ישרים מאונכים

85. קבע אלו מבין זוגות הישרים, שבכל סעיף, מאונכים זה לזה:  
 א.  $y=x$  ;  $y=-x$  . ב.  $2x-y=5$  ;  $y+0.5x=0$  .  
 ג.  $y=3x+1$  ;  $y=-3x+4$  . ד.  $2x-4y=7$  ;  $y+2x=1$  .  
 ה.  $3y+2x=5$  ;  $4y+6x=1$  . ו.  $y=x-1$  ;  $x=3$  .  
 ז.  $y=2$  ;  $x=-5$  . ח.  $x=0$  ;  $y=1$  .  
 ט.  $x=-3$  ;  $x=0$  . י.  $x=0$  ;  $y=0$  .

תשובה: א, ב, ד, ז, ח, י.

86. מצא משוואת ישר, העובר דרך הנקודה הנתונה ומאונך לישר ששיפועו נתון:  
 א. (1,4) , 2 . ב. (-3,0) , -5 . ג. (-2,1) , 0.3 . ד. (0,-2) , -0.5

תשובה: א.  $x+2y=9$  . ב.  $5y-x=3$  . ג.  $10x+3y+17=0$  . ד.  $y=2x-2$

87. מצא משוואת ישר, המאונך לישר הנתון (בכל סעיף), והעובר דרך הנקודה הרשומה לידו.

- א. (1,2) ,  $y=2x+3$  . ב. (-1,1) ,  $y=-3x-5$  . ג. (0,-4) ,  $2x-y=1$  .  
 ד. (3,0) ,  $4x+6y=3$  . ה. (-2,7) ,  $x+5=0$  . ו. (-3,1) ,  $y-2=0$  .

תשובה: א.  $x+2y=5$  . ב.  $3y-x=4$  . ג.  $x+2y=-8$  . ד.  $y=1.5x-4.5$  . ה.  $y=7$  . ו.  $x+3=0$

88. קודקדי המשולש הם: A(6,2) ; B(4,1) ; C(2,5) . שרטט את המשולש, והוכח שהוא ישר זווית. מצא את משוואת הגובה ליתר.

תשובה:  $3y-4x+13=0$

89. במשולש ישר זווית ABC ( $\angle C=90^\circ$ ). נתון A(1,4) . משוואת BC :  $y=2x+3$  . מצא את משוואת AC .

תשובה:  $x+2y=9$  .

90. צלעות משולש ABC מונחות על הישרים הבאים:  
 א.  $BC: y=4-2x$ ;  $AB: y=x+1$ ;  $AC: x+2y=11$   
 ב.  $BC: y=5x$ ;  $AB: 3x+y=4$ ;  $AC: 3y=2x$   
 מצא את משוואת הגובה לצלע AC.

תשובה: א.  $y=2x$  ב.  $y=-1.5x+3.25$

91. קודקדי משולש ABC הם:  
 א.  $A(3,1)$ ,  $B(2,2)$ ,  $C(5,11)$  ב.  $A(4,-1)$ ,  $B(1,3)$ ,  $C(0.25,2)$   
 מצא את משוואת הגובה לצלע BC.

תשובה: א.  $3y+x=6$  ב.  $3y-4x+19=0$

**רוחק בין שתי נקודות, שעורי אמצע קטע.**

92. חשב את אורך הקטע MN, כאשר:  
 א.  $M(3,-1)$ ,  $N(7,-4)$  ב.  $M(4,3)$ ,  $N(-8,8)$  ג.  $M(5,-7)$ ,  $N(-4,5)$   
 ד.  $M(2,-3)$ ,  $N(1,-1)$  ה.  $M(9,-8)$ ,  $N(-7,4)$  ו.  $M(-7,-3)$ ,  $N(-5,-1)$

תשובה: א. 5 ב. 13 ג. 15 ד.  $\sqrt{5}$  ה. 20 ו.  $2\sqrt{2}$

93. מצא את אמצע הקטע MN בכל אחד מהמקרים, שבשאלה הקודמת.

תשובה: א.  $(5, -2.5)$  ב.  $(-2, 5.5)$  ג.  $(0.5, -1)$  ד.  $(1.5, -2)$  ה.  $(1, -2)$  ו.  $(-6, -2)$

94. קודקדי המשולש ABC הם:  $A(14,16)$ ;  $B(6,10)$ ;  $C(8,8)$ . הראה, כי המשולש הוא שווה שוקיים וחשב את אורך הבסיס.

תשובה:  $2\sqrt{2}$

95. מצא את משוואת התיכון לצלע BC של המשולש ABC, כאשר:  
 $C(-3,3)$ ,  $B(3,7)$ ,  $A(1,2)$   
 תשובה:  $y=-3x+5$

96. נתונים שעורי קצות קטע. מצא את האנך האמצעי שלו:  
 א.  $(-2,3)$ ,  $(4,1)$  ב.  $(-0.5,2)$ ,  $(-3.5,5)$  ג.  $(2,-2)$ ,  $(0,2)$   
 ד.  $(-7,0)$ ,  $(-3,4)$

תשובה: א.  $y=3x-1$  ב.  $2y-2x=11$  ג.  $y=0.5(x-1)$  ד.  $x+y+3=0$

97. נתונים שלושה קודקדים של המעוין ABCD:  $A(3,5)$ ;  $B(0,1)$ ;  $C(4,4)$ .  
 א. חשב את אורך הצלע ואת שעורי הקודקד D.  
 ב. מצא משוואת ישר העובר דרך אמצע הצלע BC ומקביל לאלכסון BD.

תשובה: א.  $(7,8)$ , 5 ב.  $y=x+0.5$

98. נתונים קודקדי משולש:  $A(4,1)$ ;  $B(2,5)$ ;  $C(6,2)$ . הראה, כי המשולש הוא ישר-זווית. מה אורך היתר?

תשובה: 5

99\*. נתונות שתי נקודות  $A(1,0)$ ;  $B(0,1)$ . מצא נקודה  $C$ , כך שהמשולש  $ABC$  יהיה שווה צלעות.

תשובה:  $C(1.37, 1.37)$  או  $C(-0.37, -0.37)$ .

100. סמן 4 נקודות במערכת צירים:  $A(-3,4)$ ;  $B(5,4)$ ;  $C(5,-2)$ ;  $D(-3,-2)$ .  
חבר את הנקודות למרובע  $ABCD$ . וקבע איזה מרובע מתקבל. מצא את:  
א. נקודת מפגש האלכסונים.  
ב. אורכי האלכסונים.

תשובה: המרובע הוא מלבן. א.  $(1,1)$ . ב.  $AC=BD=10$ .

101. הנקודות  $A(1,7)$ ;  $B(-3,-2)$ ;  $C(5,-2)$  הן קודקדים של משולש שווה שוקיים.  
שרטט את המשולש במערכת צירים ומצא את:  
א. משואת הגובה לצלע  $AB$ .  
ב. אורך התיכון לצלע  $AB$ .

תשובה: א.  $9y+4x=2$ . ב. 7.5

102. במערכת צירים נתונות 3 נקודות, המהוות קודקדים של ריבוע.  
הנקודות הן:  $A(-3,1)$ ;  $B(5,1)$ ;  $C(5,9)$ . שרטט ומצא את:  
א. נקודת מפגש האלכסונים  $K$ , ובאמצעותה את שעורי הקודקד הרביעי  $D$ .  
ב. אורך אלכסון.

תשובה: א.  $K(1,5)$ ,  $D(-3,9)$ . ב.  $8\sqrt{2}$

103. שרטט במערכת צירים משולש, שקודקדיו הם:  $A(-4,2)$ ;  $B(8,-3)$ ;  $C(8,2)$ .  
א. מצא את משואת הצלע  $AB$ .  
ב. מצא את אורך הצלע  $AB$ .  
ג. מצא את משואת הגובה לצלע  $AB$ .

תשובה: א.  $12y+5x=4$ . ב.  $AB=13$ . ג.  $12x-5y=86$ .

104.  $AB$  ו- $DC$  הן צלעות נגדיות במקבילית  $ABCD$  והן מקבילות לציר  $x$ .  
נתון:  $A(-3,3)$ ,  $B(7,3)$ ,  $D(-5,-2)$ . שרטט אותה ומצא את:  
א. משואת הישר העובר דרך אמצעי הצלעות  $AB$  ו- $AD$ .  
ב. נקודת מפגש האלכסונים.

תשובה: א.  $12y-5x=26$ . ב.  $(1,0.5)$

- 105 שרטט במערכת צירים את המשולש שקודקדיו:  $A(2,5)$ ,  $B(5,7)$ ,  $C(5,1)$
- מצא את אורך הצלע AC.
  - מצא את משוואת התיכון לצלע BC.
  - חשב את שטח המשולש.

תשובה: א. 5, ב.  $x+3y=17$  ג. 9

### המעגל

106. נתונה משוואת המעגל. מצא את הרדיוס שלו:

א.  $x^2 + y^2 = 36$  ב.  $x^2 + y^2 = 225$  ג.  $x^2 + y^2 = 3.24$

ד.  $x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$  ה.  $x^2 + y^2 = 7$  ו.  $x^2 + y^2 = 32$

תשובה: א. 6 ב. 15 ג. 1.8 ד.  $\frac{5}{3}$  ה.  $\sqrt{7}$  ו.  $4\sqrt{2}$

107. רשום את משוואת המעגל, שמרכזו בראשית והרדיוס שלו:

א. 6 ב. 1 ג. 2.5 ד.  $\frac{1}{3}$

תשובה: א.  $x^2 + y^2 = 36$  ב.  $x^2 + y^2 = 1$  ג.  $x^2 + y^2 = 6.25$  ד.  $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

108. מעגל שמרכזו בראשית, עובר דרך הנקודה A. מצא את הרדיוס שלו כאשר:

א.  $A(-3,4)$  ב.  $A(0,-1)$  ג.  $A(-5,12)$  ד.  $A(6,0)$  ה.  $A(2,-1)$  ו.  $A(5,-5)$

תשובה: א. 5 ב. 1 ג. 13 ד. 6 ה.  $\sqrt{5}$  ו.  $5\sqrt{2}$

109. שרטט בעזרת מחוגה את המעגל:  $x^2 + y^2 = 25$  (קח שתי משבצות כיחידה) באותה מערכת צירים. סמן את הנקודות:  $A(1,3)$ ;  $B(-3,4)$ ;  $C(-6,1)$ . מה מרחק כל נקודה מהראשית, וכיצד זה מסביר את מיקומה ביחס למעגל?

תשובה: המרחק - d :  $d_A = \sqrt{10} < 5$ , בתוך המעגל,  $d_B = 5$ , על המעגל  
 $d_C = \sqrt{37} > 5$ , מחוץ למעגל.

110. הישר  $x=6$  משיק למעגל (יש לו רק נקודה אחת משותפת עם המעגל) שמרכזו בראשית. העזר בשרטוט וקבע מהי משוואת המעגל.

תשובה:  $x^2 + y^2 = 36$

111. נתון מעגל M, והרדיוס שלו. שרטט את המעגל, ומצא את המשוואה שלו.

א.  $M(0,5)$ , 4 ב.  $M(3,-1)$ , 5 ג.  $M(-3,0)$ , 3

בכל סעיף מצא נקודה על היקף המעגל, ובדוק, אם שעוריה מקיימים את משוואת המעגל שמצאת.

א.  $x^2 + (y-5)^2 = 16$  ב.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$

ג.  $(x+3)^2 + y^2 = 9$

112. נתונה משוואת מעגל. ציין את שעורי מרכזו ואת הרדיוס שלו.

- |                              |    |                              |    |
|------------------------------|----|------------------------------|----|
| $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$ | ב. | $x^2 + (y + 5)^2 = 9$        | א. |
| $(x + 2.5)^2 + y^2 = 12.25$  | ד. | $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ | ב. |
| $x^2 + y^2 + 8y = 0$         | ו. | $x^2 - 4x + y^2 = 0$         | ג. |
| $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 24$   | ח. | $x^2 - 6x + y^2 - 2y = 0$    | ד. |

תשובה: א.  $(2, -3)$ , 5 ב.  $(-4, 1)$ , 4 ג.  $(0, -5)$ , 3 ד.  $(-2.5, 0)$ , 3.5 ה.  $(2, 0)$ , 2  
ו.  $(0, -4)$ , 4 ז.  $(3, 1)$ ,  $\sqrt{10}$  ח.  $(4, -3)$ , 7

113\*. הישר  $y = -7$  משיק למעגל, שמרכזו בראשית. מהי משוואת המעגל? העזר בשרטוט.

תשובה:  $x^2 + y^2 = 49$

114. שרטט מעגל, שמרכזו בנקודה  $(2, 3)$  והוא עובר דרך הנקודה  $(2, -2)$ . מצא את הרדיוס שלו בעזרת השרטוט, וגם ע"י שימוש בנוסחת המעגל.  
תשובה: 5

115. קודקדי ריבוע ABCD הם:  $A(1, 0)$ ;  $B(5, 0)$ ;  $C(5, 4)$ ;  $D$ .  
א. מצא את שעורי הקודקד D.

ב. מצא את משוואת המעגל החסום בריבוע זה.

תשובה: א.  $D(1, 4)$  ב.  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

116. שרטט מעגל, שמרכזו בנקודה  $(0, 5)$  והוא משיק לציר ה-x. מה משוואת המעגל?

תשובה:  $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

117. הקטע שקצותיו:  $A(1, 0)$ ;  $B(7, 0)$  משמש קוטר למעגל.  
א. מהו מרכז המעגל ומהו הרדיוס?

ב. אם נשנה את שעורי קצות הקטע:  $A(1, 6)$ ;  $B(7, 6)$ , מה ישתנה?

תשובה: א.  $(4, 0)$ , 3 ב.  $(4, 6)$ , 3.

118. הקטע שקצותיו  $A(-9, 10)$ ;  $B(7, -2)$  הוא קוטר של המעגל.  
מצא את משוואת המעגל.

תשובה:  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 100$

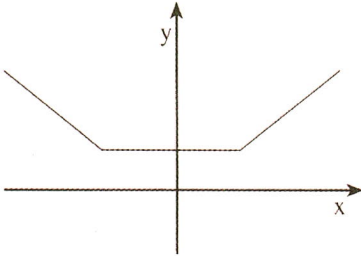
**סעיפים 9-10**

119. שרטט את גרף הפונקציה הבאה המוגדרת בתחום מפוצל:

$$F(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{כאשר } x \geq 0 \\ 2 & \text{כאשר } x < 0 \end{cases}$$

מצא בעזרת הגרף לאיזה ערך של  $x$  יהיה ערך הפונקציה:  
 א. שווה ל-4      ב. גדול מ-3.

תשובה: א.  $x=2$       ב.  $x > 1$ .

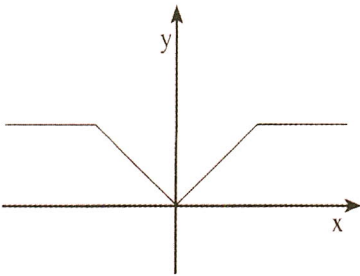


120. נתונה הפונקציה:

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{כאשר } x < -2 \\ 2 & \text{כאשר } -2 \leq x \leq 2 \\ x & \text{כאשר } x > 2 \end{cases}$$

א. מצא עבור אלו ערכי  $x$  יהיה ערך הפונקציה 5.  
 ב. מצא עבור אלו ערכי  $x$  יהיה ערך הפונקציה 1.  
 ג. מצא את נקודות החיתוך של  $F(x)$  עם הפונקציה  $3y-x=6$ .

תשובה: א.  $x = \pm 5$       ב.  $\emptyset$       ג.  $(0, 2)$ ,  $(3, 3)$ .



121. נתונה הפונקציה:

$$F(x) = \begin{cases} 3 & \text{כאשר } x \leq -3 \\ -x & \text{כאשר } -3 < x \leq 0 \\ x & \text{כאשר } 0 < x \leq 3 \\ 3 & \text{כאשר } x > 3 \end{cases}$$

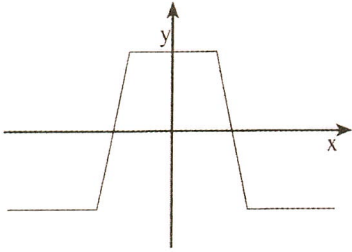
א. לאלו ערכי  $x$  יהיה ערך הפונקציה שווה ל-4?  
 ב. פתור את המשוואה  $F(x)=y$  כאשר

$$y = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$$

תשובה: א.  $\emptyset$       ב.  $(5, 3)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(-1, 1)$ .

122. נתונה הפונקציה:

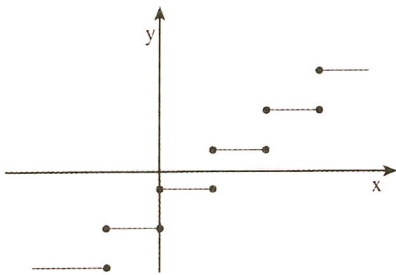
$$F(x) = \begin{cases} -4 & \text{כאשר } x \leq -4 \text{ או } x \geq 4 \\ 3x + 8 & \text{כאשר } -4 < x < -2 \\ 2 & \text{כאשר } -2 \leq x \leq 2 \\ -3x + 8 & \text{כאשר } 2 < x < 4 \end{cases}$$



- א. לאלו ערכי  $x$  יהיה ערך הפונקציה שווה ל-1?  
 ב. עבור אילו ערכי  $x$  יהיו ערכי הפונקציה גדולים מ-3?  
 ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה הנ"ל עם הישר  $9y - 11x = 24$

תשובה: א. 3, -3 ב.  $\emptyset$  ג.  $(-\frac{6}{11}, 2)$ ,  $(-3, -1)$ ,  $(-\frac{5}{11}, -4)$

123. נתונה הפונקציה הבאה (פונקציה מדרגות):



$$y = \begin{cases} -5 & x < -2 & \text{כאשר} \\ -3 & -2 < x \leq 0 & \text{כאשר} \\ -1 & 0 < x \leq 2 & \text{כאשר} \\ 1 & 2 < x \leq 4 & \text{כאשר} \\ 3 & 4 < x \leq 6 & \text{כאשר} \\ 5 & x > 6 & \text{כאשר} \end{cases}$$

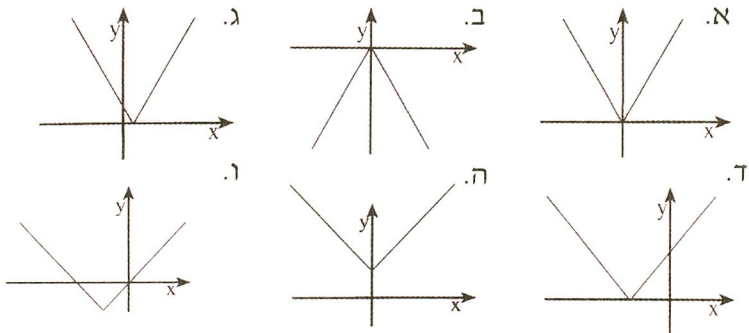
- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = 3x$ .  
 ב. כמה "מדרגות" חותך הישר  $y = x - 2$ ?

תשובה: א.  $(-1, -3)$  ב. אחת

124. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות בעזרת לוח ערכים:

- א.  $y = |x|$       ב.  $y = -|x|$       ג.  $y = |2x - 2|$   
 ד.  $y = |x + 3|$       ה.  $y = |x| + 3$       ו.  $y = |x + 2| - 2$

תשובה:



125. כתוב את הפונקציות שבתרגיל הקודם כפונקציה בתחום מפוצל.

תשובה:

$$y = \begin{cases} -x & \text{כאשר } x \geq 0 \\ x & \text{כאשר } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad y = \begin{cases} x & \text{כאשר } x \geq 0 \\ -x & \text{כאשר } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$y = \begin{cases} x+3 & \text{כאשר } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{כאשר } x \leq -3 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad y = \begin{cases} 2x-2 & \text{כאשר } x \geq 1 \\ -2x+2 & \text{כאשר } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$y = \begin{cases} x & \text{כאשר } x \geq -2 \\ -x-4 & \text{כאשר } x \leq -2 \end{cases} \quad \text{ו.} \quad y = \begin{cases} x+3 & \text{כאשר } x \geq 0 \\ -x+3 & \text{כאשר } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

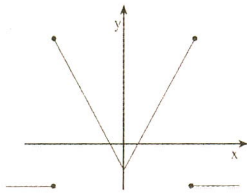
126\*. נתונה הפונקציה:

$$y = \begin{cases} |2x| - 2 & -4 < x < 4 \\ -4 & x \leq -4 \text{ או } x \geq 4 \end{cases}$$

א. שרטט את הגרף שלה.

ב. בטא אותה כפונקציה עם תחום מפוצל, ללא ערך מוחלט.

תשובה:



$$F(x) = \begin{cases} 2x-2 & 0 < x < 4 \\ -2x-2 & -4 < x < 0 \\ -4 & x \leq -4 \text{ או } x \geq 4 \end{cases}$$

127. פתור את המערכות הבאות בדרך גרפית:

$$\text{(א)} \quad \begin{cases} y = |x+3| \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{(ב)} \quad \begin{cases} y = |x| + 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{(ג)} \quad \begin{cases} y = |x-3| \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \quad \text{(ד)} \quad \begin{cases} y = |x| \\ y = |x+3| \end{cases}$$

תשובה:

א.  $(-1, 2)$ ,  $(-5, 2)$  ב.  $(2, 3)$ ,  $(-2, 3)$  ג.  $(0, 3)$ ,  $(4, 1)$  ד.  $(-1.5, 1.5)$

### פתרון בעיות בדרך גרפית

128. מכונית יוצאת בשעה 10:00 מת"א ונוסעת צפונה במהירות ממוצעת של 50

קמ"ש.

א. שרטט גרף המתאר את מרחקה מת"א כפונקציה של השעה. קח קנה מידה מתאים.

ב. מצא בעזרת הגרף באיזה מרחק מת"א, היא נמצאת בשעה 12:00.

ג. רשום תבנית פסוק, המבטאת את המרחק מת"א כפונקציה של

1. הזמן, שחלף משעה 10:00.

2. של השעה.

תשובה: ב. 100 ק"מ (1)  $y=50x$  (2)  $y=50(x-10)$

129. אדם נמצא במרחק 60 ק"מ מביתו. הוא יוצא בשעה 8:00 לכיוון ביתו במהירות 40 קמ"ש.

א. שרטט גרף המתאר את מרחק האיש מביתו כפונקציה של השעה.

ב. מצא באיזו שעה הוא נמצא במרחק 10 ק"מ מביתו.

ג. רשום תבנית פסוק המבטאת את המרחק מהבית, כפונקציה של:

1. הזמן שחלף משעה 8:00

2. כפונקציה של השעה

תשובה: ב. בשעה 9:15 ג. (1)  $y=60-40x$  (2)  $y=60-40(x-8)$

130. אדם נמצא בשעה 7:00 במקום שהוא 5 ק"מ מצפון ל-A. הוא יוצא צפונה

ובשעה 8:30 הוא נמצא במרחק 35 ק"מ מצפון ל-A.

א. שרטט גרף המתאר את המרחק מ-A כפונקציה של השעה, ומצא בעזרתו

את המהירות בה נסע.

ב. רשום תבנית פסוק המבטאת את מרחקו מ-A כפונקציה של השעה.

תשובה: א. 20 קמ"ש ב.  $y=5+20(x-7)$

131. אורכו של קפיץ 8 ס"מ. כאשר תלו בקצהו משקולת של 20 ג', היה אורכו 28

ס"מ.

א. שרטט את גרף הפונקציה המתארת את אורך הקפיץ כפונקציה של

המשקולת התלויה בקצהו, ומצא בעזרתו גודל משקולת אחרת שתלו עליו,

אם אורך הקפיץ הוא 33 ס"מ.

ב. רשום תבנית פסוק המבטאת את אורך הקפיץ כפונקציה של המשקולת.

תשובה: א. 25 ג' ב.  $y=8+x$

132. רוכב אופניים יוצא בשעה 10:00 מ-A מזרחה במהירות של 20 קמ"ש. בשעה

11:15 הוא עוצר לחצי שעה וממשיך את נסיעתו במהירות 10 קמ"ש.

א. שרטט גרף המתאר את מרחק הרוכב האופניים מ-A כפונקציה של השעה.

ב. רוכב אופניים שני, יוצא בשעה 11:00 מ-A מזרחה, והגרף המתאר את

מרחקו מ-A כפונקציה של השעה הוא ישר המקביל לקטע הראשון בגרף

שבסעיף א'.

מצא בעזרת הגרף את מהירות הרוכב השני.

ג. באיזו שעה נפגשו השניים ובאיזה מרחק מ-A?

ד. רשום את הקשר בין מרחק הרוכב האופניים הראשון מ-A לזמן שחלף

משעה 10:00 כפונקציה בתחום מפוצל.

תשובה: ב. 20 קמ"ש ג. בשעה 12:45, 35 ק"מ

$$f(x) = \begin{cases} 20x & \text{כאשר } 0 \leq x \leq 1\frac{1}{4} \\ 25 & \text{כאשר } 1\frac{1}{4} \leq x \leq 1\frac{3}{4} \\ 10(x - 1\frac{3}{4}) + 25 & \text{כאשר } x \geq 1\frac{3}{4} \end{cases}$$

133. שני אנשים הולכים ברגל. הפונקציה של תנועת האחד היא  $y=3x$  ושל השני

$y=-4x+14$ . תאר את הגרפים של פונקציות אלה וקבע:

א. מה המשמעות של המקדמים 3 ו-(-4)?

- ב. מה המשמעות של האברים החופשיים 0 ו-14?  
ג. כעבור כמה שעות נפגשו השניים והיכן?

תשובה:

- א. הראשון נוסע ממקום A לכיוון B במהירות 3 קמ"ש. השני נוסע במהירות 4 קמ"ש בכיוון הפוך.  
ב. הראשון יוצא מ-A (מרחק 0 מ-A), השני נמצא במרחק 14 ק"מ מ-A.  
ג. כעבור שעתיים במרחק 6 ק"מ מ-A.

134. בבריכה אחת 130 מ"ק מים ובבריכה שניה 175 מ"ק מים. בשעה 17:00 החלו לרוקן את שתי הבריכות:

- מהראשונה הוציאו 25 מ"ק בשעה ומהשניה 40 מ"ק בשעה.  
א. שרטט גרפים של כמות המים שיש בכל בריכה כפונקציה של השעה, ורשום פונקציות מתאימות.  
ב. באיזו שעה יש בשתי הבריכות אותה כמות מים?

תשובה: א.  $y=130-25(x-5)$ ,  $y=175-40(x-5)$ . ב. בשעה 20:00

135. רוכב אופניים יוצא בשעה 12:00 בצהריים מנקודה A לכיוון נקודה B, הנמצאת במרחק 90 ק"מ מ-A. מהירותו 15 קמ"ש. אחרי שעתיים יוצאת מ-B ל-A מכונית שמהירותה 45 קמ"ש.

- א. שרטט גרפים המתארים את מרחקי רוכב האופניים והמכונית מנקודה A כפונקציה של הזמן.  
ב. העזר בגרף כדי למצוא באיזו שעה הם נפגשו, ובאיזה מרחק מ-A.  
ג. מה המרחק בין השניים בשעה 16:00?

תשובה: ב. בשעה 15:00, 45 ק"מ ג. 60 ק"מ

136. רוכב אופניים יוצא בשעה 7:00 מ-A לכיוון B המרוחקת 60 ק"מ מ-A. רוכב שני יוצא בשעה 8:48 מ-B ל-A. הרוכב הראשון פוגש את השני בשעה 10:00 וממשיך עד שהוא מגיע ל-B בשעה 12:00.

- שרטט את הגרפים המתארים את מרחקיהם מ-A כפונקציה של הזמן, ומצא:  
א. את המהירות של כל אחד.  
ב. מתי הגיע הרוכב השני ל-A?

תשובה: א. 12 קמ"ש, 20 קמ"ש ב. 11:48

137. רוכב אופניים יוצא בשעה 12:15 ליעד מסויים, במהירות 12 קמ"ש. אחרי זמן מסויים נפגעו האופניים מאבן והוא חזר על עקבותיו בהליכה במהירות 3 קמ"ש. הוא הגיע למקום שממנו יצא בשעה 16:00.

- שרטט את הגרף המתאר את מרחקו מנקודת המוצא כפונקציה של הזמן שחלף מאז השעה 12:15.  
מצא בעזרתו באיזו שעה החל לחזור הרוכב ברגל, ובאיזה מרחק היה מנקודת המוצא.

תשובה: 13:00, 9 ק"מ.

138. רוכב קטנוע יצא בשעה 8:00 ממקום A לכיוון B במהירות 20 קמ"ש. בשעה 10:00 הוא מגיע ל-B, מתעכב 20 דקות, ויוצא חזרה ל-A במהירות 24 קמ"ש. א. שרטט את הגרפים המתארים את המרחק מ-A, כפונקציה של הזמן שחלף משעה 8:00. ב. מצא בעזרת הגרף באיזו שעה הגיע חזרה ל-A. ג. תאר את הקשר בין מרחקו מ-A, לזמן שחלף משעה 8:00 כפונקציה בתחום מפוצל. תשובה: ב. בשעה 12:00

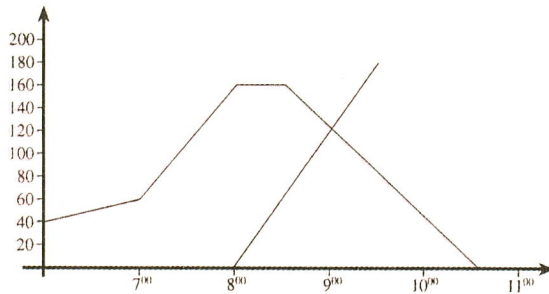
$$F(x) = \begin{cases} 20x & \text{כאשר } 0 \leq x \leq 2 \\ 40 & \text{כאשר } 2 \leq x \leq 2\frac{1}{3} \\ 40 - 24(x - 2\frac{1}{3}) & \text{כאשר } 2\frac{1}{3} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

139. מאותו מקום - A, שיצא רוכב הקטנוע שבבעיה הקודמת, יוצאת בשעה 10:00 מכונית, אף היא ל-B, במהירות 40 קמ"ש. הוסף את הגרף של דרך המכונית כפונקציה של הזמן שחלף משעה 8:00, באותה מערכת צירים, ומצא בעזרתו, באיזו שעה תפגוש המכונית את רוכב הקטנוע, ובאיזה מרחק מנקודת היציאה? תשובה: בשעה 10:45, 30 ק"מ

140. רוכב אופניים יוצא בשעה 8:00 מנקודה A לכיוון B במהירות 12 קמ"ש. בשעה 9:45 יוצא רוכב קטנוע באותו כיוון במהירות 18 קמ"ש. רוכב האופניים פוגש את רוכב הקטנוע וחוזר ל-A באותה מהירות. בדרך הוא פוגש הולך רגל (ההולך במהירות 6 קמ"ש), שאף הוא יצא מ-A ל-B בשעה 9:45. א. שרטט את הגרפים המתארים את מרחקי כל אחד כפונקציה של הזמן שעבר משעה 8:00. ב. באיזו שעה פגש רוכב האופניים את רוכב הקטנוע ובאיזה מרחק מ-A? ג. באיזו שעה פגש רוכב האופניים את הולך הרגל ובאיזה מרחק מ-A? תשובה: ב. בשעה 13:15, 63 ק"מ. ג. בשעה 15:35, 35 ק"מ.

141. מכונית יוצאת בשעה 7:00 מ-A לכיוון מסויים במהירות 60 קמ"ש. בשעה 7:15 יוצאת מאותו מקום מכונית שניה באותו כיוון במהירות 45 קמ"ש, ואחרי רבע שעה יוצאת מכונית שלישית באותו כיוון במהירות 75. שרטט את הגרפים של מרחקי המכוניות מ-A כפונקציה של הזמן שחלף משעה 7:00, והעזר בהם כדי למצוא: א. באיזו שעה ובאיזה מרחק מ-A פוגשת המכונית השלישית את הראשונה? ב. באיזו שעה תהיה המכונית השלישית באמצע המרחק בין הראשונה לשניה? ג. החל מאיזו שעה יגדל המרחק בין המכונית הראשונה לשניה ביותר מ-30 ק"מ? תשובה: א. בשעה 9:30, 150 ק"מ. ב. בשעה 8:25. ג. בשעה 8:15

142. הקו השבור שבשרטוט מתאר את גרף התנועה של מכונית A, והקו הישר את הגרף של מכונית B.



- א. רשום את הקשר בין המרחק של A מנקודת ההתחלה לבין הזמן שחלף מתחילת התנועה, כפונקציה בתחום מפוצל.  
 ב. מצא בעזרת הגרף:  
 (1) את מהירותו של A בכל אחד מארבעת הקטעים.  
 (2) את מהירותה של B ושעת המפגש של השניים.  
 ג. אם B יצאה מנקודה K, באיזה מרחק מ-K הם נפגשו?  
 ד. באיזה מרחק מ-K נמצאת המכונית A בהתחלה, ובאיזו שעה הגיעה ל-K?

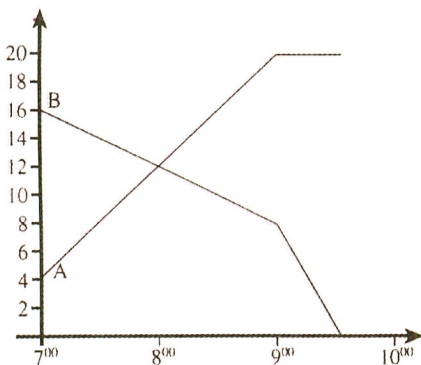
תשובה:

א.

$$F(x) = \begin{cases} 20x + 40 & 0 \leq x \leq 1 & \text{כאשר} \\ 100(x - 1) + 60 & 1 \leq x \leq 2 & \text{כאשר} \\ 160 & 2 \leq x \leq 2\frac{1}{2} & \text{כאשר} \\ 160 - 80(x - 2\frac{1}{2}) & 2\frac{1}{2} \leq x \leq 4\frac{1}{2} & \text{כאשר} \end{cases}$$

- ב. (1) 20 קמ"ש, 100 קמ"ש, 0, 80 קמ"ש  
 (2) 120 קמ"ש, 9:00  
 ג. 120 ק"מ  
 ד. 40 ק"מ, 10:30.

143. בשרטוט מתוארים הגרפים של כמות המים במ"ק בכל אחת משתי בריכות A ו-B, כפונקציה של השעה.



א. רשום עבור כל אחת מהבריכות, קשר בין כמות המים בבריכה לזמן שעבר משעה 7:00, כפונקציה בתחום מפוצל.

מצא בעזרת הגרף:

- ב. כמה מ"ק מים יש בבריכה A תחילה וכמה ב-B?  
 ג. באיזה קצב רוקנו את B עד השעה 9:00 ובאיזה קצב אחרי שעה זו?

- ד. באיזו שעה היתה בשתי הבריכות אותה כמות מים?  
ה. באיזו שעה התרוקנה B?  
ו\*. אם הגרף מראה שברכה A התמלאה, באיזו שעה היא התמלאה A ומה הקיבולת שלה?

תשובות:

$$F_B(x) = \begin{cases} 16-4x & \text{כאשר } 0 \leq x \leq 2 \\ 8-16(x-2) & \text{כאשר } 2 \leq x \leq 2\frac{1}{2} \end{cases} \quad F_A(x) = \begin{cases} 8x+4 & \text{כאשר } 0 \leq x \leq 2 \\ 20 & \text{כאשר } x \geq 2 \end{cases}$$

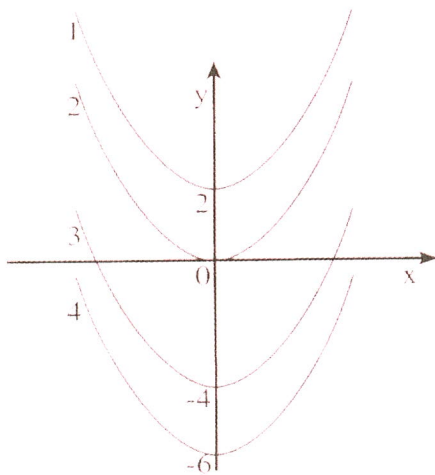
- ב. 4 מ"ק, 16 מ"ק ג. 4 מ"ק לשעה, 16 מ"ק לשעה ד. בשעה 8:00  
ה. בשעה 9:30 ו. בשעה 9:00, 20 מ"ק.

### סעיפים 11-13 - פרבולה

144. נתונות הפונקציות הבאות:

$$a: y = x^2; \quad b: y = x^2 + 2; \quad c: y = x^2 - 6$$

- א. מצא בשרטוט את הגרפים המתאימים לפונקציות אלו.  
ב. רשום פונקציה מתאימה לגרף הנותר.  
ג. מהו ציר הסימטריה של פרבולות אלה?



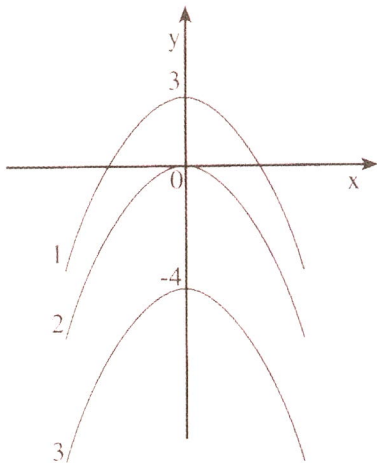
תשובה: א.  $a-2, b-1, c-4$  ב.  $y = x^2 - 4$  ג.  $x=0$

145. נתונות הפונקציות הבאות:

$$a: y = -x^2; \quad b: y = -x^2 + 3;$$

$$c: y = -x^2 - 4$$

- א. התאם גרפים לפונקציות.  
ב. מהו ציר הסימטריה של הפרבולות?  
ג. מהו קודקד הפרבולה 3?



תשובה: א.  $a-2, b-1, c-3$

ב.  $x=0$

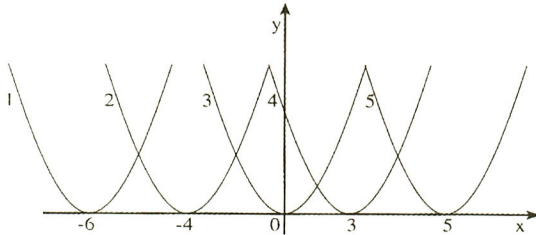
ג. נקודת מקסימום (0, -4).

146. מצא בשרטוט גרפים המתאימים לפונקציות :

a:  $y = x^2$  ; b:  $y = (x - 3)^2$  ; c:  $y = (x + 4)^2$

ב. רשום משוואה מתאימה לגרף 5. מהו הקודקד?

ג. רשום משוואה מתאימה לגרף 1. מהו ציר הסימטריה שלה?



תשובה: א. a-3, b-4, c-2. ב.  $(5,0)$ ,  $y = (x - 5)^2$ . ג.  $x = -6$ ,  $y = (x + 6)^2$

147. מצא בשרטוט גרפים המתאימים לפונקציות :

a:  $y = (x - 4)^2 - 3$  ;

b:  $y = (x + 6)^2 - 2$  ;

c:  $y = x^2 - 4x + 5$

ב. רשום משוואה לגרף 1.

מה ציר הסימטריה שלו?

ג. מהו ציר הסימטריה

של גרף 4?

ד. מהו הקודקד של גרף

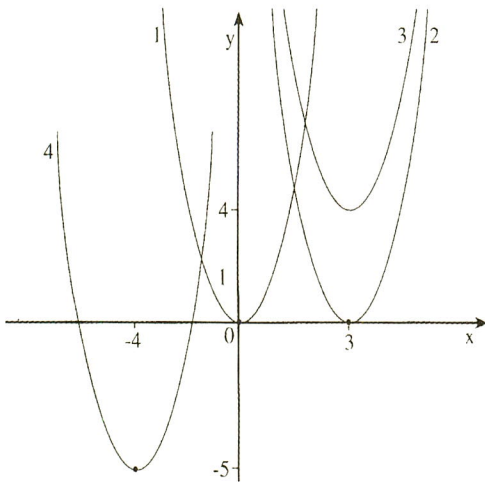
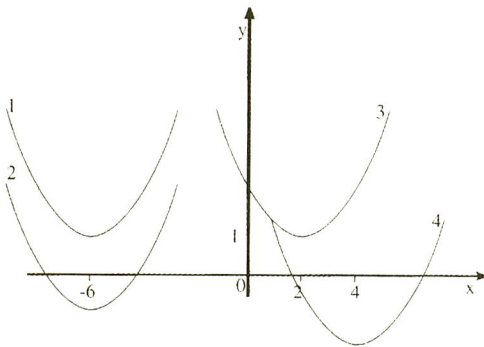
הפרבולה שהפונקציה

שלה c?

תשובה: א. a-4, b-2, c-3.

ב.  $x = -6$ ,  $y = (x + 6)^2 + 1$

ג.  $x = 4$ ,  $(2,1)$



148. התייחס לפרבולות שבשרטוט.

הפונקציה של גרף 1 היא:  $y = 2x^2$ .

א. העזר בנתונים שבשרטוט,

ורשום את משוואת

הפרבולות האחרות.

ב. מהו ציר הסימטריה של

פרבולה 3?

ג. מהו הקודקד של פרבולה 4?

תשובה: א.  $y = 2(x - 3)^2 + 2$ ,

3:  $y = 2(x - 3)^2 + 4$ , 4:  $y = 2(x + 4)^2 - 5$ ,

ב.  $x = 3$ . ג.  $(-4, -5)$ .

149. איזה שינוי עובר גרף הפונקציה  $y = x^2$ , אם הפונקציה המתאימה לגרף שאחרי השינוי היא:

- א.  $y = x^2 + 4$       ב.  $y = x^2 - 5$       ג.  $y = (x - 7)^2$   
 ד.  $y = (x + 3)^2 + 1$       ה.  $y = x^2 - 6x + 5$       ו.  $y = -x^2$   
 ז.  $y = -x^2 + 2$

**תשובה:** א. הזזה של 4 מידות אנכית למעלה. ב. הזזה של 5 יחידות אנכית למטה. ג. הזזה של 7 יח' אופקית ימינה. ד. הזזה של 3 יח' אופקית שמאלה ויחידה אחת אנכית למעלה. ה. הזזה של 3 יח' אופקית ימינה ו-4 יח' אנכית למטה. ו. שיקוף-תמונה סימטרית ביחס לציר ה-x. ז. שיקוף ביחס לציר ה-x והזזה 2 יח' אנכית למעלה.

150. חשב את שעורי הקודקד של הפונקציות הבאות. הרכב לוח ערכים מתאים, ושרטט את הפרבולה. מהו ציר הסימטריה של כל אחת?

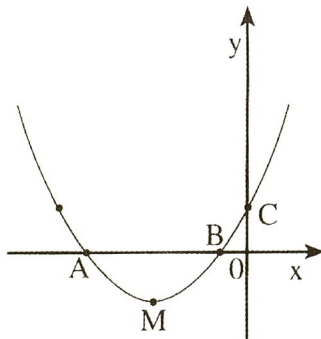
- א.  $y = x^2 - 6x + 8$       ב.  $y = x^2 + 3x - 2$   
 ג.  $y = -x^2 + 5x - 6$       ד.  $y = 2x^2 - 4x - 6$   
 ה.  $y = x^2 - 8x$       ו.  $y = -x^2 + 9x$   
 ז.  $y = -x^2 + 9$       ח.  $y = x^2 + 1$

**תשובה:**

- א.  $x = -1.5$       ב.  $x = 3$       ג.  $x = 2.5$       ד.  $x = 1$       ה.  $x = 4$       ו.  $x = 4.5$       ז.  $x = 0$       ח.  $x = 0$

151. לכל אחת מהפונקציות שבתרגיל הקודם, קבע באיזה תחום היא עולה ובאיזה תחום היא יורדת.

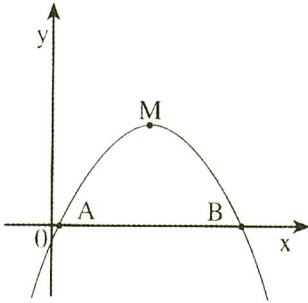
- תשובה:** א.  $x < 3 \Leftrightarrow y \downarrow$ ,  $x > 3 \Leftrightarrow y \uparrow$       ב.  $x < -1.5 \Leftrightarrow y \downarrow$ ,  $x > -1.5 \Leftrightarrow y \uparrow$   
 ג.  $x > 2.5 \Leftrightarrow y \downarrow$ ,  $x < 2.5 \Leftrightarrow y \uparrow$       ד.  $x > 1 \Leftrightarrow y \uparrow$ ,  $x < 1 \Leftrightarrow y \downarrow$   
 ו.  $x > 4.5 \Leftrightarrow y \downarrow$ ,  $x < 4.5 \Leftrightarrow y \uparrow$       ז.  $x > 0 \Leftrightarrow y \downarrow$ ,  $x < 0 \Leftrightarrow y \uparrow$   
 ח.  $x > 0 \Leftrightarrow y \uparrow$ ,  $x < 0 \Leftrightarrow y \downarrow$



152. נתון גרף הפונקציה  $y = x^2 + 6x + 5$ .

- א. חשב את שעורי הנקודות A, B, C, M.  
 ב. קבע באיזה תחום היא עולה ובאיזה תחום היא יורדת.  
 ג. לאלו ערכי x, יהיו ערכי הפונקציה שליליים?  
 ד. מהי הנקודה הסימטרית ל-C ביחס לציר הפרבולה?

- תשובה:** א.  $M(-3,-4); C(0,5); B(-1,0); A(-5,0)$   
 ב.  $x > -3 \leftrightarrow y \uparrow, x < -3 \leftrightarrow y \downarrow$   
 ג.  $-5 < x < -1$ . ד.  $(-6,5)$



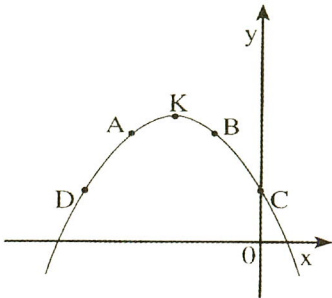
153. נתון גרף הפונקציה  $y = -x^2 + 7x - 6$ .

- א. חשב את שעורי הנקודות A, B, C, M.  
 ב. קבע באיזה תחום היא עולה ובאיזה תחום היא יורדת.  
 ג. לאלו ערכי x, יהיו ערכי הפונקציה שליליים?  
 ד. מהי הנקודה הסימטרית ל-C ביחס לציר הפרבולה?

- תשובה:** א.  $M(3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}); C(0,-6); B(6,0); A(1,0)$   
 ב.  $x > 3\frac{1}{2} \leftrightarrow y \downarrow, x < 3\frac{1}{2} \leftrightarrow y \uparrow$   
 ג.  $y < 0$  כאשר  $x > 6$  או  $x < 1$ . ד.  $(7,-6)$

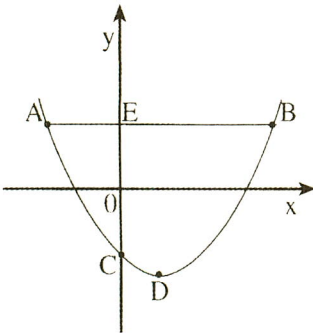
154. בשרטוט נתון גרף הפונקציה:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$$



- K - קודקד הפרבולה,  $B(-2,7)$ .  
 A סימטרית ל-B ביחס לציר הפרבולה.  
 D סימטרית ל-C ביחס לציר הפרבולה.  
 א. מהו ציר הפרבולה?  
 ב. באיזה תחום עולה הפונקציה הנייל?  
 ג. חשב את שעורי הנקודות: D, A, C.

- תשובה:** א.  $x = -4$ . ב.  $x < -4$ . ג.  $D(-8,1); A(-6,7); C(0,1)$



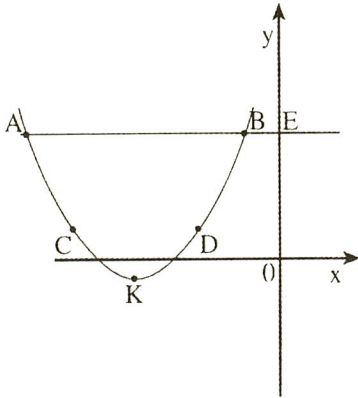
155. נתון גרף הפונקציה  $y = x^2 - 4x - 3$ ,  $E(0,2)$ ,

- דרך E העבירו ישר מקביל לציר ה-x, החותך את הפרבולה שנית ב-B.  
 D קודקד הפרבולה.  
 א. חשב את שעורי הנקודות A, B, C, D ואת משוואת הישר AB.  
 ב. באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה קטנים מ-2.  
 ג. חשב את אורכי הקטעים EC, AB.

- תשובה:** א.  $AB: y=2, D(2,-7); C(0,-3); B(5,2); A(-1,2)$   
 ב.  $-1 < x < 5$ . ג.  $AB=6, EC=5$

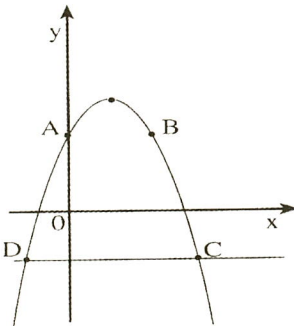
156. בתנאי השאלה הקודמת, סמן את הנקודה הסימטרית ל-  $C$  ביחס לציר הפרבולה ב-  $K$ .  
 א. מצא את שעורי  $K$ .  
 ב. השלם בשרטוט את המרובע  $ACKB$ . הראה שהוא טרפז, וחשב את שטחו.

תשובה: א.  $K(4, -3)$  ב. 25



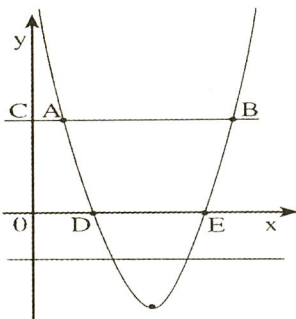
157. נתון גרף הפונקציה  $y = 2(x + 4)^2 - 1$ ,  
 וחותך  $AE$ ,  $E(0, 7)$  מקביל לציר ה-  $x$ , וחותר את הפרבולה שנית ב-  $B$ ,  $C(-5, 1)$ ,  
 $K$  קודקד הפרבולה.  
 א. חשב את שעורי הנקודות  $K, A, B$   
 ו-  $D$  הסימטרית ל-  $C$  ביחס לציר הפרבולה.  
 ב. עבור אלו ערכים של  $x$  יהיו ערכי הפונקציה גדולים מ- 7.  
 ג. חשב את שטח הטרפז  $ABCD$  (השלם בשרטוט).

תשובה: א.  $A(-6; 7)$ ;  $B(-2; 7)$ ;  $K(-4; -1)$ ;  $D(-3; 1)$  ב.  $x > -2$  או  $x < -6$  ג. 18



158. נתון גרף הפונקציה  $y = -2x^2 + 4x + 4$ ,  
 משוואת הישר  $DC$  היא  $y + 2 = 0$ .  
 הנקודה  $B$  סימטרית ל-  $A$  ביחס לציר הפרבולה.  
 א. עבור אלו ערכי  $x$ , יהיו ערכי הפונקציה גדולים מ-  $(-2)$ ?  
 ב. בעיזה תחום יורדת הפונקציה?  
 ג. חשב את שטח הטרפז  $ABCD$  (השלם בשרטוט).

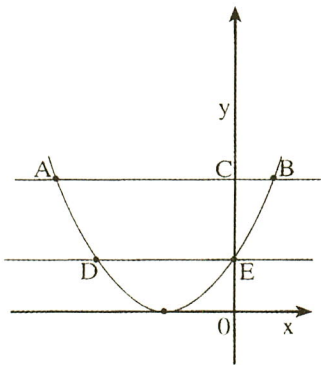
תשובה: א.  $-1 < x < 3$  ב.  $x > 1$  ג. 18



159. נתון גרף הפונקציה:  
 $y = 4x^2 - 16x + 12$ ,  $\vec{AB} \parallel \vec{x}$ ,  $C(0, 5)$ .  
 א. האם יכולים ערכי הפונקציה להיות שווים ל-  $(-4.5)$ ? נמק'.  
 ב. חשב את שטח הטרפז  $ABED$ .  
 ג. מצא את משוואת קטע האמצעים בטרפז הנ"ל ואת אורך האלכסון שלו  $AE$ .

תשובה: א. לא ב. 12.5 ג.  $y = 2.5$ ,  $\approx 5.6$

160. נתון גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$



ונתון  $C(0,8)$ ,  $\vec{DE} \parallel \vec{AB} \parallel x$ .

- חשב את שעורי הנקודות A, B, D, E.
- חשב את שטח הטרפז ABED.
- עבור אלו ערכי x יהיו ערכי הפונקציה גדולים מ-2 אך קטנים מ-8?

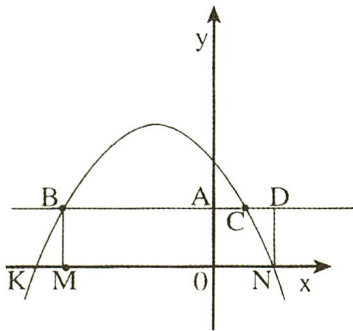
תשובה: א.  $A(-6,8)$ ;  $B(2,8)$ ;  $E(0,2)$ ;  $D(-4,2)$ . ב. 36. ג.  $0 < x < 2$  או  $-6 < x < -4$

161. התייחס למשוואת הפרבולה בבעיה הקודמת ולגרף שלה.

- שרטט בו את הישר AE, ומצא את המשוואה שלו.
- חשב את אורך הקטע AE.
- מצא את משוואת הישר העובר דרך C ומקביל ל-AE.
- חשב את משוואת קטע האמצעים בטרפז ADEB.

תשובה: א.  $y = -x + 2$ . ב.  $6\sqrt{2}$ . ג.  $x + y = 8$ . ד.  $y = 5$

162. נתון גרף הפונקציה  $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 8$ ,



ונתון  $A(0,5)$ ,  
דרך A העבירו ישר מקביל לציר ה-x,  
החותך את הפרבולה בנקודות B ו-C

$\vec{BM} \parallel \vec{DN} \parallel y$ ,  $\vec{BC} \parallel x$

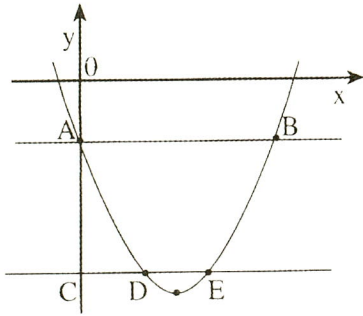
- מצא את שעורי הנקודות A, B, C, D, N, K.
- חשב את שטח המלבן BDMN.
- עבור אלו ערכי x, קטנים ערכי הפונקציה מ-5?

תשובה: א.  $B(-6,5)$ ;  $C(2,5)$ ;  $N(4,0)$ ;  $K(-8,0)$ . ב. 50. ג.  $x > 2$  או  $x < -6$

163. הוסף לשרטוט של הבעיה הקודמת את הישר העובר דרך K ו-D.

- מצא את משוואת הישר KD ומשוואת ישר מקביל לו, העובר דרך הנקודה A (נסמן אותו ב-a).
- מצא את אורך הקטע KD, ואת שעורי אמצע קטע זה.
- מצא משוואת ישר, העובר דרך הנקודה B ומאונך לישר KD.

תשובה: א.  $KD: y = \frac{5x}{12} + 3\frac{1}{3}$ ,  $a: y = \frac{5x}{12} + 5$ . ב. 13,  $(-2, 2.5)$ . ג.  $5y + 12x + 47 = 0$



164. נתון גרף הפונקציה  $y = 1.5x^2 - 6x - 2$ ,

CE חותך את הפרבולה בנקודות D, E

$\vec{AB} \parallel \vec{CE}$ ,  $C(0, -6.5)$

א. מצא את אורך הקטעים AB, DE,

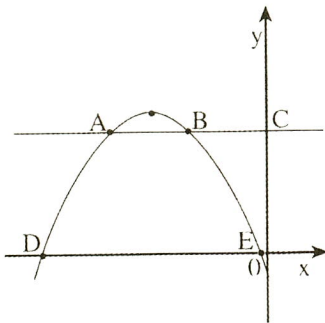
ואת גובה הטרפז ABED.

ב. באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה

גדולים מ- (-6.5) וגם קטנים מ- (-2)?

ג. מצא את אמצע האלכסון AE של הטרפז.

תשובה: א.  $AB=4$ ,  $DE=2$ ,  $AC=4.5$  ב.  $3 < x < 4$  ג.  $0 < x < 1$  (1.5, -4.25)



165\* נתון גרף הפונקציה  $y = -1.5(x + 3)^2 + 6$

AC ישר מקביל לציר ה-x,  $C(0, 4.5)$

א. הראה, כי שטח הטרפז ABED

גדול פי 2 משטח הטרפז EBCO.

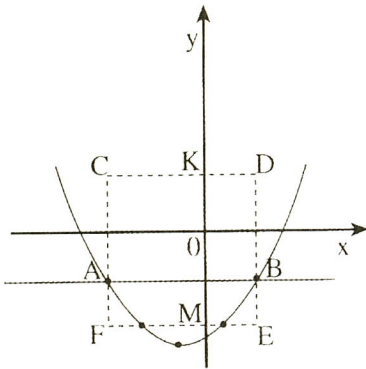
ב. באיזה תחום הפונקציה היא

יורדת וחיובית?

ג. באיזה תחום הפונקציה חיובית

וערכיה קטנים מ- 4.5?

תשובה: א.  $-3 < x < -1$  ב.  $-2 < x < -1$  או  $-5 < x < -4$



166\*\* נתון גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 6$

הישר  $y = -2$  חותך את הפרבולה בשתי

נקודות A ו-B.

נתון  $K(0, 3)$ .

CDEF ריבוע, שצלעותיו מקבילות לצירים.

CF ו-DE עוברות A ו-B, בהתאמה.

א. חשב את שעורי הנקודות A, B, C, M, E.

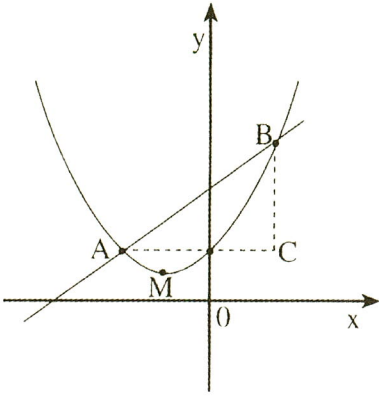
ב. חשב את שטח הריבוע.

ג. חשב את נקודת מפגש אלכסוני הריבוע.

תשובה: א.  $A(-5, -2)$ ;  $B(3, -2)$ ;  $C(-5, 3)$ ;  $M(0, -5)$ ;  $E(3, -5)$  ב. 64 ג.  $(-1, -1)$

167. הגרפים של הפונקציות:

$$y=x+7, \quad Y = \frac{x^2}{2} + 2x + 3$$

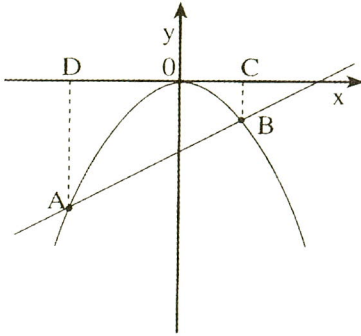


- נחתכים בנקודות A, B.  
 המקבילים לצירים דרך נקודות אלה,  
 נחתכים בנקודה C. M קודקד הפרבולה.  
 א. חשב את שעורי הנקודות M, A, B, C.  
 ב. חשב את שטח המשולש ABC.  
 ג. עבור אלו ערכי x יהיו ערכי הפונקציה הריבועית Y קטנים מערכי הפונקציה הקווית:  $Y < y$ ?

תשובה: א.  $A(-4,3), B(2,9), C(2,3), M(-2,1)$ . ב. 18. ג.  $-4 < x < 2$

168. הגרפים של הפונקציות:

$$y=x-6, \quad Y = -\frac{1}{3}x^2$$



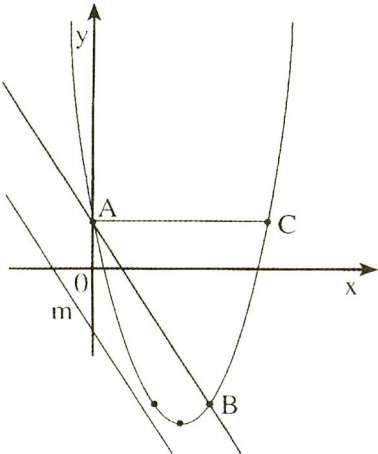
- נחתכים בנקודות A, B.  
 א. חשב את שעורי הנקודות A, B, ואת שטח הטרפז ABCD.  
 ב. באיזה תחום יתקיים  $y > Y$ ?  
 ג\*. באיזה תחום עולים הגרפים של שתי הפונקציות יחד?

תשובה: א.  $A(-6,-12); B(3,-3)$ . ב.  $x > 3$  או  $x < -6$ . ג.  $x < 0$

169. משוואת הפרבולה שבשרטוט היא:

$$Y = 2x^2 - 8x + 2$$

משוואת הישר m היא:  $y = -2x - 4$   
 דרך נקודת החיתוך A של הפרבולה עם ציר ה-y העבירו ישר AB מקביל לישר m.

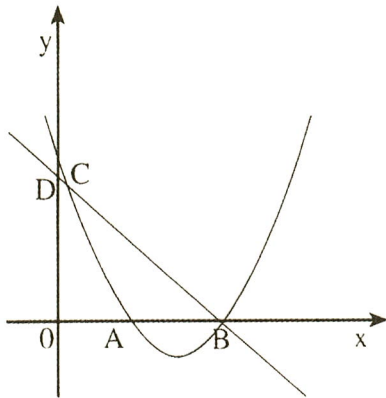


- א. חשב את שעורי הנקודה B.  
 ב. אם  $\vec{AC} \parallel \vec{x}$ , חשב את שטח המשולש ABC.  
 ג. עבור אלו ערכי x מתקיים:  $y > Y$ ?

תשובה: א.  $B(3,-4)$ . ב. 12. ג.  $\emptyset$

170\*. בשרטוט של הבעיה הקודמת: המשך CA חותך את m בנקודה K. המקביל ל-AC דרך B חותך את m ב-L. חשב את שטח המקבילית KABL

תשובה: 18

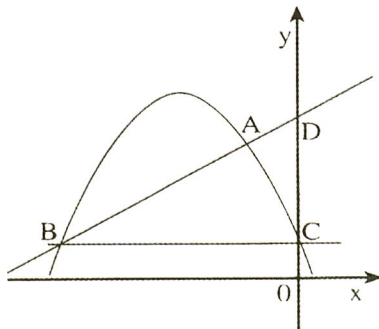


171. הפרבולה שהמשוואה שלה

$$y = x^2 - 7x + 10$$

- חותכת את ציר ה- $x$  בנקודות  $A, B$ .  
 דרך הנקודה  $B$  עובר ישר  $BC$ ,  
 היוצר עם שני הצירים משולש  
 שווה שוקיים  $BOD$ .  
 א. מצא את משוואת הישר  $BD$  ואת  
 שעורי הנקודה  $C$ .  
 ב. חשב את שטח המשולש  $ACB$   
 (חבר  $AC$ ) ואת שטח המרובע  $ODCA$ .  
 ג. באיזה תחום יורדות שתי הפונקציות  
 יחד?

תשובה: א.  $x+y=5$ ,  $C(1,4)$ , ב.  $6, 6.5$ , ג.  $x < 3.5$

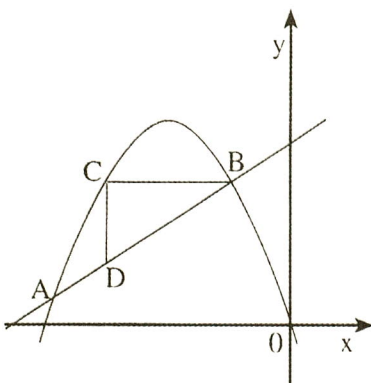


172. נתון גרף הפונקציה -

$$BC \parallel \vec{x}, y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$$

- שטח המשולש  $BDC$  - 32.  
 א. מצא את שעורי הנקודות  $A, C, B, D$ .  
 ב. מצא את משוואת הישר  $AB$ .  
 ג. עבור אלו ערכי  $x$ , קטנים ערכי  
 הפונקציה הריבועית מערכי  
 הפונקציה הקווית?

תשובה: א.  $A(-2,7)$ ;  $D(0,9)$ ;  $B(-8,1)$ ;  $c(0,1)$ . ב.  $y=x+9$ . ג.  $x > -2$  או  $x < -8$



173. נתונים הגרפים של הפונקציות:

$$y=x+6, y = -x^2 - 5x + 1$$

- א. חשב את שעורי הנקודות  $A, B$ .  
 ב. דרך הנקודה  $B$  עובר ישר מקביל  
 לציר ה- $x$ , ומנקודת החיתוך  
 שלו -  $C$  עם הפרבולה - מקביל  
 לציר ה- $y$  -  $CD$ . חשב את אורכי  
 הקטעים  $BC$  ו- $CD$ , ואת שטח  
 המשולש  $BCD$ .

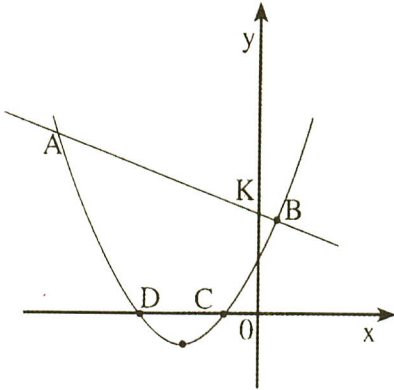
תשובה: א.  $A(-5,1)$ ;  $B(-1,5)$

$$S=4.5, CD=3, BC=3$$

174. בתנאי השאלה הקודמת, מצא :

- א. לאלו ערכי  $x$  יהיו ערכי הפונקציה  $y = -x^2 - 5x + 1$  קטנים מ-5?  
 ב. לאלו ערכי  $x$  יהיו ערכי הפונקציה הנייל גדולים מערכי הפונקציה  $y = x + 6$ .  
 ג.\* איזה קטע של הפרבולה (לפי השרטוט) נמצא בין הישר  $y = 5$  לבין הישר  $y = x + 6$ ? באיזה תחום נמצאות הנקודות שעל קטע זה?

תשובה: א.  $x > -1$  או  $x < -4$  ב.  $-5 < x < -1$  ג. AC,  $-5 < x < -4$



175. נתונים הגרפים של הפונקציות :

$$x + 2y = 13, \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$$

א. חשב את שעורי הנקודות

D, C, B, A

ב.\* באיזה תחום יהיו ערכי

הפונקציה הריבועית חיוביים, וקטנים מערכי הפונקציה הקווית?

תשובה: א.  $B(1,6)$ ;  $A(-8,10.5)$ ;  $D(-5,0)$

ב.  $-8 < x < -5$  או  $-1 < x < 1$

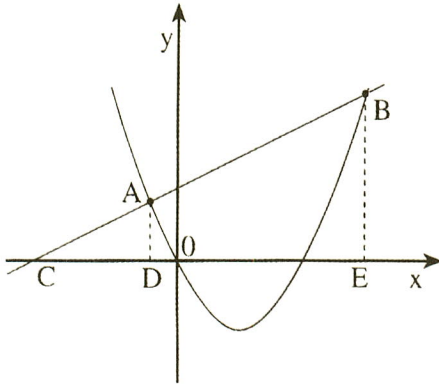
176\*. בשרטוט של הבעיה הקודמת, סמן את נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר

ה- $y$  ב- $E$ , והעבר ישר מקביל לציר ה- $x$ , החותך את הפרבולה שנית בנקודה  $F$ .

א. חשב את שטח המרובע  $AKEF$  (רמז: חבר את  $AE$ , וחשב את שטחי המשולשים שנוצרו).

ב. חשב את שטח המרובע  $ABEF$ .

תשובה: א. 40, ב. 42



177. נתונים הגרפים של הפונקציות :

$$y = \frac{1}{2}x + 3, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

א. חשב את שטח המשולש  $BOE$ .

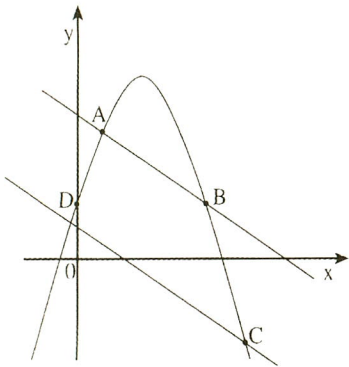
ב. חשב את שטח המשולש

$BOA$  (רמז: בטא אותו כהפרש שני משולשים).

ג. מצא את משוואת קטע

האמצעים בטרפז  $ABED$ .

תשובה: א. 18 ב. 10.5 ג.  $x = 2.5$



178. נתונים הגרפים של הפונקציות :

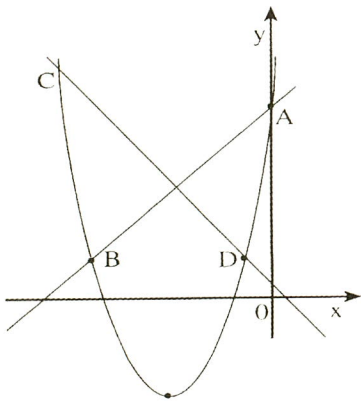
.AB:  $y = -1.5x + 8$  ,  $Y = -1.5x^2 + 6x + 2$

- א. מצא באיזה תחום יהיו ערכי Y קטנים מערכי y.
- ב. דרך הנקודה D עובר ישר DC, המקביל ל-AB. מצא את משוואת DC.
- ג. באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה הריבועית גדולים מערכי הפונקציה של הישר DC
- ד\* העזר בשרטוט וקבע באיזה תחום מתקיימים שני התנאים שבסעיפים א' ו- ג' יחד.

תשובה: א.  $x < 1$  או  $x > 4$  ב.  $y = -1.5x + 2$  ג.  $0 < x < 5$  ד.  $0 < x < 1$  או  $4 < x < 5$

179. העתק את השרטוט של הבעיה הקודמת. דרך הנקודה B העבר מקביל לציר ה-y, החותך את הישר DC בנקודה K. דרך הנקודה K העבר מקביל לציר ה-x, החותך את הפרבולה בנקודות M, N. חשב את אורך הקטע MN.

תשובה:  $4\sqrt{2}$

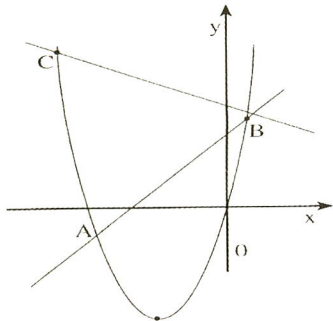


180. נתונים הגרפים של הפונקציות :

.AB:  $y = 2x + 13$  ,  $Y = 2x^2 + 12x + 13$

- א. מצא את שעורי הנקודות A ו- B בהתאמה ביחס לציר הפרבולה, ואת משוואת הישר CD.
- ב. באיזה תחום יהיו שעורי Y קטנים משעורי פונקצית AB?
- ג. באיזה תחום יהיו שעורי Y גדולים משעורי הפונקציה של CD?

תשובה: א.  $C(-6, 13)$  ,  $D(-1, 3)$  ,  $y = -2x + 1$  ב.  $-5 < x < 0$  ג.  $x < -6$  או  $x > -1$

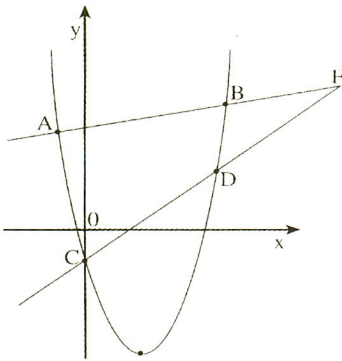


181\*. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות :

.CB:  $y = -x + 4$  , AB:  $y = x + 2$  ,  $Y = x^2 + 4x - 2$

- חשב את שטח המשולש ABC.
- רמז: הפרד את השטח לשני חלקים ע"י שרטוט ישר העובר דרך B ומקביל לציר ה-x.

תשובה: 36



182\* .בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציו

$$AB: y = \frac{1}{2}x + 4, Y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$$

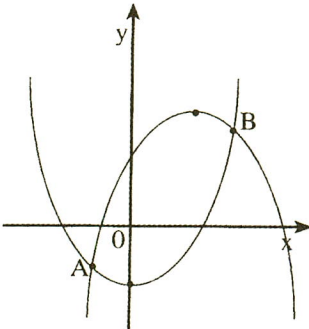
D נקודה סימטרית ל-A ביחס לציר הפרבולה.

א. מצא את משוואת הישר CD.

ב. הישר CD חותך את AB בנקודה F.

חשב את שטח המשולש ACF (הפרד לשני משולשים).

תשובה: א.  $y=x-3$  ב. 48



183 .בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות:

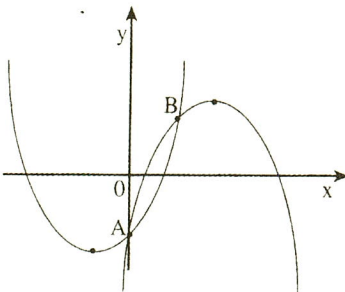
$$Y = -x^2 + 2x + 1, y = x^2 - 3$$

א. מצא את שעורי הנקודות A, B.

ב. העזר בגרף כדי לקבוע באיזה תחום יהיו ערכי הפונקציה Y גדולים מערכי y.

\*ג. באיזה תחום עולות שתי הפונקציות יחד?

תשובה: א.  $B(2,1); A(-1,-2)$  ב.  $-1 < x < 2$  ג.  $0 < x < 1$



184 .בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות:

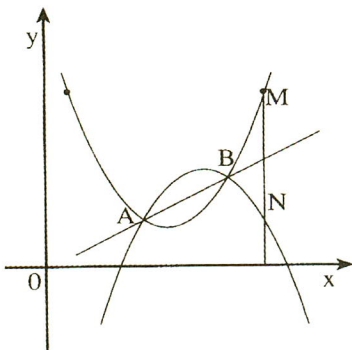
$$Y = -(x-3)^2 + 5, y = (x+1)^2 - 5$$

א. מצא את שעורי הנקודות A, B.

ב. באיזה תחום יתקיים  $Y > y$ ?

ג. באיזה תחום עולות שתי הפונקציות יחד?

תשובה: א.  $B(2,4); A(0,-4)$  ב.  $0 < x < 2$  ג.  $-1 < x < 3$



185 .נתונים הגרפים של הפונקציות:

$$y = x^2 - 8x + 20$$

$$Y = -x^2 + 10x - 16$$

הנחתכים בנקודות A, B.

א. מצא את משוואת הישר AB.

ב. נתון:  $\vec{MN} \parallel y$ ,  $N(7,5)$

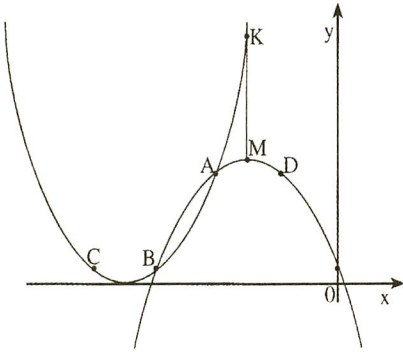
חשב את שטח המשולש MBN.

ג. הראה כי AB, החותך את MN בנקודה K, חוצה אותו בנקודה זו.

תשובה: א.  $y=x+2$  ב. 4

186\*\*. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות:

$$Y = -x^2 - 4x + 1, y = x^2 + 10x + 25$$



הנחתכים בנקודות A, B, הנקודה הסימטרית ל-B ביחס לציר הפרבולה הישרה.

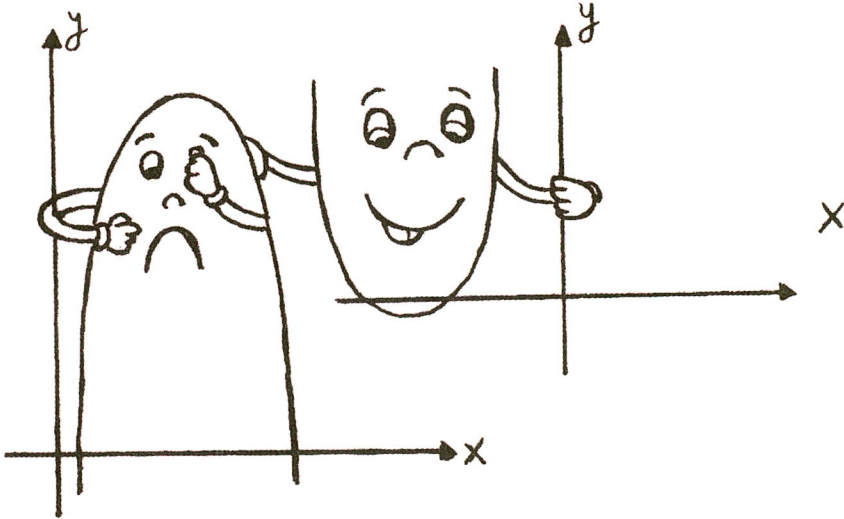
D הנקודה הסימטרית ל-A ביחס לציר הפרבולה ההפוכה.

א. חשב את שטח המרובע ADBC (שרטט אותו).

ב. M קודקד הפרבולה ההפוכה.

אם KM מקביל לציר ה-y, חשב את שטח המשולש KAM (שרטט אותו).

תשובה: א. 6 ב. 2



איננו היית הפוכה כאנוני סט  
את היית פוכה

### סעיף 14 - היפרבולה

187. א. שרטט את גרף הפונקציה  $y = \frac{6}{x}$

ב. העזר בגרף זה, כדי לשרטט את גרף הפונקציה  $y = -\frac{6}{x}$ , ללא טבלת ערכים נוספת.

188. שרטט את גרף הפונקציות הבאות:

א.  $y = \frac{12}{x}$     ב.  $y = -\frac{12}{x}$     ג.  $xy = \frac{1}{2}$     ד.  $2xy = -1$

189. פתור את מערכות המשוואות הבאות בדרך גרפית, ובדוק את התוצאות שקיבלת בדרך אלגברית:

א.  $\begin{cases} xy = 6 \\ y = x + 1 \end{cases}$     ב.  $\begin{cases} xy = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$     ג.  $\begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$     ד.  $\begin{cases} xy = 0.5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

תשובה: א.  $(-3, -2)$ ,  $(2, 3)$     ב.  $(-3, -4)$ ,  $(4, 3)$     ג.  $(2, -3)$ ,  $(-2, 3)$     ד.  $(0.5, 1)$

190. שרטט את גרף הפונקציות  $y = x - 1$ ,  $Y = \frac{12}{x}$  במערכת צירים אחת, וקבע:

- א. לאלו ערכים של  $x$  יהיו ערכי הפונקציה  $Y$  גדולים מערכי הפונקציה  $y$ ?  
ב. באיזה תחום עולה הפונקציה  $Y$ , ובאיזה תחום היא יורדת?

תשובה: א. הפונקציה  $Y$  יורדת לכל  $x$ .    ב.  $0 < x < 4$  או  $x < -3$

191. שרטט את גרף הפונקציה:  $xy = 6$  ודרך הנקודה  $(2, 3)$  שעל גרף פונקציה זו הורד אנכים לצירים.

- א. חשב את שטח המלבן שיוצרים האנכים הללו עם הצירים.  
ב. מאילו נקודות נוספות על גרף הפונקציה, אפשר ליצור מלבנים חופפים למלבן הנ"ל?

תשובות: א. 6,    ב.  $(-2, -3)$ ,  $(-3, -2)$ ,  $(3, 2)$

192. שרטט את גרף הפונקציה  $xy = 12$ , ודרך הנקודה  $(3, 4)$  הורד אנכים לצירים.  
א. מהו שטח המלבן המתקבל בדרך זו?

- ב. האם תוכל למצוא נקודות נוספות, שמהן ניתן ליצור מלבנים בעלי אותו שטח?  
תשובה: א. 12    ב. אינסוף נקודות.

193. נתונה היפרבולה  $Y = \frac{a}{x}$ . הראה כי, שטחי כל המלבנים, הנוצרים על ידי הורדת אנכים לצירים מכל נקודה על ההיפרבולה שווים זה לזה. מהו שטח זה?

תשובה: a